CH XIV : Espaces vectoriels

I. Structure vectorielle

I.1. Définition

Définition
Soit E un ensemble non vide.

- Une **loi de composition interne** $\top$ sur l'ensemble E est une application $\top : E \times E \to E$. Autrement dit : $\forall (x,y) \in E^2,\ x \top y \in E$.
- Une **loi de composition externe** $*$ sur l'ensemble E est une application $* : \mathbb{K} \times E \to E$. Autrement dit : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ \lambda * x \in E$.

Exemple
Notons $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Cet ensemble possède une loi de composition interne (que l'on a noté $+$) :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Cet ensemble possède une loi de composition interne (que l'on a noté $\cdot$) :

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Définition
Un ensemble non vide E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel, si :

1) E est muni d'une loi $+$ qui vérifie les propriétés suivantes.

- ***a)*** $+$ est une loi de composition interne
- ***b)*** $\forall (x,y) \in E^2,\ x + y = y + x$ *(commutativité)*
- ***c)*** $\forall (x,y,z) \in E^2,\ x + (y + z) = (x + y) + z$ *(associativité)*
- ***d)*** $\exists\ 0_E \in E$ tel que : $\forall x \in E,\ x + 0_E = 0_E + x = x$ *(élément neutre)*
- ***e)*** $\forall x \in E, \exists y \in E,\ x + y = y + x = 0_E$ *(y opposé de x)*

2) E est muni d'une loi $\cdot$ qui vérifie les propriétés suivantes.

- ***a)*** $\cdot$ est une loi de composition externe
- ***b)*** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in E^2, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- ***c)*** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in E^2, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- ***d)*** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \quad (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
- ***e)*** $\forall x \in E, \quad 1 \cdot x = x$

Vocabulaire Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

× les éléments de E sont appelés **vecteurs**.

× on parle parfois de **multiplication par un scalaire** pour désigner la loi $\cdot$ *(les réels λ participant à la multiplication externe sont appelés des* **scalaires***)*

Espaces vectoriels de référence :

$\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(D, \mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont des espaces vectoriels.

Exemple

- Les ensembles $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$, $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{R}^4 = \{(x,y,z,t) \mid (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\}$ sont des premiers exemples d'espaces vectoriels. Plus généralement $\mathbb{R}^n$ pour $n \geqslant 1$ est un espace vectoriel : ces éléments, les n-uplets sont appelés vecteurs. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est le n-uplet de 0.
- Plus généralement, pour tout $m, n \geqslant 1$, l'ensemble $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle $0_{m,n}$. On pourrait (**mais on ne le fera pas !**) identifier l'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes de taille n avec l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des vecteurs de taille n. On parlera de vecteurs colonnes pour $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et de vecteurs lignes pour $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \simeq \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

- On verra plus tard d'autres exemples plus exotiques : l'ensemble des polynômes de degré n, l'ensemble des fonctions continues, l'ensemble des suites qui convergent vers 0...

Remarque

- L'ordre des éléments dans la multiplication externe est important :

$$\cancel{x \cdot \lambda} \qquad \lambda \cdot x \checkmark$$

- La définition d'ev ne fait pas apparaître de loi permettant la multiplication de vecteurs. On ne peut donc, a priori, multiplier deux vecteurs entre eux.

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}}$$

Proposition 1.
Soit E un espace vectoriel.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $x \in E$.

a) $\lambda \cdot 0_E = 0_E$

b) $0 \cdot x = 0_E$

c) $\lambda \cdot (-x) = (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$

d) $\lambda \cdot x = 0_E \;\Rightarrow\; \lambda = 0$ `OU` $x = 0_E$

Démonstration.

a) $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$. On ajoute alors u l'opposé de $\lambda 0_E$ de part et d'autre de l'égalité :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot 0_E + u &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E + u \\ 0_E &= \lambda \cdot 0_E + 0_E = \lambda \cdot 0_E \end{aligned}$$

b) De même, on remarque $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ et on ajoute l'opposé de $0 \cdot x$ de chaque côté.

c) $0_E = \lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (x + (-x)) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot (-x)$ et on ajoute l'opposé de $\lambda \cdot x$ de chaque côté.
De même, $0 = O \cdot x = (\lambda + (-\lambda)) \cdot x = \lambda x + (-\lambda)x$.

d) Supposons $\lambda \cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0$. On aura alors : $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$ d'où $1 \cdot x = 0_E$ et $x = 0_E$. □

Illustration sur un exemple.
Pour comprendre plus facilement ce que représentent ces propriétés, traduisons-les sur l'exemple simple de $E = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Notons tout d'abord que : $0_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\lambda \cdot \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = (-\lambda) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$

d) $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$ OU $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une **famille** de vecteurs de E.

- Un vecteur $v \in E$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \dots, u_m$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que

$$\boxed{v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m}$$

Exercice 1
L'ensemble des fonctions positives réelles muni des lois $+$ et $\cdot$ habituelles sur les fonctions est-il un espace vectoriel ?

II. Sous-espaces vectoriels

II.1. Définition

Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des lois $+$ et $\cdot$
Une partie <u>non vide</u> F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si :

a) $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$ *(F est stable pour la loi +)*

b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$ *(F est stable pour la loi ·)*

(F est stable par combinaison linéaire d'éléments de F)

Propriété
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\boxed{F \text{ est un sev de } E \quad \Rightarrow \quad 0_E \in F}$$

Remarque
On utilisera particulièrement la contraposée de cette propriété.

$$\boxed{0_E \notin F \quad \Rightarrow \quad F \text{ n'est pas un sev de } E}$$

Notons $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x + y + z = 1\}$.

Alors F n'est pas un sev de E. En effet, $0_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F$.

Proposition 2 (Caractérisation des sev de E).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

F est un sous-espace vectoriel de E :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ F \subset E \\ \bullet\ F \neq \varnothing \\ \bullet\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (u_1, u_2) \in F^2, \quad \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in F \\ \textit{(F est stable par combinaison linéaire)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ F \subset E \\ \bullet\ F \neq \varnothing \\ \bullet\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u, v) \in F^2, \quad \lambda \cdot u + v \in F \end{cases}$$

Démonstration.

1) On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(u_1, u_2) \in F^2$. Comme F est stable par la loi $\cdot$, on a $\lambda_1 \cdot u_1 \in F$ et $\lambda_2 \cdot u_2 \in F$. Comme F est stable par la loi $+$, on a $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in F$.

($\Leftarrow$) La propriété étant vraie pour tout couple (λ_1, λ_2) elle l'est pour $\lambda = \lambda_2 = 1$, ce qui montre la stabilité de F par la loi $+$. En prenant seulement $\lambda_2 = 0$, on prouve que F est stable pour la loi $\cdot$ □

2) Démonstration similaire.

Proposition 3.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\boxed{F \text{ sous-espace vectoriel de } E \quad \Rightarrow \quad F \text{ est un espace vectoriel}}$$

Démonstration.
$+$ est une loi de composition interne pour F (par stabilité).
$\cdot$ est une loi de composition externe pour F (par stabilité).
De plus, ces deux lois vérifient les axiomes des espaces vectoriels puisqu'elles font déjà de E un espace vectoriel. □

Exemple

- Si E est un ev, $\{0_E\}$ et E sont des sev de E.
- L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *(pour le démontrer : montrer que tous les axiomes sont vérifiés)*.
  L'ensemble des fonctions réelles bornées / polynômes / paires sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et sont donc eux-mêmes des espaces vectoriels.

Remarque

- Les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ sont $\{0_{2,1}\}$, $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et toutes les droites qui passent par 0.
- Les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont $\{0_{3,1}\}$, $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, toutes les droites qui passent par 0 et tous les plans qui passent par 0.

Proposition 4.
Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sev de E.
Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel.

Démonstration.
À faire.

□

⚠ L'union de deux espaces vectoriels n'est pas (en général) un espace vectoriel !

`MÉTHODO` **Démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel**

Afin de montrer que F est un espace vectoriel, il existe plusieurs possibilités.

1) Vérifier tous les axiomes d'espace vectoriel.
(en pratique, on ne le fait jamais - on estime que cela a été fait pour les ev de référence)

2) Démontrer que F est un sous-espace vectorie d'un $\mathbb{K}$-espace vectorier E de référence.

`Démontrons que` F `est un sous-espace vectoriel de` E.

(i) $F \subseteq E$

(ii) $F \neq \varnothing$. `En effet,` $0_E \in F$ `car ...`
(si ce n'est pas le cas, F n'est pas un sev de E !)

(iii) `Démontrons que` F `est stable par combinaisons linéaires.`
`Soit` $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
`Soit` $(u, v) \in F^2$.
`Il s'agit de démontrer :` $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.
`Tout d'abord :` $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \ldots$
(on réalise la somme des vecteurs $\lambda \cdot u$ et $\mu \cdot v$ à l'aide de la loi $+$ définie sur E)
`Or :` ...
(on vérifie que $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ vérifie la propriété définissant F)
`Et ainsi` $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Le point (*iii*) peut être démontré en deux temps : (*iii*) stabilité de F par la loi $+$
et (*iv*) stabilité de F par la loi $\cdot$

(iii) `Démontrons que` F `est stable par la loi` $+$.

