Fiche Méthodes : Résolutions d'Équations Différentielles Linéaires (EDL)

I. Méthodes générales

I.1. Forme de l'ensemble des solutions

MÉTHODO **Résolution d'une EDL**

Pour trouver l'ensemble des solutions d'une équation différentielle **linéaire** :

1) on résout l'équation homogène associée. On note $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble de ses solutions.

2) on recherche d'une solution particulière de l'équation complète. On note cette fonction g.

3) on obtient les solutions de l'EDL complète :

$$\mathcal{S} \;=\; \{g + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$$

On retiendra :

solution générale de (L)	$=$	solution particulière de (L)	$+$	solution générale de (H)

Pour le point *2)*, on se réfèrera aux méthodes de recherche d'une solution particulière des sections suivantes dans le cas des EDL d'ordre 1 et d'ordre 2.

I.2. Principe de superposition

MÉTHODO **Solution particulère quand le 2nd membre est une CL**

Soit (L) une équation différentielle **linéaire** d'ordre p de la forme :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b(t)$$

Supposons que le second membre b de l'équation (L) s'écrit sous forme de combinaison linéaire :

$$b \;=\; \lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 + \cdots + \lambda_n\, b_n$$

Alors, pour chercher une solution particulière de (L) :

1) on détermine une solution particulière f_1 de l'EDL (L_1) définie par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b_1(t)$$

2) on détermine une solution particulière f_2 de l'EDL (L_2) définie par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b_2(t)$$

$\vdots$

$\vdots$

n) on détermine une solution particulière f_n de l'EDL (L_n) définie par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b_n(t)$$

$(\star)$ Par principe de superposition, l'EDL (L) admet pour solution particulière la fonction f définie par :

$$f \;=\; \lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2 + \cdots + \lambda_n\, f_n$$

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

II.1. Équation homogène

Proposition 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit a une fonction continue sur I. Soit A une primitive de a sur I.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur I définie par :

$$y'(t) + a(t)\,y(t) \;=\; 0$$

Alors :

$$\boxed{y \text{ solution de } (H) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y : t \mapsto \lambda\, e^{-A(t)}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\, e^{-A(t)} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\}}$$

Exercice 1

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + y = 0$.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' - t\,y = 0$.

Démonstration.

1) L'équation $y' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2) On remarque que :

- × l'équation $y' - ty = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1,
- × une primitive de la fonction $t \mapsto -t$ est $t \mapsto -\dfrac{t^2}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'équation (H) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

□

Exercice 2

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = \tan(x)\,y$.
On pensera notamment à définir auparavant l'intervalle sur lequel on cherche les solutions.

2. Résoudre l'équation différentielle $(1 + t^2)\,y' + t\,y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

II.2. Solution particulière

II.2.a) Solutions remarquables, lorsque a est constante

Soit $a \in \mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant suivante :

$$y'(t) + a\,y(t) \;=\; b(t)$$

On souhaite déterminer une solution particulière de cette équation.

Si $t \mapsto b(t)$ est de la forme...	chercher une solution de la forme...
$t \mapsto \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$ constante	$t \mapsto \mu$, $\mu \in \mathbb{K}$ constante
$t \mapsto P_n(t)$, P_n polynôme de degré n	$t \mapsto Q_n(t)$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,e^{\alpha t}$, P_n polynôme de degré n, $\alpha \neq -a$	$t \mapsto Q_n(t)\,e^{\alpha t}$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,e^{-a t}$, P_n polynôme de degré n	$t \mapsto t\,Q_n(t)\,e^{-a t}$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto \alpha\,\cos(\omega t) + \beta\,\sin(\omega t)$, $(\alpha, \beta, \omega) \in \mathbb{K}^3$ des constantes	$t \mapsto \;\lambda\,\cos(\omega t) + \mu\,\sin(\omega t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ des constantes

Exercice 3
Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^t$

Démonstration.

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H) $y' + y = 0$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. L'ensemble de ses solutions est donc :
$$\{t \mapsto \lambda\,e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
Comme le second membre de (E) est $t \mapsto e^t$, on cherche une solution de la forme $t \mapsto \lambda\,e^t$ solution de (E).
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note alors $h : t \mapsto \lambda\,e^t$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\; h'(t) + h(t) = e^t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\; \lambda\,e^t + \lambda\,e^t = e^t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\; 2\lambda\,e^t = e^t \\ &\Leftrightarrow 2\,\lambda = 1 \qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\; e^t \neq 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
Ainsi la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{2}\,e^t$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \lambda\,e^{-t} + \frac{1}{2}\,e^t \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$ □

Exercice 4
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. (E_1) $y' + y = e^{-t}$

2. (E_2) $2y' - 4y = t\,e^{2t}$

II.2.b) Méthode de la variation de la constante

MÉTHODO **Méthode de la variation de la constante**

Pour déterminer une solution **particulière** d'une équation différentielle linéaire (L) d'ordre 1 $y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t)$ définie sur I, on peut appliquer la méthode dite de la variation de la constante.

