Fiche Méthodes : Résolutions d'Équations Différentielles Linéaires (EDL)

I. Méthodes générales

I.1. Forme de l'ensemble des solutions

MÉTHODO **Résolution d'une EDL**

Pour trouver l'ensemble des solutions d'une équation différentielle **linéaire** :

1) on résout l'équation homogène associée. On note $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble de ses solutions.

2) on recherche d'une solution particulière de l'équation complète. On note cette fonction g.

3) on obtient les solutions de l'EDL complète :

$$\mathcal{S} \;=\; \{g + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$$

On retiendra :

solution générale de (L)	$=$	solution particulière de (L)	$+$	solution générale de (H)

Pour le point *2)*, on se réfèrera aux méthodes de recherche d'une solution particulière des sections suivantes dans le cas des EDL d'ordre 1 et d'ordre 2.

I.2. Principe de superposition

MÉTHODO **Solution particulère quand le 2nd membre est une CL**

Soit (L) une équation différentielle **linéaire** d'ordre p de la forme :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b(t)$$

Supposons que le second membre b de l'équation (L) s'écrit sous forme de combinaison linéaire :

$$b \;=\; \lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 + \cdots + \lambda_n\, b_n$$

Alors, pour chercher une solution particulière de (L) :

1) on détermine une solution particulière f_1 de l'EDL (L_1) définie par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b_1(t)$$

2) on détermine une solution particulière f_2 de l'EDL (L_2) définie par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b_2(t)$$

$\vdots$

$\vdots$

n) on détermine une solution particulière f_n de l'EDL (L_n) définie par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b_n(t)$$

$(\star)$ Par principe de superposition, l'EDL (L) admet pour solution particulière la fonction f définie par :

$$f \;=\; \lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2 + \cdots + \lambda_n\, f_n$$

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

II.1. Équation homogène

Proposition 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit a une fonction continue sur I. Soit A une primitive de a sur I.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur I définie par :

$$y'(t) + a(t)\,y(t) \;=\; 0$$

Alors :

$$\boxed{y \text{ solution de } (H) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y : t \mapsto \lambda\, e^{-A(t)}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\, e^{-A(t)} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\}}$$

Exercice 1

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + y = 0$.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' - t\,y = 0$.

Démonstration.

1) On remarque que :

- × l'équation $y' + y = 0$ (H_1) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1,
- × une primitive de la fonction $t \mapsto 1$ est $t \mapsto t$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'ensemble des solutions de } (H_1) \text{ est donc :} \\ \{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.\end{array}}$$

2) On remarque que :

- × l'équation $y' - ty = 0$ (H_2) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1,
- × une primitive de la fonction $t \mapsto -t$ est $t \mapsto -\dfrac{t^2}{2}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'ensemble des solutions de l'équation } (H_2) \text{ est donc :} \\ \{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}\end{array}}$$

□

Exercice 2

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = \tan(x)\,y$.
On pensera notamment à définir auparavant l'intervalle sur lequel on cherche les solutions.

2. Résoudre l'équation différentielle $(1 + t^2)\,y' + t\,y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

II.2. Solution particulière

II.2.a) Solutions remarquables, lorsque a est constante

Soit $a \in \mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant suivante :

$$y'(t) + a\,y(t) \;=\; b(t)$$

On souhaite déterminer une solution particulière de cette équation.

Si $t \mapsto b(t)$ est de la forme...	chercher une solution de la forme...
$t \mapsto \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$ constante	$t \mapsto \mu$, $\mu \in \mathbb{K}$ constante
$t \mapsto P_n(t)$, P_n polynôme de degré n	$t \mapsto Q_n(t)$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n, $\alpha \neq -a$	$t \mapsto Q_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{-a\,t}$, P_n polynôme de degré n	$t \mapsto t\,Q_n(t)\,\mathrm{e}^{-a\,t}$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto \alpha\,\cos(\omega\,t) + \beta\,\sin(\omega\,t)$, $(\alpha, \beta, \omega) \in \mathbb{K}^3$ des constantes	$t \mapsto \lambda\,\cos(\omega\,t) + \mu\,\sin(\omega\,t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ des constantes

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + y = \mathrm{e}^t$

Démonstration.

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H) $y' + y = 0$.
  - × L'équation (H) est une équation différentielle homogène d'ordre 1.
  - × Une primitive de $t \mapsto 1$ est $t \mapsto t$.