`Soit` $(u, v) \in F^2$.

`Il s'agit de démontrer :` $u + v \in F$.

`Tout d'abord :` $u + v = \ldots$
(on réalise la somme des vecteurs u et v à l'aide de la loi $+$ définie sur E)

`Or :` $\ldots$*(on vérifie que $u + v$ vérifie la propriété définissant F)*

`Et ainsi` $u + v \in F$.

(iv) `Démontrons que` F `est stable par la loi` $\cdot$

`Soit` $\lambda \in \mathbb{K}$ `et soit` $u \in F$.

`Il s'agit de démontrer :` $\lambda \cdot u \in F$.

`Tout d'abord :` $\lambda \cdot u = \ldots$

`Or :` $\ldots$*(on vérifie que $\lambda \cdot u$ vérifie la propriété définissant F)*

`Et ainsi` $\lambda \cdot u \in F$.

Remarque
Dans la rédaction, il est (très) souvent utile de rappeler que u et v sont des éléments de E qui vérifient la propriété d'appartenance à F :

- `Comme` $u \in F$, u `s'écrit ... et vérifie ...`
  (l'appartenance de u à E lui confère une écriture particulière l'appartenance de u à F fait que u vérifie les propriétés définissant F)
- `Comme` $v \in F$, v `s'écrit ... et vérifie ...`

Illustration sur un exemple (fondamental !)

Montrons que l'ensemble $F = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x + y + z = 0\}$ est un espace vectoriel.

- Tout d'abord : $F \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par définition de F.
- Ensuite : $F \neq \varnothing$. En effet : $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in F$, car $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $0+0+0 = 0$.
- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(u_1, u_2) \in F^2$.
  Démontrons : $w = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in F$.

  Comme $u_1 \in F$, alors il existe $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et : $x_1 + y_1 + z_1 = 0$.

  De même, comme $u_2 \in F$, il existe $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et : $x_2 + y_2 + z_2 = 0$.
  On remarque :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \;=\; \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda 2 z_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

  On obtient :

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\ = \;& \lambda_1 (x_1 + y_1 + z_1) + \lambda_2 (x_2 + y_2 + z_2) \\ = \;& 0 \qquad \textit{(car } (u_1, u_2) \in F^2\textit{)} \end{aligned}$$

  Donc $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in F$.

Exercice 2

Démontrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1. l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. l'ensemble $F = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$.

3. l'ensemble $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \mid \forall x \in \mathbb{K}, f'(x) = f(x)\}$.

4. l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 2\,P(1)\}$.

II.2. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

II.2.a) Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit A une partie <u>non vide</u> de E ($A \subseteq E$).

- On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** A et on note $\mathrm{Vect}\,(A)$ l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme combinaison linéaire d'éléments de A. Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{Vect}\,(A) = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot a_i \mid p \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, (a_1, \ldots, a_p) \in A^p\}}$$

- En particulier, si $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ (c'est-à-dire A fini), on a :

$$\boxed{\mathrm{Vect}\,(A) = \mathrm{Vect}\,(a_1, \ldots, a_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot a_i \quad \middle| \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m \right\}}$$

(on note $\mathrm{Vect}\,(a_1, \ldots, a_m)$ *en lieu et place de* $\mathrm{Vect}\,(\{a_1, \ldots, a_m\})$*)*

On suppose seulement que A est une partie non vide de E.
En aucun cas on ne suppose que A est un espace vectoriel.
$\mathrm{Vect}\,(A)$ est le « vectorialisé » de A. Partant d'une partie A, on lui ajoute tous les éléments lui permettant d'obtenir une structure vectorielle :

× pour tout $a \in A$, on ajoute tous les $\lambda \cdot a$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$,

× une fois ces ajouts effectués, on ajoute toutes les sommes finies d'éléments de cette nouvelle partie.

En résumé, partant de A, on ajoute toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A. On construit ainsi un espace vectoriel : c'est $\mathrm{Vect}\,(A)$.

II.2.b) Les espaces vectoriels engendrés par une partie sont des espaces vectoriels

Théorème 1.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient A et B deux parties <u>non vides</u> de E ($A \subseteq E$ et $B \subseteq E$).

1) $0_E \in \text{Vect}(A)$.

2) $A \subseteq \text{Vect}(A)$.

3) $\boxed{\text{Vect}(A) \textit{ est un espace vectoriel.}}$

$\text{Vect}(A)$ *est même le plus petit sev de E contenant A :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ F \textit{ sev de } E \\ \bullet\ F \supseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F \supseteq \text{Vect}(A)}$$

4) $\boxed{A \textit{ est un ev} \Leftrightarrow A = \text{Vect}(A)}$

5) *On a notamment :* $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.

6) $A \subseteq B \Rightarrow \text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$.

MÉTHODO **Démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel**

Afin de montrer que F est un ev, il suffit de l'écrire sous la forme $\text{Vect}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs.
Illustrons cette méthode sur deux exemples.

1) Démontrer que $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid 3x + 2y - z = 0\right\}$ est un ev.

2) Démontrer que $\left\{\begin{pmatrix} b & a & b+c \\ a & b & a \\ b+c & a & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\right\}$ est un ev.

II.2.c) Propriétés de manipulations

Théorème 2.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(a,b,c) \in E^3$.

1) $\boxed{\text{Vect}(a, 0_E) = \text{Vect}(a)}$

(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant 0_E à cette partie)

2) $\boxed{\text{Vect}(a,b) = \text{Vect}(b,a)}$

(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en modifiant l'ordre des termes de la partie)

3) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$:* $\boxed{\text{Vect}(\lambda \cdot a, b) = \text{Vect}(a,b)}$

(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie par multiplication par un scalaire non nul d'un élément de cette partie)

4) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$:*

$$\boxed{\text{Vect}(a, b, \lambda \cdot a + \mu \cdot b) = \text{Vect}(a,b)}$$

(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à cette partie un vecteur qui apparaît comme CL d'éléments de cette partie)

5) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$:*

$$\boxed{\text{Vect}(a, b, c + (\lambda \cdot a + \mu \cdot b)) = \text{Vect}(a,b,c)}$$

(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à un vecteur de cette partie une CL des autres vecteurs de cette partie)

III. Familles finies de vecteurs

III.1. Familles génératrices d'un espace vectoriel

III.1.a) Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

- La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est dite **génératrice de** E si :

$$E = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$$

Autrement dit, si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(e_1, \ldots, e_p)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}(e_1, \ldots, e_p) \in E^p \\ \text{est une famille} \\ \text{génératrice de } E\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i}$$

- Si $E = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$, on dit que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ **engendre** E.

Remarque

- Par définition, une famille génératrice $(e_1, \ldots, e_p)$ de E est forcément constituée de vecteurs de E. Il en résulte que l'inclusion : $E \supset \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$ est forcément vérifiée.
- Une famille $\mathcal{F}$ est toujours génératrice de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ qu'elle engendre. Ainsi dire « la famille $\mathcal{F}$ est génératrice » (sans préciser l'espace engendré) n'a pas beaucoup d'intérêt.

⚠ Lorsqu'on parle d'une famille génératrice d'un espace vectoriel E, il faut systématiquement préciser l'ensemble E engendré sans quoi ce qui est écrit n'a pas de sens.

III.1.b) Une sur-famille d'une famille génératrice de E est génératrice de E

Théorème 3.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

Soit $v \in E$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{La famille } (e_1, \ldots, e_p) \textit{ est} \\ \textit{génératrice de } E\end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}\textit{La famille } (e_1, \ldots, e_p, v) \\ \textit{est génératrice de } E\end{array}}$$

Plus généralement, toute sur-famille (constituée de vecteurs de E) d'une famille génératrice de E (c'est-à-dire toute famille contenant une famille génératrice de E), est une famille génératrice de E.

III.2. Familles libres d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

III.2.a) Notion de dépendance linéaire

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_1, \ldots, u_m)$ une **famille** de vecteurs de E.

- On dit qu'il existe une **relation de dépendance linéaire** entre $(u_1, \ldots, u_m)$ s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_m \cdot u_m = 0_E$$

- Cette relation est dite **triviale** si tous les scalaires λ_1, …, λ_m sont nuls.

III.2.b) Notion de famille libre et propriétés immédiates

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \dots, e_m)$ une famille de vecteurs de E.

- La famille $(e_1, \dots, e_m)$ est **libre** (dans E) si la seule relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_m)$ est la relation triviale.

  Autrement dit, $(e_1, \dots, e_m)$ est libre si :

  $$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m, \quad \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \right)$$

  Si la famille $(e_1, \dots, e_m)$ est libre, on dit que les vecteurs e_1, ..., e_m sont **linéairement indépendants**.

- Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.
  Cela signifie qu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_m)$.
  Ainsi, la famille $(e_1, \dots, e_m)$ est dite **liée** (dans E) si :

  $$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0_E \right) \quad \texttt{ET} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \cdots, 0)$$

Théorème 4.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soient e_1, ..., e_m, e_{m+1}, u des vecteurs de E.

a) *La famille $(e_1, \dots, e_m)$ est liée* $\Leftrightarrow$ *L'un des vecteurs de la famille s'exprime comme CL des autres vecteurs de la famille*

b) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ (e_1, \dots, e_m) \text{ libre} \\ \bullet\ (e_1, \dots, e_m, u) \text{ liée} \end{array}\right\} \Rightarrow$ *Le vecteur u s'exprime comme CL des vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_m)$*

c) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ (e_1, \dots, e_m) \text{ libre} \\ \bullet\ \text{Le vecteur } e_{m+1} \text{ ne s'exprime pas comme CL des vecteurs de } (e_1, \dots, e_m) \end{array}\right\} \Rightarrow$ *La famille $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1})$ est libre*

MÉTHODO **Démontrer qu'une famille est libre/liée**

Pour démontrer qu'une famille $(e_1, \dots, e_m)$ est libre, on suit la définition pour obtenir la rédaction suivante.

`Soit` $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K^m$.
`Supposons :`

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_m \cdot e_m \ = \ 0_E \qquad (*)$$

`Alors` ...*(raisonnement par implication qui peut faire intervenir une résolution de système (par équivalence))* ...
`Ainsi :` $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.
`La famille` $(e_1, \dots, e_m)$ `est donc libre.`

III.2.c) Démontrer qu'une famille de polynômes est libre

Exemple *(Démontrer qu'une famille de polynômes est libre)*
Notons (Q_0, Q_1, Q_2) la famille de polynômes définie par :

$$Q_0(X) = (X-1)(X-3), \quad Q_1(X) = (X-1)(X-2) \quad \text{et} \quad Q_2(X) = (X-2)(X-3)$$

- 1ère méthode *(fonctionne indépendamment de la forme des polynômes)*
  Démontrons que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.
  Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_0 \cdot Q_0 + \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ $(*)$. Or :

$$\begin{array}{ll}
 & (*) \\
\iff & \lambda_0\,(X-1)(X-3) + \lambda_1\,(X-1)(X-2) + \lambda_2\,(X-2)(X-3) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
\iff & \lambda_0\left(X^2-4X+3\right) + \lambda_1\left(X^2-3X+2\right) + \lambda_2\left(X^2-5X+6\right) \;=\; 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
\iff & (\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)\;X^2 + (-4\,\lambda_0 - 3\,\lambda_1 - 5\lambda_2)\;X + (3\,\lambda_0 + 2\,\lambda_1 + 6\,\lambda_2) \;=\; 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ -4\,\lambda_0 & - & 3\,\lambda_1 & - & 5\,\lambda_2 & = & 0 \\ 3\,\lambda_0 & + & 2\,\lambda_1 & + & 6\,\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\
\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 4\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3\,L_1}}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 0 \\ & - & \lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\
\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 0 \\ & & & & 2\,\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff & \{\ \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\
 & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

  On en conclut que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.

- 2ème méthode *(qui exploite la forme des polynômes de la famille concernée)*
  Démontrons que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.
  Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_0 \cdot Q_0 + \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ $(*)$. Or :

$$\begin{array}{ll}
 & (*) \\
\Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_0\,Q_0(x) + \lambda_1\,Q_1(x) + \lambda_2\,Q_2(x) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}(x) \\
\Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_0\,(x-1)(x-3) + \lambda_1\,(x-1)(x-2) + \lambda_2\,(x-2)(x-3) = 0
\end{array}$$

  Cette dernière propriété est notamment vérifiée :
  - × en $x = 1$. On en conclut : $2\,\lambda_2 = 0$ et ainsi : $\lambda_2 = 0$.
  - × en $x = 2$. On en conclut : $-\,\lambda_0 = 0$ et ainsi : $\lambda_0 = 0$.
  - × en $x = 3$. On en conclut : $2\,\lambda_1 = 0$ et ainsi : $\lambda_1 = 0$.

  Finalement : $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
  On en conclut que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.

Quelle est la bonne méthode ?

- Comme première réponse, on peut mettre en avant que la bonne méthode est celle que l'on maîtrise. Attention cependant : il est évident qu'il est nécessaire de connaître la méthode la plus générale car une méthode particulière, par définition, ne peut être utilisée dans tous les cas.
- La 1ère méthode exposée ici exploite le fait que le seul polynôme nul ... est le polynôme nul !
  Le polynôme nul est celui dont tous les coefficients sont nuls. Comme $(*)$ stipule que le polynôme $\lambda_0 \cdot Q_0 + \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2$ est nul, on peut en conclure que ses coeffcients sont nuls. Obtenir ses coefficients, c'est décomposer ce polynôme suivant la base canonique $(1, X, X^2)$. C'est ce qui est présenté en 3ème équivalence et qui permet d'obtenir le système présent en 4ème équivalence.

- La $2^{\text{ème}}$ méthode exploite le lien entre polynôme et fonction polynomiale. En particulier, un polynôme est nul si la fonction polynomiale associée est nulle en tout point (c'est la première équivalence de la $2^{\text{ème}}$ méthode). Si une fonction est nulle en tout point alors, en l'évaluant en certains points, on obtient des propriétés que l'on peut exploiter.

Il est à noter que la propriété de liberté d'une famille se présente, après la quantification, sous forme d'une implication :

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\mathbb{K}^m,\quad \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot e_i=0_E \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\dots=\lambda_m=0\right)$$

Il est donc possible de raisonner par implication pour démontrer que le m-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ est nul. On peut cependant faire les remarques suivantes :

× un système linéaire se résout toujours par équivalence (on applique l'algorithme du pivot de Gauss).

× il est classique de raisonner par implication pour la liberté d'une famille de fonctions. C'est d'ailleurs ce qu'on fait dans la $2^{\text{ème}}$ méthode : si la fonction est identiquement nulle alors, en particulier, elle est nulle aux points 1, 2 et 3.

× en réalité, l'implication réciproque est toujours vérifiée. En effet, si le m-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ est nul alors on a évidemment $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot e_i=0_E$. Ainsi, si on parvient à démontrer que le m-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ est nul, alors on a bien établi une équivalence.

Définition
Une famille de polynômes est dite **échelonnée en degré** si elle est constituée de polynômes de degrés tous différents.

Remarque
Il est possible (et même fréquent dans les exercices) que les polynômes des familles échelonnées en degré apparaissent par ordre croissant des degrés mais il n'est pas nécessaire que ce soit le cas.

Propriété
Toute famille de polynômes non nuls, échelonnée en degré est libre.

Démonstration.
À faire. □

⚠ Attention à ne pas oublier l'hypothèse de non nullité des polynômes de la famille. Rappelons que toute famille qui contient le polynôme (ou vecteur) nul est liée.

III.2.d) Une sous-famille d'une famille libre est une famille libre

Théorème 5.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Soit $(e_1, \cdots, e_m)$ une famille de vecteurs de E.

La famille $(e_1, \ldots, e_m)$ est libre $\Rightarrow$ La famille $(e_1, \cdots, e_{m-1})$ est libre

Plus généralement, toute sous-famille d'une famille libre (c'est-à-dire toute famille contenue dans une famille libre), est une famille libre.

III.2.e) Notion de colinéarité

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(u, v) \in E^2$.

Les vecteurs u et v sont **colinéaires** si :

$$(\exists \alpha \in \mathbb{K},\ v = \alpha \cdot u) \ \texttt{OU}\ (\exists \beta \in \mathbb{K},\ u = \beta \cdot v)$$

Théorème 6.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Une famille (u) constituée uniquement d'un vecteur non nul de E est libre. (la famille (0_E) est liée)

2) Une famille (u, v) constituée de deux vecteurs de E est libre si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.

3) Lorsque l'on considère une famille constituée de 3 vecteurs ou plus, la démonstration de la liberté se fait en revenant à la définition.

Exercice

1. *a)* La famille $\big((1,2,1)\big)$ est-elle libre ?

b) La famille $\big((1,2,1),(1,1,2)\big)$ est-elle libre ?

c) La famille $\big((1,2,1),(1,1,2),(2,1,1)\big)$ est-elle libre ?

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{n\,x}$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.

À RETENIR

- Pour étudier la liberté d'une famille $(e_1, \ldots, e_m)$, on suppose qu'il existe une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de cette famille :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i = 0_E$$

- Dans le cas où les vecteurs de la famille $(e_1, \ldots, e_m)$ sont des éléments de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, cette égalité est équivalente à l'écriture d'un système d'équations linéaires homogène en les variables λ_1, ..., λ_m. Deux cas se présentent alors :

  1) ce système est de Cramer et donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = (0, \ldots, 0)$.
  Cela démontre que la relation de dépendance linéaire supposée en début d'énoncé est la relation triviale.

