CH IV : Ensembles et applications

Généralités sur les ensembles

I. Notion intuitive d'ensemble

Définition

- On utilisera la définition intuitive d'**ensemble**, à savoir qu'un ensemble est une « collection » (non ordonnée) d'objets **distincts**, appelés des **éléments** de cet ensemble.
- Soit E un ensemble. On utilise la notation :
  - × $x \in E$: pour indiquer que x est un élément de l'ensemble E.
    On dit alors que E contient l'élément x.
  - × $x \notin E$: pour indiquer que x n'est pas un élément de E.
- Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément.
  Il est appelé **ensemble vide** et est noté $\varnothing$.
- Deux ensembles sont dits **égaux** s'ils ont les mêmes éléments.

Notations et remarque

- On utilisera des accolades pour représenter les ensembles. Plus précisément :

Tout objet dont l'écriture commence par une accolade ouvrante { et se termine par une accolade fermante } est un ensemble.

- Il existe deux manières de définir des ensembles à l'aide d'accolades.
  1) Sous forme **extensive** : il s'agit d'énumérer tous les éléments de l'ensemble à l'intérieur des accolades. Par exemple $\{6, 7, 10\}$ est l'ensemble qui contient les éléments 6, 7 et 10. On autorise aussi les points de suspension dans l'écriture d'ensembles en extension. Par exemple, l'ensemble $\{1, \dots, 5\}$ est l'ensemble qui contient les éléments 1, 2, 3, 4 et 5.
  2) Sous forme **compréhensive** : il s'agit de décrire, à l'aide d'une propriété, les éléments de l'ensemble. Plus précisément, la notation :
  $$\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\} \qquad \big(= \{\text{objets} \mid \text{conditions}\}\big)$$
  désigne l'ensemble des éléments de E pour lesquels la propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée. Par exemple :
  - × $\{i \in \mathbb{N} \mid 0 < i \leqslant 3\}$ désigne l'ensemble des entiers qui sont compris entre 0 de manière stricte et 3 de manière large.
    Autrement dit, cet ensemble n'est autre que $\{1, 2, 3\}$.
  - × $\{i \in \mathbb{N} \mid i \text{ est un carré plus petit que } 10\}$ désigne l'ensemble des entiers qui sont des carrés plus petits que 10.
    Autrement dit, cet ensemble est $\{0, 1, 4, 9\}$.
  - × $\{i \in \mathbb{N} \mid i^2 \leqslant 10\}$ désigne l'ensemble des entiers dont le carré est plus petit que 10. Autrement dit, cet ensemble est $\{0, 1, 2, 3\}$.
  - × $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$ désigne l'ensemble des réels dont le carré est strictement négatif. Comme il n'y a pas de tels réels, cet ensemble est l'ensemble vide $\varnothing$.
    ($\{x \in \mathbb{R} \mid \texttt{FAUX}\}$ désigne l'ensemble des réels telle que la propriété constante qui vaut toujours faux est vérifiée ; cet ensemble est donc $\varnothing$)

  On parle aussi d'ensemble en compréhension.
  Profitons-en pour signaler (rappeler ?) qu'il est possible en **Python** de définir des listes en compréhension (on y reviendra !).
- Lorsqu'on écrit l'ensemble $\{6, 7, 10\}$, l'élément 6 est inscrit en $1^{\text{ère}}$ position, l'élément 7 en $2^{\text{ème}}$ et l'élément 10 en $3^{\text{ème}}$. Cependant, l'ordre d'écriture des éléments d'un ensemble n'importe pas. Ainsi :
  $$\{6, 7, 10\} = \{6, 10, 7\} = \{7, 6, 10\} = \{7, 10, 6\} = \{10, 6, 7\} = \{10, 7, 6\}$$
- Les éléments d'un ensemble ne sont pas forcément des entiers (ni même des réels). N'importe quel objet correctement défini peut être utilisé comme élément d'un ensemble. On peut par exemple définir des ensembles de réels, des ensembles de fonctions ou même des ensembles d'ensembles (c'est-à-dire des ensembles dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles).
- Les éléments d'un ensemble sont distincts. Ainsi, l'objet $\{1, 1, 2\}$ n'est pas un ensemble correctement défini.

