Espaces vectoriels - Méthodologie

I. Démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

I.1. Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Pour démontrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on peut démontrer que F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectorier E de référence.

Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de E.

(i) $F \subseteq E$

(ii) $F \neq \varnothing$. En effet, $0_E \in F$ car ...
(si ce n'est pas le cas, F n'est pas un sev de E !)

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Soit $(u, v) \in F^2$.

Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Tout d'abord : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \dots$
(on réalise la somme des vecteurs $\lambda \cdot u$ et $\mu \cdot v$ à l'aide de la loi + définie sur E)

Or : ...
(on vérifie que $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ vérifie la propriété définissant F)

Et ainsi $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Le point (iii) peut être démontré en deux temps : (iii) stabilité de F par la loi $+$
et (iv) stabilité de F par la loi $\cdot$

(i) Démontrons que F est stable par la loi $+$.

Soit $(u, v) \in F^2$.

Il s'agit de démontrer : $u + v \in F$.

Tout d'abord : $u + v = \dots$
(on réalise la somme des vecteurs u et v à l'aide de la loi + définie sur E)

Or : ...*(on vérifie que $u + v$ vérifie la propriété définissant F)*

Et ainsi $u + v \in F$.

(ii) Démontrons que F est stable par la loi $\cdot$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $u \in F$.

Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot u \in F$.

Tout d'abord : $\lambda \cdot u = \dots$

Or : ...*(on vérifie que $\lambda \cdot u$ vérifie la propriété définissant F)*

Et ainsi $\lambda \cdot u \in F$.

Remarque
Dans la rédaction, il est (très) souvent utile de rappeler que u et v sont des éléments de E qui vérifient la propriété d'appartenance à F :

- Comme $u \in F$, u s'écrit ... et vérifie ...
  (l'appartenance de u à E lui confère une écriture particulière l'appartenance de u à F fait que u vérifie les propriétés définissant F)
- Comme $v \in F$, v s'écrit ... et vérifie ...

Exemple

Montrons que l'ensemble $F = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x+y+z=0\}$ est un espace vectoriel.

Démonstration.

- Tout d'abord : $F \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par définition de F.
- Ensuite : $F \neq \varnothing$. En effet : $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in F$, car $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $0+0+0=0$.
- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(u_1, u_2) \in F^2$.
  Démontrons : $w = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in F$.

  Comme $u_1 \in F$, alors il existe $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et : $x_1 + y_1 + z_1 = 0$.

  De même, comme $u_2 \in F$, il existe $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et : $x_2 + y_2 + z_2 = 0$.
  On remarque :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \ = \ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda 2 z_2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

  On obtient :

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\ = \ & \lambda_1 (x_1 + y_1 + z_1) + \lambda_2 (x_2 + y_2 + z_2) \\ = \ & 0 \qquad \textit{(car } (u_1, u_2) \in F^2\textit{)} \end{aligned}$$

  Donc $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in F$.

□

I.2. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On note : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour démontrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on peut démontrer que F est un sous-espace vectoriel engendré par une partie.

```
Soit u ∈ E.
Alors il existe (λ_1, ..., λ_n) ∈ K^n tel que : u = Σ_{k=1}^{n} λ_k · e_k.
```

$$u \in F \ \Leftrightarrow \ \cdots$$

$$\vdots \quad \texttt{(très souvent résolution de système linéaire)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \texttt{(conditions sur les } \lambda_k\texttt{)}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} F &= \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k \mid \texttt{conditions sur les } \lambda_k\} \\ &= \cdots \\ &\vdots \\ &= \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_p) \end{aligned}$$

On en déduit que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple

Déterminer une base et la dimension de l'espace vectoriel suivant :

$$F \;=\; \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(X+1) = P(X)\}$$

Démonstration.

Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$ où la famille (P_0, P_1, P_2) est la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