  2) ce système n'est pas de Cramer (il admet alors une infinité de solutions).
  Ainsi, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0)$ solution du système et on peut ainsi exhiber une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs de la famille $(e_1, \ldots, e_m)$.

- Dans le cas où on étudie une famille d'éléments de $\mathcal{F}(I, K)$ (ensemble des fonctions des I (intervalle réel non vide) dans $\mathbb{K}$), on pourra utiliser des propriétés spécifiques aux fonctions (notamment évaluation en un point, calcul de limites en l'infini, dérivation) pour générer des équations permettant de conclure quant au caractère nul de l'un ou l'autre des scalaires.

III.2.f) Intérêt des familles libres

Théorème 7.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une famille **libre** *de vecteurs de E.*

Si un vecteur $u \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de $(e_1, \ldots, e_m)$ alors cette combinaison linéaire est unique.

Démonstration.
On procède par par l'absurde.
Suppposons que u s'écrive à l'aide de deux combinaisons linéaires distinctes de $(e_1, \ldots, e_m)$. Autrement dit, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{K}^m$ deux m-uplets distincts tels que :

× $u = \lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_m \cdot e_m$

× $u = \mu_1 \cdot e_1 + \ldots + \mu_m \cdot e_m$

Par soustraction, on obtient :

$$0_E = (\lambda_1 - \mu_1) \cdot e_1 + \ldots + (\lambda_m - \mu_m) \cdot e_m$$

Comme $(e_1, \ldots, e_m)$ est une famille libre, cette relation de dépendance linéaire est la relation triviale.
Autrement dit, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$ *i.e.* $\lambda_i = \mu_i$.
Ceci contredit l'hypothèse initiale. □

III.3. Bases d'un espace vectoriel

III.3.a) Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

- La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si :
  1) c'est une famille génératrice de E.
  2) c'est une famille libre dans E.
- Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, tout vecteur $x \in E$ se décompose de **manière unique** sous forme d'une CL des éléments de $\mathscr{B}$.
- Autrement dit :

$$\boxed{\begin{array}{c}(e_1, \ldots, e_n)\\ \text{est une}\\ \text{base de } E\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E,\ \exists\,!\,(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i}$$

- Les réels $(x_1, \ldots, x_n)$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et (P_0, P_1, P_2) la famille de polynômes définie par :

× $P_0(X) = 1$,

× $P_1(X) = X$,

× $P_2(X) = X^2$.

Rappelons que la famille (P_0, P_1, P_2) est une base (c'est la base canonique) de E *(profitons-en pour rappeler que toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est une famille libre).*

1. On note $(Q_0, Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}_2[X])^3$ la famille constituée des polynômes :

× $Q_0(X) = (X-1)(X-3)$,

× $Q_0(X) = (X-1)(X-2)$,

× $Q_2(X) = (X-2)(X-3)$.

Démontrer que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

III.3.b) Notion de base canonique

On a vu précédemment que la famille $((1,1),(2,1))$ est une base de $\mathbb{K}^2$. Cette base n'est pas unique. Par exemple, la famille $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{K}^2$. Cette base naturelle de $\mathbb{K}^2$ est appelée base canonique de $\mathbb{K}^2$.
Les espaces vectoriels de référence sont munis d'une base canonique.

- **L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$**

  Considérons la famille $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, définie par :

$$e_1 = (1,0,0,\dots,0),\ e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,0,1)$$

  Cette famille est libre et génératrice de $\mathbb{K}^n$. C'est donc une base de $\mathbb{K}^n$.
  Ainsi, pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^n$, il exsite $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$$

  où $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}_c$.
  Attention à ne pas confondre le vecteur x qui est un élément de E et ses coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui est un élément de $\mathbb{K}^n$.

- **L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$**

  Considérons la famille $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, définie par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Cette famille est libre et génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Ainsi, pour tout $x \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il exsite $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$$

  où $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}_c$.

- **L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**

  Considérons la famille $\mathscr{B}_c = (\, E_{i,j}\,)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, où $E_{i,j}$ est définie par :

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\, i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\

- **L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$**

  Considérons la famille $\mathscr{B}_c = (P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n)$ (pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_i(X) = X^i$).
  Cette famille est libre et génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il exsite $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$P(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \ldots + a_n \cdot X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot X^k$$

  où $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ sont les coordonnées du polynôme P dans la base $\mathscr{B}_c$.

  Exemple

  - Déterminons les coordonnées du polynôme $Q(X) = (X-2)^3$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$. On a :

$$(X-2)^3 = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$$

    Ainsi, $(-8, 12, -6, 1)$ sont les coordonnées de $(X-2)^3$ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{K}_3[X]$.
  - On peut démontrer que $\mathscr{B} = (1, X-2, (X-2)^2, (X-2)^3)$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$. Dans cette base, Q a pour coordonnées $(0, 0, 0, 1)$.
    Quelles sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}_c$ dans cette base ?
    - × $1 = 1$
      Ainsi, 1 a pour coordonnées $(1, 0, 0, 0)$ dans $\mathscr{B}$.
    - × $X = 2 + (X-2)$
      Ainsi, X a pour coordonnées $(2, 1, 0, 0)$ dans $\mathscr{B}$.
    - × $X^2 = 4 + 4(X-2) + (X-2)^2$
      Ainsi, X^2 a pour coordonnées $(4, 4, 1, 0)$ dans $\mathscr{B}$.
    - × $X^3 = 8 + 12(X-2) + 6(X-2)^2 + (X-2)^3$
      Ainsi, X^3 a pour coordonnées $(8, 12, 6, 1)$ dans $\mathscr{B}$.
  - Enfin, si $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ alors P a pour coordonnées $(a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3, a_0 + 4a_2 + 12a_3, a_2 + 6a_3, a_3)$ dans la base $\mathscr{B}$.
    (il s'agit d'un changement de base : nous en reparlerons)

IV. Espace vectoriel de dimension finie

IV.1. Notion de dimension finie

Définition
un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit **de dimension finie** s'il possède une famille génératrice de cardinal fini.

IV.2. Théorème de la base incomplète

Théorème 8.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev différent de $\{0_E\}$.

Soit $\mathcal{L} = (e_1, \ldots, e_m)$ une famille <u>finie</u> libre de E.

Soit $\mathcal{G} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille <u>finie</u> génératrice de E.
(ainsi E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie)

1) *Alors on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E par ajout d'éléments de $\mathcal{G}$.*

2) *La propriété précédente s'écrit de manière générale comme suit.*

> *Si E est de dimension finie, alors toute famille libre de E peut être complétée en une base.*

Démonstration.

- Rappelons qu'on a noté $\mathcal{G} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille génératrice de E.
  La démonstration se base sur l'algorithme suivant.

```
1  F_1 ← L
2  Pour tout i ∈ [[1, p]] :
3      Si u_i n'est pas combinaison linéaire de vecteurs de F_i :
4          F_{i+1} ← F_i ∪ {u_i}
5      Sinon :
6          F_{i+1} ← F_i
```

  La famille $\mathcal{F}_{p+1}$ ainsi construite est une base de E.
  C'est une conséquence directe de la propriété ***c)*** du Théorème 4.

- Démontrons par récurrence : $\forall i \in [\![1, p+1]\!]$, $\mathscr{P}(i)$
  où $\mathscr{P}(i)$: la famille $\mathcal{F}_i$ est libre.
  - **Initialisation** :
    On a : $\mathcal{F}_1 = \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est libre.
    D'où $\mathscr{P}(1)$.
  - **Hérédité** : soit $i \in [\![1, p]\!]$.
    Supposons $\mathscr{P}(i)$ (la famille $\mathcal{F}_i$ est donc libre) et démontrons $\mathscr{P}(i+1)$.
    Deux cas se présentent :
    - × Si u_i n'est pas CL de vecteurs de $\mathcal{F}_i$:
      Dans ce cas, $\mathcal{F}_{i+1}$ est libre d'après la propriété ***c)***.
    - × Si u_i est CL de vecteurs de $\mathcal{F}_i$:
      Dans ce cas, $\mathcal{F}_{i+1} = \mathcal{F}_i$ est libre par hypothèse de récurrence.

    D'où $\mathscr{P}(i+1)$.

  Ainsi, par principe de récurrence : $\forall i \in [\![1, p+1]\!]$, $\mathscr{P}(i)$.
- Il reste alors à démontrer que la famille finale $\mathcal{F}_{p+1}$ est génératrice de E.
  Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, deux cas se présentent.
  - × Soit u_i n'est pas CL de vecteurs de $\mathcal{F}_i$
    Dans ce cas, u_i est ajouté à $\mathcal{F}_{i+1}$ et appartient donc à $\mathcal{F}_{p+1}$.
  - × Soit u_i est CL de vecteurs de $\mathcal{F}_i$
    Comme $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{p+1}$, u_i peut donc aussi être vu comme CL de vecteurs de la famille $\mathcal{F}_{p+1}$.