- Généralement, les éléments d'un ensemble sont tous de même type mais ce n'est pas une contrainte de la définition. Ainsi, $A = \{1, \{2\}\}$ est un ensemble à deux éléments :
  - × 1, qui est un réel.
  - × $\{2\}$, qui est un ensemble (qui contient un réel).
- Il existe d'autres notations pour représenter certains ensembles :
  - × les intervalles réels se notent à l'aide des crochets [et]. Par exemple, si a et b sont deux réels tels que $a < b$:

$$[a, b[\ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$$

  - × les intervalles entiers se notent à l'aide des crochets doubles $\llbracket$ et $\rrbracket$.
    Par exemple, si m et n sont des entiers tels que $m < n$ alors :

$$\llbracket m, n \rrbracket \ = \ \{i \in \mathbb{N} \mid m \leqslant i \leqslant n\}$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\llbracket 1, n \rrbracket \ = \ \underbrace{\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}}_{\text{sous forme compréhensive}} \ = \ \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_{\text{sous forme extensive}}$$

- L'écriture d'ensembles sous forme compréhensive se retrouve dans tous les chapitres de l'année. Il est primordial de comprendre ce mécanisme de définition tant il est fréquent de le retrouver dans les définitions mathématiques.

Vocabulaire

- Un ensemble ne contenant qu'un seul élément est appelé un singleton.
  - × $\{1\}$ est le singleton dont le seul élément est 1.
  - × $\big\{ \{1\} \big\}$ est le singleton dont le seul élément est l'ensemble $\{1\}$.
  - × $\Big\{ \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}\} \Big\}$ est lui aussi un singleton dont l'unique élément est l'ensemble $\big\{ \varnothing, \{1\}, \{1,2\} \big\}$ (cet ensemble contient lui-même trois éléments : les ensembles $\varnothing$, $\{1\}$ et $\{1,2\}$).
- De manière générale, un ensemble E contenant un **nombre fini** d'éléments est appelé **ensemble fini**.
  Ce nombre est appelé **cardinal** de E et noté $\text{Card}(E)$.

$$\text{Card}\left(\left\{ \varnothing, \{1\}, \{1,2\} \right\} \right) \ = \ 3 \quad \text{et} \quad \text{Card}\left(\left\{ \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}\} \right\} \right) \ = \ 1$$

(on donnera une définition plus rigoureuse de la notion de cardinal dans un chapitre à suivre)

Exercice 1
Parmi ces ensembles, lesquels sont finis ? Écrire les ensembles finis sous forme extensive. Donner 3 éléments distincts des autres ensembles.

1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$

2) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geqslant 0\}$

3) $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$

4) $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k + 2\}$

5) $\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \big(f(x)\big)^2 \leqslant 0\}$

6) $\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$

7) $\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{N}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, k \leqslant f(x) < k + 1\}$

8) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$

9) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0\}$

10) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall x \in \mathbb{R}, x = 3\}$

Remarque

- La théorie des ensembles, créée par Georg Cantor à la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, se donne seulement comme points de départ 2 des notions citées ci-dessus : ensemble et appartenance. Elle reconstruit, à partir de cela, tous les objets mathématiques usuels : fonctions, réels...
  Avec cette absence de contraintes, toute propriété peut définir un ensemble. Plus précisément, étant donné un ensemble A et une propriété $\mathcal{A}$, il affirme l'existence de $B = \{x \in A \mid \mathcal{A}(x)\}$: l'ensemble des éléments de A vérifiant la propriété $\mathcal{A}$.
- Ainsi, en notant Ω l'ensemble qui contient tous les ensembles, on peut définir l'ensemble : $B \ = \ \{x \in \Omega \mid x \notin x\}$. Mais alors 2 cas se présentent :

- × si $B \in B$, alors, par définition de B : $B \notin B$.
  Absurde.
- × si $B \notin B$, alors, toujours par définition de B : $B \in B$.
  Absurde.

Ce paradoxe, dû à Bertrand Russel, démontre que l'ensemble B ci-dessus :

- × ne peut exister (sinon on aboutit à une absurdité),
- × existe car sa création est permise par la théorie des ensembles.

On illustre sur cet exemple que la théorie des ensembles permet de démontrer à la fois un énoncé et sa négation. On dit que la théorie des ensembles est *contradictoire*.

- À cause de cela, à partir du $XX^{\text{ème}}$ siècle les mathématiciens ont cherché d'autres axiomatiques à cette théorie des ensembles. On citera notamment le mathématicien Ernst Zermelo qui construit en 1908 un système d'axiomes pour la théorie des ensembles qui, pour simplifier, peut être vu comme une restriction de la version contradictoire aux cas particuliers utiles (ce qui permet d'éviter les paradoxes). C'est encore à l'heure actuelle l'un des systèmes d'axiomes les plus utilisés en théorie des ensembles.

II. Comparaison d'ensembles : l'inclusion

II.1. Définition

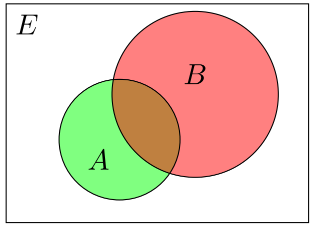
Définition
Soit A et E deux ensembles.