$$\begin{array}{rl}
& P \in F \\
\Longleftrightarrow & P(X+1) = P(X) \\
\Longleftrightarrow & a_0 \cdot P_0(X+1) + a_1 \cdot P_1(X+1) + a_2 \cdot P_2(X+1) \\
= & a_0 \cdot P_0(X) + a_1 \cdot P_1(X) + a_2 \cdot P_2(X) \\
\Longleftrightarrow & \cancel{a_0} + a_1\,(X+1) + a_2\,(X+1)^2 = \cancel{a_0} + a_1\,X + a_2\,X^2 \\
\Longleftrightarrow & \cancel{a_1 X} + a_1 + \cancel{a_2 X^2} + 2\,a_2\,X + a_2 = \cancel{a_1 X} + \cancel{a_2 X^2} \\
\Longleftrightarrow & (a_1 + a_2) \cdot P_0 + 2\,a_2 \cdot P_1 = 0_{\mathbb{K}[X]} \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} a_1 & + & a_2 & = & 0 \\ & & 2\,a_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \textit{(car la famille } (P_0, P_1) \textit{ est libre)} \\
\overset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} 2\,a_1 & & = 0 \\ & 2\,a_2 & = 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 0\} \\
& = & \{a_0 \cdot P_0 \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\,(P_0)
\end{array}$$

□

I.3. Démontrer qu'un ensemble `N'EST PAS` un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pour montrer qu'un ensemble F n'est pas un espace vectoriel, on pourra, dans cet ordre :

1) vérifier : $0_E \notin F$.
Si $0_E \in F$, on essaie de vérifier le point suivant.

2) exhiber un vecteur $u \in F$ tel que : $-u \notin F$.
Si on ne parvient pas à trouver un tel vecteur u, on essaie de démontrer le point suivant.

3) exhiber un couple de vecteurs $(u, v) \in F^2$ tel que : $u + v \notin F$.

Exemple

1) L'ensemble $\mathcal{D}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ divergentes n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En effet : $0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \notin \mathcal{D}$.

2) L'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions réelles à valeurs réelles positives n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, en notant :

$$f \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$$

Alors : $f \in \mathcal{P}$, mais $-f \notin \mathcal{P}$.

3) L'ensemble $\mathcal{T}_2(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre 2 triangulaires n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En effet, en notant :

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $(A, B) \in \big(\mathcal{T}_2(\mathbb{K})\big)^2$, mais $A + B \notin \mathcal{T}_2(\mathbb{K})$.

II. Familles libres, familles génératrices, bases

II.1. Familles libres

Pour démontrer qu'une famille $(e_1, \dots, e_m)$ est libre, on suit la définition pour obtenir la rédaction suivante.

> `Soit` $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K^m$.
> `Supposons :`
> $$\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_m \cdot e_m \;=\; 0_E \qquad (*)$$
> `Alors` ...*(raisonnement par implication qui peut faire intervenir une résolution de système (par équivalence))* ...
> `Ainsi :` $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.
> `La famille` $(e_1, \dots, e_m)$ `est donc libre.`

Exemple
Démontrer que la famille $\mathcal{F}$ suivante est libre :

$$\mathcal{F} \;=\; \big((-1,0,1),\, (1,-1,1),\, (0,1,2)\big)$$

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$.
Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (-1,0,1) + \lambda_2 \cdot (1,-1,1) + \lambda_3 \cdot (0,1,2) \;=\; 0_{\mathbb{K}^3} \qquad (*)$$

Or : $(*) \iff (-\lambda_1 + \lambda_2,\, -\lambda_2 + \lambda_3,\, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3 = (0,\, 0,\, 0)$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 4\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(par remontées successives)

La famille $\mathcal{F}$ est donc libre. □

II.2. Familles liées

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \dots, e_m)$ est liée, on exhibe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs e_1, ..., e_m.
Autrement dit, on exhibe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que :

× $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$,
× $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot e_k = 0_E$.

Exemple
Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big((1,1,1),\, (-1,0,1),\, (1,2,3)\big)$ est liée.

Démonstration.
On remarque :

$$2 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (-1,0,1) + (-1) \cdot (1,2,3) \;=\; (0,0,0)$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est liée. □

II.3. Familles génératrices d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour montrer qu'une famille $\mathcal{G} = \big(e_1, \ldots, e_p\big)$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel F, on démontre que F est un sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{G}$ comme détaillé en partie I.2.

II.4. Bases d'un espace vectoriel

Pour démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base d'un espace vectoriel F, on peut opter pour l'une des rédactions suivantes (le choix dépend du contexte).

***1)* Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de F.**

```
La famille 𝓕 est :

 × génératrice de F,

 × libre.

C'est donc une base de F.
```

Exemple

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 2 \cdot X\}$ est un ev et en déterminer une base.

Démonstration.

- Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

  Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} X \in F & \Longleftrightarrow & AX = 2 \cdot X \\ & \Longleftrightarrow & (A - 2 \cdot I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \\ X \in F & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & y & = & -2\,z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} -2\,x & = & -2\,z \\ y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

- On obtient :

$$\begin{array}{rcl} F & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid x = z \text{ et } y = 0 \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{K} \right\} \\ & = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{K} \right\} \;=\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

- La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est donc :

  × génératrice de F, d'après ce qui précède,

  × libre, car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  C'est donc une base de F.
  Ce n'était pas demandé mais on peut de plus en déduire :

$$\dim(F) \;=\; \mathrm{Card}\left(\mathcal{F}_2\right) \;=\; 1 \qquad \square$$

2) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E de cardinal minimal ($\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \dim(F)$)**

> `La famille` $\mathcal{F}$ `est :`
>
> × `génératrice de` F`,`
>
> × `telle que :` $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$`.`
>
> `C'est donc une base de` F`.`

Exemple

Montrer que la famille $\mathcal{F} = \big((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

Démonstration.
La famille $\mathcal{F} = \big((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est :

× génératrice de $\mathbb{K}^3$. En effet :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}\left((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\right) &= \mathrm{Vect}\left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right)\\ &= \mathbb{K}^3\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue car la famille $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

× telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}^3$. $\square$

3) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de cardinal maximal ($\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \dim(F)$)**

> `La famille` $\mathcal{F}$ `est :`
>
> × `libre,`
>
> × `telle que :` $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$`.`
>
> `C'est donc une base de` F`.`

Exemple

Montrer que la famille $\mathcal{F} = \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ est :

× libre. En effet, soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{K}^3$.
Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (1,0,0) + \lambda_2 \cdot (1,1,0) + \lambda_3 \cdot (1,1,1) \;=\; 0_{\mathbb{K}^3} \qquad (*)$$

$$\begin{aligned}\text{Or :}\quad (*) &\iff (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_3 = (0,\ 0,\ 0)\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1 &+& \lambda_2 &+& \lambda_3 &=& 0\\ && \lambda_2 &+& \lambda_3 &=& 0\\ &&&& \lambda_3 &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\\ &\qquad \textit{(par remontées successives)}\end{aligned}$$

Donc : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est libre.

× telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

III. Démontrer qu'un espace s'écrit comme somme de 2 supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On souhaite démontrer que E s'écrit sous la forme $E = F_1 \oplus F_2$, où F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E.
On peut utiliser l'une des méthodes suivantes.

1) Pour répondre à la question : « Montrer qu'il existe un supplémentaire de F_1 dans E ».
On utilise le théorème de la base incomplète.

2) Pour répondre à la question : « Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E. ».
On peut suivant le contexte :

a) utiliser un raisonnement par analyse-synthèse.
Notons que cette méthode peut aussi être employée :

- × si E n'est pas de dimension finie,
- × si strictement plus de 2 espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.

b) utiliser une caractérisation de la supplémentarité à l'aide de la dimension.
Parmi les caractérisations du cours, on emploie le plus souvent les suivantes :

- × $\begin{cases} \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) \\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$
- × la concaténation d'une base $\mathscr{B}_1$ de F_1 et $\mathscr{B}_2$ de F_2 est une base de E.
  Notons que cette méthode peut aussi être utilisée si strictement plus de 2 espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.

Illustration de ces procédés sur des exemples

1) Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f une application linéaire de E dans E, c'est-à-dire :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)$$

On note : $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\}$.

1. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. Démontrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus G$.

Démonstration.

1. Démontrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

- $\mathrm{Ker}(f) \subseteq E$, par définition de $\mathrm{Ker}(f)$.
- $\mathrm{Ker}(f) \neq \varnothing$. En effet $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$, car, comme f est linéaire :

$$f(0_E) \ = \ f(0 \cdot 0_E) \ = \ 0 \cdot f(0_E) \ = \ 0_E$$

- Démontrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par combinaison linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(x_1, x_2) \in (\mathrm{Ker}(f))^2$.

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) \ + \ \lambda_2 \cdot f(x_2) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot 0_E \ + \ \lambda_2 \cdot 0_E & \textit{(car } x_1 \in \mathrm{Ker}(f) \textit{ et } x_2 \in \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \\ & = & 0_E & \end{array}$$

2. Comme E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et : $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
On note $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de de $\mathrm{Ker}(f)$. C'est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$ et donc de E.
On peut donc la compléter en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.
On note alors $G = \mathrm{Vect}\,(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
La base $\mathscr{B}$ étant une concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de G , on a bien : $E = G \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

□

2) On note :
- × $E = \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$,
- × F_1 l'ensemble des fonctions constantes de E,
- × $F_2 = \{f \in E \mid \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt\}$

Démontrer : $E = F_1 \oplus F_2$.