  On en déduit : $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}_{p+1}) \supset \mathrm{Vect}\,(\mathcal{G}) = E$.
  Ce qui conclut la démonstration ($\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}_{p+1}) \subset E$ est vérifié car $\mathcal{F}_{p+1}$ est une famille de vecteurs de E). □

Exercice

Notons $\mathcal{L} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

1. Démontrer que $\mathcal{L}$ est une famille libre de $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

2. Construire une base de E en complétant $\mathcal{L}$ à l'aide de l'algorithme décrit dans le théorème de la base incomplète.

IV.3. Théorème de la base extraite

Théorème 9.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev différent de $\{0_E\}$.

Supposons que E admet une famille génératrice finie $\mathcal{G}$.
(ainsi E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie)

1) *Alors E possède une base $\mathscr{B}$ de cardinal fini.*

2) *Toutes les bases de E sont finies et de même cardinal.*
Ce nombre est appelé **dimension de l'espace vectoriel** *E, noté* $\dim(E)$.

- *Par convention, on note* $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Démonstration.

1) • Comme $E \neq \{0_E\}$, $\mathcal{G}$ contient au moins un élément non nul u.
On en déduit que $\mathcal{L} = (u)$ est une famille libre de E.
- On a :
  - × $E \neq \{0_E\}$,
  - × $\mathcal{G}$ est une famille génératrice finie de E,
  - × $\mathcal{L}$ est une famille libre finie de E.

  On est dans le cadre d'application du théorème de la base incomplète.
  On en déduit que $\mathcal{L}$ peut être complétée en une base.

2) La démonstration classique consiste à introduire le lemme suivant :

E possède une base de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$	$\Rightarrow$	Toute famille possédant strictement plus de n éléments est liée

La démonstration (technique) de ce lemme sera réalisée en TD.
Une fois ce résultat démontré, on peut alors démontrer que toutes les bases de E ont même cardinal.

On procède par l'absurde.
Supposons que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases de cardinaux différents n et m.
Alors, on a forcément $n < m$ ou $n > m$.
Ainsi, quitte à renuméroter ces bases :

$$\text{Card}(\mathscr{B}_1) = n < m = \text{Card}(\mathscr{B}_2)$$

Le lemme précédent permet de conclure que la famille $\mathscr{B}_2$ est liée puisqu'elle est de cardinal strictement plus grand qu'une base de E.
Ceci contredit le fait que $\mathscr{B}_2$ est une base. □

À RETENIR

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Toutes les bases de E ont même cardinal : ce nombre est la dimension de E.

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.

Remarque

- Ce théorème/définition signifie que pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit d'en déterminer une base. On obtient en particulier la dimension des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de référence :
  - × $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
  - × $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$.
  - × $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$.
  - × $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$.
- Attention, $\mathbb{C}$ est de dimension 1 en tant que $\mathbb{C}$-ev (engendré par la base (1)) mais il est de dimension 2 en tant que $\mathbb{K}$-ev (engendré par exemple par la base $(1, i)$).
- Le théorème 9 permet d'affirmer que si un espace vectoriel est de dimension finie (c'est-à-dire possède une famille génératrice de cardinal fini) alors ... la dimension de cet espace vectoriel est finie.
- Il stipule que tout ev de dimension finie et différent de $\{0_E\}$ admet une réprésentation finie (peut être décrit par les éléments constitutifs d'une base) même s'il possède une infinité de vecteurs (le seul ev qui ne contient qu'un nombre fini de vecteurs est $\{0_E\}$).

IV.4. Cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice en dimension finie

Théorème 10.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Sur les familles libres

a) *Toute famille libre possède au plus n vecteurs.*

b) *Toute famille libre de n vecteurs est une base de E.*

c) *Toute famille de q vecteurs avec $q > n$ est liée.*

d) *Toute sous-famille d'une famille libre (dans E) est libre (dans E).*

Sur les familles génératrices

a) *Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.*

b) *Toute famille génératrice de E de n vecteurs est une base de E.*

c) *Toute famille de q vecteurs avec $q < n$ n'est pas génératrice de E.*

d) *Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est génératrice de E.*

Démonstration.

1. a) C'est le lemme évoqué dans la démonstration du théorème précédent.

b) Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre à n vecteurs.
Montrons que tout élément $v \in E$ peut s'écrire comme CL des $u_1, \ldots, u_n$.
(cela démontre que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice)

Soit $v \in E$. Alors $(u_1, \ldots, u_n, v)$ est une famille liée car elle possède $n+1$ vecteurs. Il existe donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_n \cdot u_n + \lambda_{n+1} \cdot v = 0_E$$

Deux cas se présentent alors :

× si $\lambda_{n+1} = 0$ alors la précédente égalité se réécrit :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_n \cdot u_n = 0_E$$

ce qui montre que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ puisque la famille $\mathcal{F}$ est libre. D'où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) = (0, \ldots, 0)$. Contradiction !

× si $\lambda_{n+1} \neq 0$ alors $v = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} \cdot u_1 + \ldots + -\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \cdot u_n$

c) Déjà fait.

d) Déjà fait.

2. a) Considérons une famille génératrice de E.
On procède par l'absurde. On suppose que cette famille possède strictement moins de n vecteurs. Alors, on peut extraire de cette famille une base de E de cardinal $m < n$. Impossible !

b) Considérons une famille génératrice de E possédant n vecteurs.
On procède par l'absurde. On suppose que cette famille n'est pas une base de E. Alors, on peut en extraire une base de cardinal $m < n$. Impossible !

c) On procède de nouveau par l'absurde. On reprend la démonstration précédente : si E admettait une famille génératrice de q vecteurs, on pourrait en extraire une base de cardinal $m \leqslant q < n$. Impossible !

d) Déjà fait. □

À RETENIR

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Toute famille libre de } n \text{ vecteurs est une base de } E.}$$

$$\boxed{\text{Toute famille génératrice de } E \text{ de } n \text{ vecteurs est une base de } E.}$$

$$\boxed{\text{Card}\begin{pmatrix}\text{famille}\\ \text{libre de } E\end{pmatrix} \leqslant \text{Card}\begin{pmatrix}\text{base}\\ \text{de } E\end{pmatrix} \leqslant \text{Card}\begin{pmatrix}\text{famille}\\ \text{génératrice de } E\end{pmatrix}}$$

MÉTHODO **Démontrer qu'une famille finie $\mathcal{F}$ est une base d'un espace vectoriel F de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$**

Pour démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base d'un espace vectoriel F, on peut opter pour l'une des rédactions suivantes (le choix dépend du contexte).

1) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de F.**

La famille $\mathcal{F}$ est :

× génératrice de F,

× libre.

C'est donc une base de F.

Exemple classique d'utilisation

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 2X\}$ est un ev et en déterminer une base *(on commence par démontrer $F = \text{Vect}(\ \ldots\ )$)*.

2) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E de cardinal minimal**

La famille $\mathcal{F}$ est :

× génératrice de F,

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$.

C'est donc une base de F.

Exemple classique d'utilisation

La famille $\mathcal{F} = \big((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est :

× génératrice de $\mathbb{K}^3$.
En effet, tout vecteur $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ s'écrit :

$$(a,b,c) = a \cdot (1,0,1) + b \cdot (0,1,0) + (c-a) \cdot (0,0,1)$$

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

3) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de cardinal maximal** ($\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(F)$)

La famille $\mathcal{F}$ est :

× libre,

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$.

C'est donc une base de F.

Exemple classique d'utilisation

La famille $\mathcal{F} = \big((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est :

× libre *(à démontrer !)*.

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

IV.5. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 11.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

Soit F un sev de E.

1) Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

2) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ F \text{ sev de } E \text{ de dimension finie} \\ \bullet\ \dim(F) = \dim(E) \end{array}\right\} \Rightarrow F = E$

Démonstration.

1) Deux cas se présentent.

