Trigonométrie

I. Angles remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

II. Propriétés élémentaires

- Les fonction sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.
  La fonction tan est définie sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ et π-périodique sur son ensemble de définition.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on connaît toutes les identités qui suivent, que l'on retrouve facilement *en dessinant simplement un cercle trigonométrique.*

$$
\begin{aligned}
\cos(-x) &= \cos(x) & \sin(-x) &= -\sin(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= -\sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= \cos(x) \\
\cos(\pi-x) &= -\cos(x) & \sin(\pi-x) &= \sin(x) \\
\cos(\pi+x) &= -\cos(x) & \sin(\pi+x) &= -\sin(x)
\end{aligned}
$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\sin(x) \neq 0$ et $\cos(x) \neq 0$, on a de plus :

$$
\begin{aligned}
\tan(-x) &= -\tan(x) & & \\
\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \frac{1}{\tan(x)} & \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= -\frac{1}{\tan(x)}
\end{aligned}
$$

III. Formulaire de trigonométrie

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que les quantités suivantes soient bien définies.

III.1. Formules de base

$$\cos(a+b) = \cos(a)\,\cos(b) - \sin(a)\,\sin(b) \qquad \cos(a-b) = \cos(a)\,\cos(b) + \sin(a)\,\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\,\cos(b) + \sin(b)\,\cos(a) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\,\cos(b) - \sin(b)\,\cos(a)$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\,\tan(b)} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\,\tan(b)}$$

III.2. Formules à reconnaître en toutes circonstances

$$\cos^2(a)+\sin^2(a) = 1$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a)-\sin^2(a) = 2\,\cos^2(a)-1 = 1-2\,\sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2\,\sin(a)\,\cos(a)$$

$$\tan(2a) = \frac{2\,\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

III.3. Formules que l'on peut passer deux minutes à retrouver

$$\cos(a)\,\cos(b) = \frac{1}{2}\,\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)$$

$$\sin(a)\,\sin(b) = \frac{1}{2}\,\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$$

$$\sin(a)\,\cos(b) = \frac{1}{2}\,\big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\big)$$

$$\cos(a)+\cos(b) = 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin(a)+\sin(b) = 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a)-\cos(b) = -2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin(a)-\sin(b) = 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

III.4. Expression de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On note $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\cos(x) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin(x) = \frac{2\,\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\,t}{1+t^2}$$