  L'ensemble des solutions de (H) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  On note :

$$\begin{array}{rcccl} h & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^t \end{array}$$

  La fonction h est une solution particulière de (E). En effet :
  - × la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$,
  - × pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$h'(t) + h(t) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t \;=\; \mathrm{e}^t$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est donc : } \{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Commentaire

- Il existe beaucoup de solutions particulières de (E) (une infinité non dénombrable plus précisément). Il suffit simplement d'en exhiber une. La recherche d'une solution particulière h peut donc s'effectuer au brouillon. On rédigera sur la copie seulement la démonstration que la fonction h est bien solution de (E)
- Détaillons l'obtention de la fonction h.
  Comme le second membre de (E) est $t \mapsto \mathrm{e}^t$, on cherche une solution de la forme $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^t$ solution de (E).
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note alors $h : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^t$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + h(t) = \mathrm{e}^t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda\,\mathrm{e}^t + \lambda\,\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ 2\lambda\,\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \\ &\Leftrightarrow 2\,\lambda = 1 \qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ e^t \neq 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Ainsi la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E). □

Exercice 4
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. (E_1) $y' + y = \mathrm{e}^{-t}$

2. (E_2) $2y' - 4y = t\,\mathrm{e}^{2t}$

II.2.b) Méthode de la variation de la constante

MÉTHODO **Méthode de la variation de la constante**

Pour déterminer une solution **particulière** d'une équation différentielle linéaire (L) d'ordre 1 $y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t)$ définie sur I, on peut appliquer la méthode dite de la variation de la constante.

1) On détermine les solutions de l'équation homogène associée à (L) :

$$\{t \mapsto \lambda\,y_H(t) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

où $y_H : t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ avec A une primitive de a sur I.

2) On cherche une solution particulière de (L) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\,y_H(t)$.

a) Soit λ une fonction dérivable sur I. On note alors $h : t \mapsto \lambda(t)\,y_H(t)$. La fonction h est bien dérivable sur I.

b) On raisonne ensuite par équivalence.

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (L) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + a(t)\,h(t) = b(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = \cdots = g(t) \end{aligned}$$

La fonction λ peut donc être choisie parmi les primitives de g.

c) On détermine de manière explicite une primitive de g sur I, notée G.

d) Une solution particulière de (L) est alors : $t \mapsto G(t)\,y_H(t)$.

Exercice 5
Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle (E) $t\,y'(t) + y(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2}$.

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène associée (H) $t\,y' + y = 0$.
  Tout d'abord, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$t\,y'(t) + y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) + \frac{1}{t}\,y(t) = 0$$

  On remarque que :
  × l'équation $y'(t) + \frac{1}{t}\,y(t) = 0$ est linéaire homogène d'ordre 1,
  × une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $t \mapsto \ln(t)$

L'ensemble des solutions de l'équation (H) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\ln(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \;=\; \{t \mapsto \frac{\lambda}{t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  On applique la méthode de variation de la constante. Autrement dit, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$.

  Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note alors $h : t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$. La fonction h est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} h \text{ est solution de } (E) \;&\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\; t\,h'(t) + h(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\ &\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\; t\left(\frac{\lambda'(t)}{t} - \frac{\lambda(t)}{t^2}\right) + \frac{\lambda(t)}{t} = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\ &\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\; \lambda'(t) - \cancel{\frac{\lambda(t)}{t}} + \cancel{\frac{\lambda(t)}{t}} = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\ &\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\; \lambda'(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2} \end{aligned}$$

  On en déduit que la fonction λ cherchée peut être choisie parmi les primitives de $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{t^2}$.
  La fonction $\lambda : t \mapsto \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t^2}$ convient.

  Ainsi, la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{2t}\,\mathrm{e}^{t^2}$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \frac{1}{2t}\,\mathrm{e}^{t^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad \square$$

Exercice 6

1. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) - \dfrac{y(t)}{t} = t\,\mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Résoudre l'équation différentielle $\big(t^2\,\ln(t)\big)\,y'(t) - t\,y(t) = -\big(1 + \ln(t)\big)$ sur $]0, 1[$.

III. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

III.1. Équation homogène

Proposition 2.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $a \neq 0$.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; 0$$

On note r_1 et r_2 les deux solutions de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (H).

Deux cas se présentent.