× Si $F = \{0_E\}$ alors $F = \text{Vect}\,(0_E)$ et ainsi (0_E) est une famille génératice de F. On en conclut que F est de dimension finie. Enfin :

$$\dim(F) = 0 \leqslant \dim(E)$$

× Si $F \neq \{0_E\}$ on considère l'ensemble :

$$\mathcal{P} = \{\text{Card}\,(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \text{ est une famille libre de F}\}$$

- Cette partie de $\mathbb{N}^*$ est :
  - non vide. En effet, comme $F \neq \{0_E\}$, l'ensemble F possède un élément $u \neq 0_E$. La famille (u) est alors une famille libre de F. On en déduit que $1 \in \mathcal{P}$.
  - majorée par n. En effet, comme $F \subset E$, alors toute famille libre $\mathcal{L}$ de F est aussi une famille libre de E. On en déduit alors :

$$\text{Card}\,(\mathcal{L}) \ \leqslant\ \dim(E) \ =\ n$$

  On en déduit que $\mathcal{P}$ admet un plus grand élément. Notons p cet élément et $\mathcal{L}_p$ une famille libre de F de cardinal p.
- La famille $\mathcal{L}_p$ est une famille libre de cardinal maximal de F.
  On peut alors démontrer que c'est une famille génératrice de F.
  On procède par l'absurde.
  On suppose que $\mathcal{L}_p$ n'est pas une famille génératrice de F. On en déduit qu'il existe un élément $v \in G$ qui ne s'écrit pas comme CL des éléments de $\mathcal{L}_p$. On en conclut alors que $\mathcal{L}_p \cup \{v\}$ est une famille libre de F, de cardinal $p+1 > p$.
  Impossible !
- Comme $\mathcal{L}_p$ est une famille génératrice de F, alors F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
  De plus, comme $\mathcal{L}_p$ est libre, c'est une base de F. En particulier : $\dim(F) = \text{Card}\,(\mathcal{L}_p)$ et comme démontré précédemment :

$$\dim(F) = \text{Card}\,(\mathcal{L}_p) \ \leqslant\ n \ =\ \dim(E)$$

2) Supposons : $\dim(F) = \dim(E)$.
Soit $\mathscr{B}$ est une base de F. Alors, par définition : $\text{Card}(\mathscr{B}) = \dim(F)$.
On en déduit : $\text{Card}(\mathscr{B}) = \dim(E)$.
Ainsi $\mathscr{B}$ est une famille libre de E telle que $\text{Card}(\mathscr{B}) = \dim(E)$.
C'est donc une base de E. D'où $F = \text{Vect}\,(\mathscr{B}) = E$. □

MÉTHODO **Démontrer l'égalité entre deux espaces vectoriels de dimension finie**

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour démontrer l'égalité entre ces deux espaces vectoriels, on peut rédiger comme suit.

1) Tout d'abord : $F \subset E$.

2) Or : $\dim(F) = \dim(E)$.

On en conclut : $E = F$.

IV.6. Notion d'hyperplan

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

- On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E) - 1$.

Exemple

1. Les hyperplans d'un plan sont les droites vectorielles incluses dans ce plan. Les hyperplans d'un espace de dimension 3 sont les plans vectoriels inclus dans cet espace.

2. Les ensembles $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, des matrices diagonales, triangulaires supérieures, triangulaires inférieures, symétriques, antisymétriques, sont des sous-espaces de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension n, $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n-1)}{2}$ respectivement.
En particulier, $\mathscr{T}_2^{\pm}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{S}_2(\mathbb{K})$ sont des hyperplans de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

3. Pour $n \leqslant p$ dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_p[X]$ (c'est un hyperplan si $n = p - 1$).

V. Somme de sous-espaces vectoriels

V.1. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient F_1, F_2, ..., F_p des sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- On appelle **somme** des sous-espaces F_1, F_2, ..., F_p l'ensemble des sommes d'éléments pris dans les sous-espaces F_1 à F_p. On la note :

$$\sum_{k=1}^{p} F_k \;=\; F_1 + \cdots + F_p \;=\; \left\{ \sum_{k=1}^{p} u_k \mid \forall\, k \in [\![1,p]\!], u_k \in F_k \right\}$$

- On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est **directe**, ou que les sous-espaces $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont en **somme directe**, si :

$$\forall (u_1, \ldots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ \left(\sum_{k=1}^{p} u_k = 0_E \;\Rightarrow\; \forall k \in [\![1,p]\!],\ u_k = 0_E \right)$$

Si une somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe, on la note : $\bigoplus_{k=1}^{p} F_k = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

- On dit que les sous-espaces F_1, ..., F_p sont **supplémentaires** dans E si :

$$E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$$

V.2. Une somme de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel

Théorème 12.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

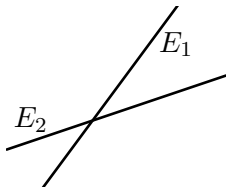
1) *La somme $F_1 + \ldots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E.*

2) *La somme $F_1 + \ldots + F_p$ est même le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$. Plus précisément :*

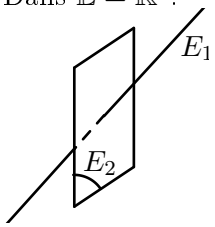
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ F \text{ sev de } E \\ \bullet\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ F \supseteq F_i \end{array}\right\} \Rightarrow F \supseteq \sum_{k=1}^{p} F_k}$$

Représentations graphiques de sous-espaces supplémentaires en dimension 2 et 3

- Dans $E = \mathbb{K}^2$.



- Dans $\mathbb{E} = \mathbb{K}^3$.



V.3. Caractérisation de la propriété de somme directe

Théorème 13.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1) *Cas général*

$$\begin{array}{ll} & \text{La somme } F_1 + \cdots + F_p \text{ est directe} \\ \Leftrightarrow & \text{Tout élément de } F_1 + \cdots + F_p \text{ se décompose de manière unique en} \\ & \text{somme d'éléments des sous-espaces vectoriels } F_1, \ldots, F_p \\ \Leftrightarrow & \text{La concaténation de bases } \mathscr{B}_1 \text{ de } F_1, \ldots, \mathscr{B}_p \text{ de } F_p \\ & \text{est une famille libre de } F_1 + \ldots + F_p \\ \Leftrightarrow & \text{La concaténation de bases } \mathscr{B}_1 \text{ de } F_1, \ldots, \mathscr{B}_p \text{ de } F_p \\ & \text{est une base de } F_1 + \ldots + F_p \\ \Leftrightarrow & \forall j \in [\![1, p-1]\!],\ \left(\sum_{i=1}^{j} F_i\right) \cap F_{j+1} = \{0_E\} \end{array}$$

2) *Cas de deux sous-espaces*
Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces de E, alors :

$$\boxed{F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont en somme directe} \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0_E\}}$$

Remarque

- Attention à bien lire le résultat de ce théorème. Le résultat énoncé pour $p = 2$ ne se généralise pas comme on pourrait le penser en première lecture. Plus précisément, le fait que les intersections multiples soient égales à l'ensemble réduit au vecteur nul est une condition nécessaire mais non suffisante.

$$\text{La somme } F_1 + \ldots + F_p \text{ est directe} \Rightarrow F_1 \cap \cdots \cap F_p = \{0_E\}$$

$$\begin{array}{c}\text{La somme } F_1 + \ldots + F_p \\ \text{est directe}\end{array} \Rightarrow \left(\forall (j,k) \in [\![1,p]\!]^2, j \neq k \Rightarrow F_j \cap F_k = \{0_E\}\right)$$

(le sens réciproque est faux pour chacune des ces 2 propriétés)

Exemple

1. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors les droites vectorielles $\mathrm{Vect}\,(e_1)$, ..., $\mathrm{Vect}\,(e_n)$ sont supplémentaires dans E.
Plus généralement, si $(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p)$ est une partition d'une base $\mathscr{B}$ de E, alors les sous-espaces $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_1), \ldots, \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_p)$ sont supplémentaires dans l'espace vectoriel E.

2. Notons $D_1 = \mathrm{Vect}\,((1,0))$, $D_2 = \mathrm{Vect}\,((0,1))$ et $D_3 = \mathrm{Vect}\,((1,1))$ dans $\mathbb{K}^2$. Alors :

$$\mathbb{K}^2 = D_1 \oplus D_2 = D_2 \oplus D_3 = D_1 \oplus D_3 = D_1 + D_2 + D_3$$

La dernière somme n'est pas directe, même si $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$ et $D_j \cap D_k = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$ pour tout couple d'éléments distincts $(j,k) \in [\![1,3]\!]^2$.

3. L'ensemble des matrices carrées peut s'écrire comme somme des sous-espaces vectoriels des matrices diagonales et de ceux des matrices triangulaires inférieures et supérieures :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{D}_n(\mathbb{K}) + \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$$

Cette somme n'est pas directe.
En revanche, si l'on note $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_n^{--}(\mathbb{K})$) le sous-espace des matrices strictement triangulaires supérieures (resp. strictement triangulaires inférieures), alors on a :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{D}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{T}_n^{--}(\mathbb{K})$$

V.4. Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

V.4.a) Dimension de la somme de sous-espaces vectoriels

Théorème 14.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient F_1, ..., F_p des sous-espaces vectoriels de E.

Supposons que les espaces F_1, ..., F_p sont de **dimensions finies**.

1) Cas général

a. Alors $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est de dimension finie et : $\boxed{\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k)}$.

b. De plus, il y a égalité si et seulement si la somme est directe.

*2) Cas de deux sous-espaces (***formule de Grassmann***)*
Dans le cas où $p = 2$, on peut même être plus précis.

$$\boxed{\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)}$$

(cela permet de retrouver au passage que F_1 et F_2 sont en somme directe ssi $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$)

Démonstration.