1) On détermine les solutions de l'équation homogène associée à (L) :

$$\{t \mapsto \lambda\, y_H(t) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

où $y_H : t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ avec A une primitive de a sur I.

2) On cherche une solution particulière de (L) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\, y_H(t)$.

a) Soit λ une fonction dérivable sur I. On note alors $h : t \mapsto \lambda(t)\, y_H(t)$. La fonction h est bien dérivable sur I.

b) On raisonne ensuite par équivalence.

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (L) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + a(t)\, h(t) = b(t) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = \cdots = g(t) \end{aligned}$$

La fonction λ peut donc être choisie parmi les primitives de g.

c) On détermine de manière explicite une primitive de g sur I, notée G.

d) Une solution particulière de (L) est alors : $t \mapsto G(t)\, y_H(t)$.

Exercice 5
Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle (E) $t\, y'(t) + y(t) = t\, \mathrm{e}^{t^2}$.

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène associée (H) $t\, y' + y = 0$.
  Tout d'abord, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$t\, y'(t) + y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) + \frac{1}{t}\, y(t) = 0$$

  On remarque que :
  - × l'équation $y'(t) + \frac{1}{t}\, y(t) = 0$ est linéaire homogène d'ordre 1,
  - × une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $t \mapsto \ln(t)$

  L'ensemble des solutions de l'équation (H) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\ln(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \ = \ \{t \mapsto \frac{\lambda}{t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  On applique la méthode de variation de la constante. Autrement dit, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$.
  Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note alors $h : t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$. La fonction h est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} h \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t\, h'(t) + h(t) = t\, \mathrm{e}^{t^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t \left(\frac{\lambda'(t)}{t} - \frac{\lambda(t)}{t^2} \right) + \frac{\lambda(t)}{t} = t\, \mathrm{e}^{t^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t) - \cancel{\frac{\lambda(t)}{t}} + \cancel{\frac{\lambda(t)}{t}} = t\, \mathrm{e}^{t^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t) = t\, \mathrm{e}^{t^2} \end{aligned}$$

  On en déduit que la fonction λ cherchée peut être choisie parmi les primitives de $t \mapsto t\, \mathrm{e}^{t^2}$.
  La fonction $\lambda : t \mapsto \dfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^{t^2}$ convient.
  Ainsi, la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{2t}\, \mathrm{e}^{t^2}$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \frac{1}{2t}\, \mathrm{e}^{t^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

□

Exercice 6

1. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) - \dfrac{y(t)}{t} = t\, \mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Résoudre l'équation différentielle $\big(t^2 \ln(t)\big)\, y'(t) - t\, y(t) = -\big(1 + \ln(t)\big)$ sur $]0, 1[$.

III. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

III.1. Équation homogène

Proposition 2.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $a \neq 0$.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) \ = \ 0$$

On note r_1 et r_2 les deux solutions de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (H).

Deux cas se présentent.

(i) *si $r_1 \neq r_2$, alors :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \ = \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_1\, t} + \lambda_2\, e^{r_2\, t} \end{array} \ \middle|\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}}$$

(ii) *si $r_1 = r_2$, alors, en notant r_0 cette valeur commune :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \ = \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_0\, t} + \lambda_2\, t\, e^{r_0\, t} \end{array} \ \middle|\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}}$$

Proposition 3.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $a \neq 0$.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) \ = \ 0$$

Trois cas se présentent.

(i) **Régime apériodique** *: si l'équation caractéristique associée à (H) admet* exactement 2 solutions réelles *r_1 et r_2 ($r_1 \neq r_2$), alors :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \ = \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_1\, t} + \lambda_2\, e^{r_2\, t} \end{array} \ \middle|\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

(ii) **Régime critique** *: si l'équation caractéristique associée à (H) admet* exactement 1 solution réelle *r_0, alors :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \ = \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_0\, t} + \lambda_2\, t\, e^{r_0\, t} \end{array} \ \middle|\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

(iii) **Régime pseudo-périodique** *: si l'équation caractéristique associée à (H)* n'admet pas de solution réelle, *alors on note $r_1 = \alpha + i\beta$ l'une des deux solutions complexes (et $r_2 = \overline{r_1}$ la seconde). On obtient ainsi :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \ = \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{\alpha\, t}\, \cos(\beta\, t) + \lambda_2\, e^{\alpha\, t}\, \sin(\beta\, t) \end{array} \ \middle|\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Exercice 7
Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 4\,y' + 4\,y = 0$.

Démonstration.
L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène. On détermine donc les solutions de son équation caractéristique $r^2 + 4r + 4 = 0$. On cherche donc les racines du polynôme $Q(X) = X^2 + 4\,X + 4 = (X+2)^2$. L'unique racine de Q est alors :

$$r_0 \;=\; -2$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{-2t} + \lambda_2\,t\,\mathrm{e}^{-2t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

□

Exercice 8
Soient ω_0 et Q deux réels strictement positifs.

1. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' + \omega_0^2\,y = 0$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' - \omega_0^2\,y = 0$. Exprimer cet ensemble à l'aide de la fonction exponentielle, puis à l'aide des fonctions de trigonométrie hyperbolique.

3. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + \dfrac{\omega_0}{Q}\,y' + \omega_0^2\,y = 0$.

III.2. Solution particulière

III.2.a) Un premier tableau

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $a \neq 0$. Soit $d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur I par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; d(t)$$

On note Q le polynôme défini par : $Q(X) = aX^2 + bX + c$.

Si $t \mapsto d(t)$ est de la forme...	et si...	chercher une solution de la forme...
$t \mapsto \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$ constante		$t \mapsto \mu$, $\mu \in \mathbb{K}$ constante
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n	α non racine de Q	$t \mapsto R_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, R_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n	α racine **simple** de Q	$t \mapsto R_n(t)\,t\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, R_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n	α racine double de Q	$t \mapsto R_n(t)\,t^2\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, R_n polynôme de degré n

Exercice 9
Résoudre l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y'' - 4\,y' + 3\,y = (2t+1)\,\mathrm{e}^t$$

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène (H) associée à (E) : $y'' - 4\,y' + 3\,y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. On détermine donc les solutions de son équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$.
  On cherche donc les racines du polynôme $Q(X) = X^2 - 4\,X + 3 = (X-1)\,(X-3)$. Les racines de Q sont alors :

  $$r_1 \;=\; 1 \qquad \text{et} \qquad r_2 \;=\; 3$$

  Comme $r_1 \neq r_2$, l'ensemble des solutions de (H) est :

  $$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \mid (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  Comme le second membre de (E) est $t \mapsto (2t+1)\,\mathrm{e}^t$ et que 1 est racine simple de Q, on cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto (a\,t+b)\,t\,\mathrm{e}^t$.
  Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note alors $h : t \mapsto (at^2+bt)\,\mathrm{e}^t$. La fonction h est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

  $$\begin{aligned} h'(t) &= (2at+b)\,\mathrm{e}^t + (at^2+bt)\,\mathrm{e}^t \\ &= \big(at^2 + (2a+b)t + b\big)\,\mathrm{e}^t \\ h''(t) &= \big(2at+2a+b\big)\,\mathrm{e}^t + \big(at^2+(2a+b)t+b\big)\,\mathrm{e}^t \\ &= \big(at^2+(4a+b)t+2a+2b\big)\,\mathrm{e}^t \end{aligned}$$

  On obtient :

  $$\begin{aligned} & h \text{ solution de } (E) \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R},\quad h''(t) - 4\,h'(t) + 3\,h(t) = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R},\quad \big(at^2+(4a+b)t+2a+2b\big)\,\mathrm{e}^t \\ & \qquad -4\,\big(at^2+(2a+b)t+b\big)\,\mathrm{e}^t \\ & \qquad +3\,(at^2+bt)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R},\quad \big(-4at+2a-2b\big)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R},\quad -4at+2a-2b = 2t+1 \qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^t \neq 0\textit{)} \\ \Longleftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{rcrcr} -4a & & & = & 2 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array}\right. \\ \Longleftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & 1 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array}\right. \\ \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & -1 \\ & - & 2b & = & 2 \end{array}\right. \\ \Longleftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{rcr} a & = & -\dfrac{1}{2} \\ b & = & -1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

  Ainsi la fonction $h : t \mapsto \left(-\dfrac{1}{2}\,t^2 - t\right)\mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} - \left(\frac{1}{2}\,t^2 + t\right)\mathrm{e}^t \mid (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

□

III.2.b) Solution particulière quand le 2$^{\text{nd}}$ membre est de la forme $t \mapsto A\,\cos(\omega\,t)$ ou $t \mapsto A\,\sin(\omega\,t)$

MÉTHODO **Solution particulière quand** $d : t \mapsto A\,\cos(\omega\,t)$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Soit $(A, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy \;=\; A\,\cos(\omega\,t) \qquad (E)$$

1) On cherche une solution particulière **complexe** g de l'EDL :

$$ay'' + by' + cy \;=\; A\,\mathrm{e}^{i\omega x}$$

Pour cela, on utilise le tableau précédent.

2) On en déduit que la fonction $\mathrm{Re}\,(g)$ est une solution particulière de (E).

On procède de même pour des seconds membres du type $t \mapsto P_n(t)\,\cos(\omega\,t)$.

MÉTHODO **Solution particulière quand** $d : t \mapsto A\,\sin(\omega\,t)$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Soit $(A, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy \;=\; A\,\sin(\omega\,t) \qquad (E)$$

1) On cherche une solution particulière **complexe** g de l'EDL :

$$ay'' + by' + cy \;=\; A\,\mathrm{e}^{i\omega x}$$

Pour cela, on utilise le tableau précédent.

2) On en déduit que la fonction $\mathrm{Im}\,(g)$ est une solution particulière de (E).

On procède de même pour des seconds membres du type $t \mapsto P_n(t)\,\sin(\omega\,t)$.

Exercice 10

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y'' + y' + y = \mathrm{e}^x\,\cos(x)$

2. $y'' + y = t\,\sin(t)$.