Démonstration.
Soit $f \in E$.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse** : Supposons qu'il existe $(g, h) \in E^2$ tel que :
  - *a)* $g \in F_1$,
  - *b)* $h \in F_2$,
  - *c)* $f = g + h$.

  Comme $g \in F_1$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = c$.
  De plus, comme les fonctions f, g et h sont continues sur le segment $[0,1]$, alors les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$, $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_0^1 h(t)\ dt$ sont bien définies.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\ dt &= \int_0^1 (g+h)(t)\ dt && \textit{(d'après \textbf{c)})} \\
&= \int_0^1 g(t)\ dt + \int_0^1 h(t)\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 c\ dt + 0 && \textit{(car } h \in F_2\textit{)} \\
&= c\ \big[\ t\ \big]_0^1 \ = \ c
\end{aligned}$$

  Ainsi :
  - × $g : x \mapsto c = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$,
  - × $h : x \mapsto f(x) - f_1(x) = f(x) - \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.

- **Synthèse** : On pose :

$$g_0 : x \mapsto \int_0^1 f(t)\ dt \qquad \text{et} \qquad h_0 : x \mapsto f(x) - \int_0^1 f(t)\ dt$$

  - *a)* La fonction g_0 est bien constante sur $[0,1]$. Autrement dit : $g_0 \in F_1$.
  - *b)* La fonction h_0 est continue sur le segment $[0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(t)\ dt$ est donc bien définie. De plus :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 h(t)\ dt \\
= \ & \int_0^1 \left(f(t) - \int_0^1 f(t)\ dt \right)\ dt \\
= \ & \int_0^1 f(t)\ dt - \int_0^1 f(t)\ dt \times \int_0^1 1\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale car } \int_0^1 f(t)\ dt \textit{ est un scalaire)} \\
= \ & \int_0^1 f(t)\ dt - \int_0^1 f(t)\ dt \times 1 \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

    Ainsi : $h_0 \in F_2$.
  - *c)* Enfin, soit $x \in [0,1]$.

$$g_0(x) + h_0(x) \ = \ \cancel{\int_0^1 f(t)\ dt} + f(x) - \cancel{\int_0^1 f(t)\ dt} \ = \ f(x)$$

    D'où : $f = g_0 + h_0$.

Finalement, toute fonction f de E se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction de F_1 et une fonction de F_2.
Autrement dit : $E = F_1 \oplus F_2$. □

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- La famille $\mathcal{F} = \big(E_{i,j} - E_{j,i}\big)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On en déduit :

$$\dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) \ = \ \text{Card}\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n-1} i \ = \ \frac{n\,(n-1)}{2}$$

La famille $\mathcal{G}$ obtenue en concaténant les familles $\mathcal{G}_1 = \big(E_{i,j}+E_{j,i}\big)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ et $\mathcal{G}_2 = \big(E_{i,i}\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \dim\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) &= \text{Card}\,(\mathcal{G}) \\ &= \text{Card}\,(\mathcal{G}_1) + \text{Card}\,(\mathcal{G}_2) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right) + n \\ &= \frac{n\,(n-1)}{2} + n \\ &= \frac{n}{2}\ ((n-1)+2) \\ &= \frac{n\,(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) \ + \ \dim\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) &= \frac{n\,(n-1)}{2} \ + \ \frac{n\,(n+1)}{2} \\ &= \frac{n}{2}\ ((\cancel{n}-1)+(\cancel{n}+1)) \\ &= \frac{n}{2} \times 2\,n \\ &= n^2 \ = \ \dim\,(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \dim\,(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \ = \ \dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) \ + \ \dim\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big).}$$

- Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :
  - × ${}^tM = -M$ car $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
  - × ${}^tM = M$ car $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

  On en déduit : $M = -M$ et donc : $2\,M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \ = \ \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}.}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \ \oplus \ \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).}$$

□

Remarque

Notons enfin que l'écriture sous forme d'une somme de supplémentaires amène naturellement à considérer une base adaptée au problème (une famille issue de la concaténation d'une base de F_1 et d'une base de F_2). Cette base peut être introduite lors de la démonstration de la décomposition sous forme de somme ou plus tard dans l'exercice.