1. • Comme les espaces F_1, ..., F_p sont de dimensions finies notées respectivement n_1, ..., n_p, ils possèdent des bases de cardinaux finis. On note $\mathscr{B}_1$, ..., $\mathscr{B}_p$ des bases respectives de ces sous-espaces vectoriels.
Notons $\mathcal{F}$ la famille obtenue par concaténation de ces bases.
La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $F_1 + \ldots + F_p$ (à démontrer !).
Ainsi, $F_1 + \ldots + F_p$ est de dimension finie et :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}) & \geqslant & \dim\,(F_1 + \ldots + F_p) \\ \shortparallel & & \\ n_1 + \ldots + n_p & = & \dim(F_1) + \ldots + \dim(F_P) \end{array}$$

- Avec les notations ci-dessus et par le théorème 13 :

$$\begin{aligned} & \text{La somme } F_1 + \cdots + F_p \text{ est directe} \\ \Leftrightarrow\ & \text{La famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } F_1 + \ldots + F_p \\ \Leftrightarrow\ & \text{La famille } \mathcal{F} \text{ est une famille libre de } F_1 + \ldots + F_p \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{Card}(\mathcal{F}) \leqslant \dim(F_1 + \ldots + F_p) \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{Card}(\mathcal{F}) = \dim(F_1 + \ldots + F_p) \end{aligned}$$

2. Comme F_1 et F_2 sont des espaces vectoriels de dimensions finies, alors $F_1 \cap F_2$ est un espace vectoriel de dimension finie que l'on note, par exemple, $p \in \mathbb{N}$.
Considérons alors $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F_1 \cap F_2$.

- En particulier, c'est une famille libre de $F_1 \cap F_2$ et donc de F_1.
  D'après le théorème de la base incomplète, il existe donc $q \in \mathbb{N}$ et $(f_1, \ldots, f_q)$ une famille de vecteurs de F_1 tels que $\mathscr{B}_1 = (e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ est une base de F_1.
- En particulier, c'est une famille libre de $F_1 \cap F_2$ et donc de F_2.
  D'après le théorème de la base incomplète, il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(g_1, \ldots, g_r)$ une famille de vecteurs de F_1 tels que $\mathscr{B}_2 = (e_1, \ldots, e_p, g_1, \ldots, g_r)$ est une base de F_2.

Notons alors : $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q, g_1, \ldots, g_r)$.
Démontrons que cette famille est une base de $F_1 + F_2$.

- Démontrons que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $F_1 + F_2$.
  Soit $u \in F_1 + F_2$. Il existe donc $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que : $u = u_1 + u_2$.
  - × Comme $\mathscr{B}_1$ est une base de F_1, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \mu_1, \ldots \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$ tel que :
  $$u_1 = \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_p \cdot e_p \ + \ \mu_1 \cdot f_1 + \ldots + \mu_q \cdot f_q$$
  - × Comme $\mathscr{B}_2$ est une base de F_2, il existe $(\beta_1, \ldots, \beta_p, \nu_1, \ldots \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+r}$ tel que :
  $$u_2 = \beta_1 \cdot e_1 + \ldots + \beta_p \cdot e_p \ + \ \nu_1 \cdot g_1 + \ldots + \nu_r \cdot g_r$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= \quad (\alpha_1 + \beta_1) \cdot e_1 + \ldots + (\alpha_p + \beta_p) \cdot e_p \\ &\quad + \ \mu_1 \cdot f_1 + \ldots + \mu_q \cdot f_q \\ &\quad + \ \nu_1 \cdot g_1 + \ldots + \nu_r \cdot g_r \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}$ est donc bien génératrice de $F_1 + F_2$.

- Démontrons que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q, \nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+q+r}$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p \ + \ \mu_1 \cdot f_1 + \ldots + \mu_q \cdot f_q \ + \ \nu_1 \cdot g_1 + \ldots + \nu_r \cdot g_r \ = \ 0_E \quad (*)$$

On en déduit :

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p \ + \ \mu_1 \cdot f_1 + \ldots + \mu_q \cdot f_q}_{u \in F_1} \ = \ \underbrace{-\nu_1 \cdot g_1 - \ldots - \nu_r \cdot g_r}_{v \in F_2}$$

- × Comme u s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{B}_1$, c'est un élément de F_1.
- × Comme v s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{B}_2$, c'est un élément de F_2.
- × Comme $u = v$ alors u et v sont des éléments de $F_1 \cap F_2$.

Il existe donc $(\delta_1, \ldots, \delta_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $u = \sum\limits_{i=1}^{p} \delta_i \cdot e_i$. Cela s'écrit :

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p \ + \ \mu_1 \cdot f_1 + \ldots + \mu_q \cdot f_q \ = \ \delta_1 \cdot e_1 + \ldots + \delta_p \cdot e_p$$

La famille $\mathscr{B}_1$ étant une famille libre, on obtient, par identification :

$$\lambda_1 = \delta_1, \ \dots \ , \ \lambda_p = \delta_p, \quad \text{et} \quad \mu_1 = 0, \dots, \mu_q = 0$$

On obtient alors, en réinjectant dans $(*)$:

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p \ + \ \nu_1 \cdot g_1 + \ldots + \nu_r \cdot g_r \ = \ 0_E$$

La famille $\mathscr{B}_2$ étant libre, on en déduit :

$$\lambda_1 = 0, \ \dots \ , \ \lambda_p = 0, \quad \text{et} \quad \nu_1 = 0, \dots, \nu_r = 0$$

Ainsi, la relation de dépendance linéaire $(*)$ est la relation triviale et la famille $\mathcal{F}$ est libre.

□

V.4.b) Caractérisation du caractère supplémentaire à l'aide de la dimension

Théorème 15.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

Supposons que les espaces $F_1, \dots, F_p$ sont de **dimensions finies**.

1) *Cas général*

a.

Les espaces $F_1, \dots, F_p$ sont supplémentaires dans E

$\Leftrightarrow \quad E \ = \ F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \ E = F_1 + \ldots + F_p \\ \bullet \ \textit{La somme } F_1 + \ldots + F_p \textit{ est directe} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \ \dim(E) \ = \ \dim(F_1 + \ldots + F_p) \\ \bullet \ \dim(F_1 + \ldots + F_p) \ = \ \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_p) \end{cases}$

b.

Les espaces $F_1, \dots, F_p$ sont supplémentaires dans E

$\Leftrightarrow \quad E \ = \ F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \ E = F_1 + \ldots + F_p \\ \bullet \ \textit{La somme } F_1 + \ldots + F_p \textit{ est directe} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \ E = F_1 + \ldots + F_p \\ \bullet \ \textit{Tout élément de } F_1 + \cdots + F_p \textit{ se décompose de manière unique en somme d'éléments des sous-espaces vectoriels } F_1, \dots, F_p \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ *Tout élément de E se décompose de manière unique en somme d'éléments des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$*

$\Leftrightarrow$ *La concaténation de bases $\mathscr{B}_1$ de $F_1, \dots, \mathscr{B}_p$ de F_p est une base de E*

2) Cas de deux sous-espaces

Les espaces F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E

$$\Leftrightarrow \quad E = F_1 \oplus F_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet\ E = F_1 + F_2 \\ \bullet\ \textit{La somme } F_1 + F_2 \textit{ est directe} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet\ \dim(E) = \dim(F_1 + F_2) \\ \bullet\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet\ \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) \\ \bullet\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

Remarque

- Revenons sur le point *2*. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note :

$$n_k = \dim(F_k) \quad \text{et} \quad \mathscr{B}_k = (e_{k,1}, \ldots, e_{k,n_k}) \text{ une base de } F_k$$

  Notons alors $\mathscr{B}$ la famille concaténée des bases $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$, c'est-à-dire la famille :

$$\mathscr{B} = (\underbrace{e_{1,1}, \ldots, e_{1,n_1}}_{\mathscr{B}_1}, \underbrace{e_{2,1}, \ldots, e_{2,n_2}}_{\mathscr{B}_2}, \ldots\ldots, \underbrace{e_{p,1}, \ldots, e_{p,n_p}}_{\mathscr{B}_p})$$

  Si les sous-espaces F_1, ..., F_p sont supplémentaires dans E, alors la famille $\mathscr{B}$ est une base de E. Cette base est dite **adaptée** aux sous-espaces supplémentaires F_1, ..., F_p.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, et dans le cas $n = 2$, la famille :

$$\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{base de } \mathscr{S}_2(\mathbb{K})}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{dirige } \mathscr{A}_2(\mathbb{K})} \Big)$$

  est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ adaptée à $\mathscr{S}_2(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_2(\mathbb{K})$.

MÉTHODO

Démontrer qu'un espace vectoriel s'écrit comme somme de 2 supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On souhaite démontrer que E s'écrit sous la forme $E = F_1 \oplus F_2$, où F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E.
On peut utiliser l'une des méthodes suivantes.