(i) *si $r_1 \neq r_2$, alors :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_1\, t} + \lambda_2\, e^{r_2\, t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}}$$

(ii) *si $r_1 = r_2$, alors, en notant r_0 cette valeur commune :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_0\, t} + \lambda_2\, t\, e^{r_0\, t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}}$$

Proposition 3.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que :* $a \neq 0$.

On note (H) *l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; 0$$

Trois cas se présentent.

(i) **Régime apériodique** *: si l'équation caractéristique associée à* (H) *admet* exactement 2 solutions réelles r_1 *et* r_2 *(*$r_1 \neq r_2$*), alors :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_1\, t} + \lambda_2\, e^{r_2\, t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

(ii) **Régime critique** *: si l'équation caractéristique associée à* (H) *admet* exactement 1 solution réelle r_0*, alors :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_0\, t} + \lambda_2\, t\, e^{r_0\, t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

(iii) **Régime pseudo-périodique** *: si l'équation caractéristique associée à* (H) n'admet pas de solution réelle*, alors on note* $r_1 = \alpha + i\beta$ *l'une des deux solutions complexes (et* $r_2 = \overline{r_1}$ *la seconde). On obtient ainsi :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{\alpha\, t}\, \cos(\beta\, t) + \lambda_2\, e^{\alpha\, t}\, \sin(\beta\, t) \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Exercice 7

Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 4\,y' + 4\,y = 0$.

Démonstration.

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène. On détermine donc les solutions de son équation caractéristique $r^2 + 4r + 4 = 0$. On cherche donc les racines du polynôme $Q(X) = X^2 + 4\,X + 4 = (X+2)^2$. L'unique racine de Q est alors :

$$r_0 \;=\; -2$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda_1\, \mathrm{e}^{-2t} + \lambda_2\, t\, \mathrm{e}^{-2t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

□

Exercice 8

Soient ω_0 et Q deux réels strictement positifs.

1. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' + \omega_0^2\, y = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' - \omega_0^2\, y = 0$. Exprimer cet ensemble à l'aide de la fonction exponentielle, puis à l'aide des fonctions de trigonométrie hyperbolique.
3. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + \dfrac{\omega_0}{Q}\, y' + \omega_0^2\, y = 0$.

III.2. Solution particulière

III.2.a) Un premier tableau

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $a \neq 0$. Soit $d \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur I par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; d(t)$$

On note Q le polynôme défini par : $Q(X) = aX^2 + bX + c$.

Si $t \mapsto d(t)$ est de la forme...	et si...	chercher une solution de la forme...
$t \mapsto \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$ constante		$t \mapsto \mu$, $\mu \in \mathbb{K}$ constante
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n	α non racine de Q	$t \mapsto R_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, R_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n	α racine **simple** de Q	$t \mapsto R_n(t)\,t\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, R_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n	α racine double de Q	$t \mapsto R_n(t)\,t^2\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, R_n polynôme de degré n

Exercice 9
Résoudre l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y'' - 4\,y' + 3\,y = (2t+1)\,\mathrm{e}^t$$

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène (H) associée à (E) : $y'' - 4\,y' + 3\,y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. On détermine donc les solutions de son équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$.
  On cherche donc les racines du polynôme $Q(X) = X^2 - 4\,X + 3 = (X-1)\,(X-3)$. Les racines de Q sont alors :

$$r_1 \;=\; 1 \qquad \text{et} \qquad r_2 \;=\; 3$$

  Comme $r_1 \neq r_2$, l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \mid (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  On note :

$$\begin{array}{rcl} h \;:\; \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left(-\dfrac{1}{2}\,t^2 - t\right)\mathrm{e}^t \end{array}$$

  La fonction h est une solution particulière de (E). En effet :
  - × la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$,
  - × pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$h'(t) \;=\; (-t-1)\,\mathrm{e}^t + \left(-\frac{1}{2}\,t^2 - t\right)\mathrm{e}^t \;=\; \left(-\frac{1}{2}\,t^2 - 2t - 1\right)\mathrm{e}^t$$

  De plus :

$$h''(t) \;=\; (-t-2)\,\mathrm{e}^t + \left(-\frac{1}{2}\,t^2 - 2t - 1\right)\mathrm{e}^t \;=\; \left(-\frac{1}{2}\,t^2 - 3t - 3\right)\mathrm{e}^t$$

