Fiche Dérivation

I. Formules de dérivations

I.1. Multiplication par un scalaire, somme, produit, inverse, quotient

Soient f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Les égalités suivantes sont vérifiées sur tout ensemble E où les fonctions f et g sont dérivables.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (\lambda\, f)' & = & \lambda\, f' \\ (f+g)' & = & f' + g' \\ (f \times g)' & = & f'\, g + f\, g' \\ (f^n)' & = & n\, f'\, f^{n-1} \\ \left(\dfrac{1}{g}\right)' & = & \dfrac{-g'}{g^2} \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)' & = & \dfrac{f'\, g - f\, g'}{g^2} \end{array}}$$

Pour les règles de dérivation de l'inverse et du quotient, il faut ici veiller à se placer sur un ensemble E sur lequel g ne s'annule pas.

I.2. Composition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Supposons que :

- la fonction u :
  - × est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
  - × telle que : $f(I) \subset J$,
- la fonction g est dérivable sur J.

Alors l'égalité suivante est vérifiée sur l'intervalle I : $\boxed{(g \circ f)' \ = \ f' \times (g' \circ f)}$

En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour toute fonction f :
× dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
× à valeurs strictement positives.

Alors l'égalité suivante est vérifiée sur l'intervalle I : $\boxed{(f^{\alpha})' \ = \ \alpha\, f'\, f^{\alpha-1}}$

I.3. Réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons que la fonction f est :
× bijective d'un intervalle I dans un intervalle J,
× dérivable sur I,
× telle que : $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$.

Alors f^{-1} est dérivable sur J et l'égalité suivante est vérifiée sur l'intervalle J : $\boxed{(f^{-1})' \ = \ \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$

II. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Tout intervalle I tel que :	La dérivée
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto n\, x^{n-1}$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$)	$I \subset \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \alpha\, x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \ln(x)$	$I \subset \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$
$x \mapsto \beta^x$ (avec $\beta \in \mathbb{R}_+^*$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \ln(\beta)\, \beta^x$
$x \mapsto \sin(x)$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$x \mapsto \arcsin(x)$	$I \subset \,]-1, 1[$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \mapsto \arccos(x)$	$I \subset \,]-1, 1[$	$x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \mapsto \arctan(x)$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$

Il ne faut pas confondre x^α (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) et β^x (avec $\beta > 0$) :

- pour tout $x > 0$: $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\beta^x = \mathrm{e}^{x \ln(\beta)}$.