1) Pour répondre à la question : « Montrer qu'il existe un supplémentaire de F_1 dans E ».
On utilise le théorème de la base incomplète.

2) Pour répondre à la question : « Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E. ».
On peut suivant le contexte :

a) utiliser un raisonnement par analyse-synthèse.
Notons que cette méthode peut aussi être employée :
× si E n'est pas de dimension finie,
× si strictement plus de 2 espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.

b) utiliser une caractérisation de la supplémentarité à l'aide de la dimension.
Parmi les caractérisations du cours, on emploie le plus souvent les suivantes :
× $\begin{cases} \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) \\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$
× la concaténation d'une base $\mathscr{B}_1$ de F_1 et $\mathscr{B}_2$ de F_2 est une base de E.
Notons que cette méthode peut aussi être utilisée si strictement plus de 2 espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.

Illustration de ces procédés sur des exemples

1) Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f une application linéaire de E dans E, c'est-à-dire :

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(x_1, x_2) \in E^2,\ f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)$$

On note : $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\}$.

1. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. Démontrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus G$.

Démonstration.

1. Démontrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

- $\mathrm{Ker}(f) \subseteq E$, par définition de $\mathrm{Ker}(f)$.
- $\mathrm{Ker}(f) \neq \varnothing$. En effet $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$, car, comme f est linéaire :

$$f(0_E) \ = \ f(0 \cdot 0_E) \ = \ 0 \cdot f(0_E) \ = \ 0_E$$

- Démontrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par combinaison linéaire.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(x_1, x_2) \in (\mathrm{Ker}(f))^2$.

$$\begin{array}{rclcll} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) & + & \lambda_2 \cdot f(x_2) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot 0_E & + & \lambda_2 \cdot 0_E & \textit{(car } x_1 \in \mathrm{Ker}(f) \\ & & & & & \textit{et } x_2 \in \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \\ & = & 0_E & & & \end{array}$$

2. Comme E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et : $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
On note $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de de $\mathrm{Ker}(f)$. C'est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$ et donc de E.
On peut donc la compléter en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E.
On note alors $G = \mathrm{Vect}\,(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
La base $\mathscr{B}$ étant une concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de G , on a bien : $E = G \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

□

2) On note :

× $E = \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$,

× F_1 l'ensemble des fonctions constantes de E,

× $F_2 = \{f \in E \mid \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt\}$

Démontrer : $E = F_1 \oplus F_2$.

Démonstration.
Soit $f \in E$.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse** : Supposons qu'il existe $(g, h) \in E^2$ tel que :

a) $g \in F_1$,

b) $h \in F_2$,

c) $f = g + h$.

Comme $g \in F_1$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = c$.
De plus, comme les fonctions f, g et h sont continues sur le segment $[0,1]$, alors les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$, $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_0^1 h(t)\ dt$ sont bien définies.

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt & = & \displaystyle\int_0^1 (g+h)(t)\ dt & \textit{(d'après } \textbf{c}\textit{))} \\ & = & \displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt + \int_0^1 h(t)\ dt & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & = & \displaystyle\int_0^1 c\ dt + 0 & \textit{(car } h \in F_2\textit{)} \\ & = & c\ \big[\ t\ \big]_0^1 \ = \ c & \end{array}$$

Ainsi :

× $g : x \mapsto c = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$,

× $h : x \mapsto f(x) - f_1(x) = f(x) - \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.

- **Synthèse** : On pose :

$$g_0 : x \mapsto \int_0^1 f(t)\ dt \qquad \text{et} \qquad h_0 : x \mapsto f(x) - \int_0^1 f(t)\ dt$$

a) La fonction g_0 est bien constante sur $[0,1]$. Autrement dit : $g_0 \in F_1$.

b) La fonction h_0 est continue sur le segment $[0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(t)\ dt$ est donc bien définie. De plus :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 h(t)\ dt \\
= & \int_0^1 \left(f(t) - \int_0^1 f(t)\ dt\right)\ dt \\
= & \int_0^1 f(t)\ dt - \int_0^1 f(t)\ dt \times \int_0^1 1\ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale car } \int_0^1 f(t)\ dt \textit{ est un scalaire)} \\
= & \int_0^1 f(t)\ dt - \int_0^1 f(t)\ dt \times 1 \\
= & \ 0
\end{aligned}$$

Ainsi : $h_0 \in F_2$.

c) Enfin, soit $x \in [0,1]$.

$$g_0(x) + h_0(x) \ = \ \cancel{\int_0^1 f(t)\ dt} + f(x) - \cancel{\int_0^1 f(t)\ dt} \ = \ f(x)$$

D'où : $f = g_0 + h_0$.

Finalement, toute fonction f de E se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction de F_1 et une fonction de F_2.
Autrement dit : $E = F_1 \oplus F_2$. □

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- La famille $\mathcal{F} = \left(E_{i,j} - E_{j,i}\right)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On en déduit :

$$\dim\left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right) \ = \ \text{Card}\left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right) \ = \ \sum_{i=1}^{n-1} i \ = \ \frac{n\,(n-1)}{2}$$

La famille $\mathcal{G}$ obtenue en concaténant les familles $\mathcal{G}_1 = \left(E_{i,j} + E_{j,i}\right)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ et $\mathcal{G}_2 = \left(E_{i,i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\dim\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right) &= \text{Card}\left(\mathcal{G}\right) \\
&= \text{Card}\left(\mathcal{G}_1\right) + \text{Card}\left(\mathcal{G}_2\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right) + n \\
&= \frac{n\,(n-1)}{2} + n \\
&= \frac{n}{2}\ \left((n-1) + 2\right) \\
&= \frac{n\,(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\dim\left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right) \ + \ \dim\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right) &= \frac{n\,(n-1)}{2} + \frac{n\,(n+1)}{2} \\
&= \frac{n}{2}\ \left((\cancel{n} - 1) + (\cancel{n} + 1)\right) \\
&= \frac{n}{2} \times 2\,n \\
&= n^2 \ = \ \dim\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \dim\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right) \ = \ \dim\left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right) \ + \ \dim\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right).}$$

- Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :
  × ${}^tM = -M$ car $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
  × ${}^tM = M$ car $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
  On en déduit : $M = -M$ et donc : $2\,M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \;=\; \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}.}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \;\oplus\; \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).}$$

□

Notons enfin que l'écriture sous forme d'une somme de supplémentaires amène naturellement à considérer une base adaptée au problème (une famille issue de la concaténation d'une base de F_1 et d'une base de F_2). Cette base peut être introduite lors de la démonstration de la décomposition sous forme de somme ou plus tard dans l'exercice.

V.4.c) Caractérisation des hyperplans par leurs supplémentaires

Théorème 16.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Les hyperplans de E sont les supplémentaires des droites vectorielles de E.

$$\boxed{H \text{ est un hyperplan de } E \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in E,\ E = H + \mathrm{Vect}\,(a)}$$

Démonstration.

1) Si H est un hyperplan de E, alors pour tout $a \in E \setminus H$:
× $H \cap \mathrm{Vect}\,(a) \;=\; \{0_E\}$ donc la somme $H + \mathrm{Vect}\,(a)$ est directe.
× $\dim(H + \mathrm{Vect}\,(a)) \;=\; \dim(H) + \dim(\mathrm{Vect}\,(a)) \;=\; (\dim(E) - \cancel{1}) + \cancel{1}$
Ainsi : $E = H \oplus \mathrm{Vect}\,(a)$.

2) Soit H le supplémentaire d'une droite vectorielle D de E ($E = H \oplus D$).
Alors par la formule de Grassmann :

$$\dim(E) = \dim(H) + \dim(D) = \dim(H) + 1$$

donc H est un hyperplan de E. □

Remarque

- Si E est un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel F de E, différent de $\{0_E\}$, possède un supplémentaire.
  Pour le démontrer, il suffit de considérer une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_p)$ de F (où on a noté $p = \dim(F) \in \mathbb{N}$). Comme $\mathscr{B}$ est une famille libre de F et donc de E, on peut compléter cette famille en une base de E.
  Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ et $(f_1, \dots, f_q) \in \mathbb{E}^q$ tel que :

$$(e_1, \dots e_p, f_1, \dots, f_q) \text{ est une base de } E$$

  Ainsi : $E = F \oplus \mathrm{Vect}\,(f_1, \dots, f_q)$.
- `(CULTURE)`
  Dans le cas où E n'est pas de dimension finie, la démonstration du théorème de la base incomplète faite dans ce cours ne tient plus. En effet, la terminaison de l'algorithme présent dans la démonstration est fournie par le fait qu'en un nombre fini d'étapes on peut inspecter toute la famille $\mathcal{G}$. Cela ne signifie pas que le théorème de la base incomplète est faux en dimension infinie. Il est vérifié si on accepte « l'axiome du choix ». Cette discussion nécessite une compréhension plus fine de la théorie des ensembles. Ce n'est pas l'objet de ce cours.