On obtient :

$$\begin{aligned} & h''(t) - 4\,h'(t) + 3\,h(t) \\ = \; & \left(-\frac{1}{2}\,t^2 - 3t - 3\right)\mathrm{e}^t - 4\left(-\frac{1}{2}\,t^2 - 2t - 1\right)\mathrm{e}^t + 3\left(-\frac{1}{2}\,t^2 - t\right)\mathrm{e}^t \\ = \; & 0 \times \mathrm{e}^t \;=\; 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\left\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} - \left(\frac{1}{2}\,t^2 + t\right)\mathrm{e}^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Commentaire

- Comme pour l'ordre 1, il suffit d'exhiber une solution particulière de (E). On effectue la recherche d'une solution particulière h au brouillon. On rédigera sur la copie seulement la démonstration que h est bien solution de (E).
- Détaillons l'obtention de la fonction h.
  Comme le second membre de (E) est $t \mapsto (2t+1)\,\mathrm{e}^t$ et que 1 est racine simple de Q, on cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto (a\,t + b)\,t\,\mathrm{e}^t$.
  Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note alors $h : t \mapsto (at^2 + bt)\,\mathrm{e}^t$. La fonction h est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h'(t) &= (2at + b)\,\mathrm{e}^t + (at^2 + bt)\,\mathrm{e}^t \\ &= \big(at^2 + (2a+b)t + b\big)\,\mathrm{e}^t \\ h''(t) &= \big(2at + 2a + b\big)\,\mathrm{e}^t + \big(at^2 + (2a+b)t + b\big)\,\mathrm{e}^t \\ &= \big(at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b\big)\,\mathrm{e}^t \end{aligned}$$

Commentaire

On obtient :

$$\begin{aligned} & h \text{ solution de } (E) \\ \iff \; & \forall t \in \mathbb{R},\quad h''(t) - 4\,h'(t) + 3\,h(t) = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\ \iff \; & \forall t \in \mathbb{R},\quad \big(at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b\big)\,\mathrm{e}^t \\ & \qquad -4\,\big(at^2 + (2a+b)t + b\big)\,\mathrm{e}^t \\ & \qquad +3\,(at^2 + bt)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\ \iff \; & \forall t \in \mathbb{R},\quad \big(-4at + 2a - 2b\big)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\ \iff \; & \forall t \in \mathbb{R},\quad -4at + 2a - 2b = 2t + 1 \qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ e^t \neq 0\textit{)} \\ \iff \; & \left\{\begin{array}{rcrcr} -4a & & & = & 2 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array}\right. \\ \iff \; & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & 1 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array}\right. \\ \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \; & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & -1 \\ & - & 2b & = & 2 \end{array}\right. \\ \iff \; & \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & -\dfrac{1}{2} \\ & & b & = & -1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

La fonction $h : t \mapsto \left(-\frac{1}{2}\,t^2 - t\right)\mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E).

□

III.2.b) Solution particulière quand le 2nd membre est de la forme $t \mapsto A\cos(\omega t)$ ou $t \mapsto A\sin(\omega t)$

MÉTHODO **Solution particulière quand** $d : t \mapsto A\cos(\omega t)$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Soit $(A, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy \;=\; A\cos(\omega t) \qquad (E)$$

1) On cherche une solution particulière **complexe** g de l'EDL :

$$ay'' + by' + cy \;=\; A\,\mathrm{e}^{i\omega x}$$

Pour cela, on utilise le tableau précédent.

2) On en déduit que la fonction $\mathrm{Re}\,(g)$ est une solution particulière de (E).

On procède de même pour des seconds membres du type $t \mapsto P_n(t)\cos(\omega t)$.

MÉTHODO **Solution particulière quand** $d : t \mapsto A\sin(\omega t)$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Soit $(A, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy \;=\; A\sin(\omega t) \qquad (E)$$

1) On cherche une solution particulière **complexe** g de l'EDL :

$$ay'' + by' + cy \;=\; A\,\mathrm{e}^{i\omega x}$$

Pour cela, on utilise le tableau précédent.

2) On en déduit que la fonction $\mathrm{Im}\,(g)$ est une solution particulière de (E).

On procède de même pour des seconds membres du type $t \mapsto P_n(t)\sin(\omega t)$.

Exercice 10

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y'' + y' + y = \mathrm{e}^x\cos(x)$ *2.* $y'' + y = t\sin(t)$.