- On dit que A est **inclus** dans E, et on notera $A \subset E$ ou $A \subseteq E$, si tout élément de A est un élément de E.

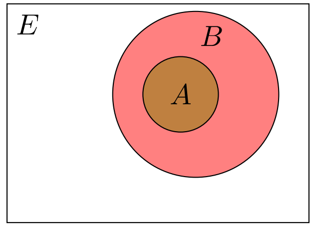
$$\boxed{A \subset E \ \Leftrightarrow\ \forall x \in A,\ x \in E}$$

- Lorsque $A \subset E$, on dit que A est un sous-ensemble de E.
  On parle aussi de **partie** de E pour désigner un sous-ensemble de E.
- On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble constitué de toutes les parties de E.

Représentation graphique
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.



$A \not\subseteq B$



$A \subseteq B$

Remarque

- Le plus petit (en terme d'inclusion) sous-ensemble de E est l'ensemble vide.
  (on a toujours $\varnothing \subset E$ et tout autre sous-ensemble A de E est plus grand - en terme d'inclusion - que $\varnothing$ puisque $\varnothing \subset A$)
- Le plus grand (en terme d'inclusion) est E lui-même.
  (on a toujours $E \subset E$ et tout autre sous-ensemble A de E est plus petit - en terme d'inclusion - que E puisque $A \subset E$)

Il ne faut pas confondre :

- × « appartient » qui s'utilise pour signifier qu'un **élément** est présent dans un ensemble. De manière générale : $a_3 \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.
  Cette écriture est valable quelle que soit la nature des objets a_1, a_2, a_3, a_4. Par exemple : $7 \in \{6, 7, 10\}$, $\{2\} \in \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$.
- × « est inclus » qui s'utilise pour signifier qu'un **ensemble** est un sous-ensemble d'un autre.
  De manière générale : $\{a_1, a_3\} \subset \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.
  (un sous-ensemble est un **ensemble** *qui contient des éléments appartenant au sur-ensemble)*
  Par exemple : $\{7\} \subset \{6, 7, 10\}$, $\{6, 10\} \subset \{6, 7, 10\}$
  ou encore : $\big\{\varnothing, \{2\}\big\} \subset \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$.

II.2. Modèle de rédaction pour démontrer $A \subset B$

```
Soit x ∈ A.
...démonstration ...
Alors x ∈ B. On a donc démontré A ⊂ B.
```

II.3. Propriétés de l'inclusion

Proposition 1.

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

1) $\varnothing \subset A$

2) $A \subset A$ *(réflexivité)*

3) $(A \subset B \texttt{ ET } B \subset A) \Rightarrow A = B$ *(antisymétrie)*
(évidemment, on a aussi : $A = B \Rightarrow (A \subset B \texttt{ ET } B \subset A)$*)*

4) $(A \subset B \texttt{ ET } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ *(transitivité)*

Démonstration.

1) Tout élément de $\varnothing$ (il n'y en a aucun !) est élément de A.

2) Soit $x \in A$ alors $x \in A$.

3) Supposons que $A \subset B$ ET $B \subset A$ et montrons $A = B$ c'est-à-dire que A et B ont mêmes éléments.

- Comme $A \subset B$, tout élément x de A, est aussi élément de B.
- De même, comme $B \subset A$, si $x \in B$ alors $x \in A$.

Tout élément de A est élément de B et inversement.
On en déduit que $A = B$.

4) Supposons que $A \subset B$ ET $B \subset C$ et démontrons que $A \subset C$.

Soit $x \in A$. Montrons que $x \in C$.

Comme $x \in A$ et $A \subset B$, on en déduit que $x \in B$.
Or $B \subset C$. Comme $x \in B$, on en déduit que $x \in C$. □

Lecture de ces propriétés

Il faut bien comprendre que les propriétés énoncées sont vérifiées pour A, B et C des parties quelconques de E.
Autrement dit, ces propriétés sont universellement quantifiées.

Par exemple, la propriété de transitivité comme suit.

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \forall B \in \mathscr{P}(E), \forall C \in \mathscr{P}(E),\ (A \subset B \texttt{ ET } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

(rappelons que $A \in \mathscr{P}(E)$ signifie que A est une partie de E)

Cette présentation, un peu lourde, rend difficile la lecture des propriétés. Nous l'éviterons donc dans les énoncés suivants.

Démontrer l'égalité de deux ensembles

- Par définition, $A = B$ si A et B ont les mêmes éléments. Ainsi, si $A = B$, tout élément x de A est élément de B (d'où $A \subset B$) et tout élément de B est élément de A (d'où $B \subset A$). La propriété *3*) est donc une équivalence.

$$\boxed{A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subset B \texttt{ ET } B \subset A)}$$

Cette équivalence fournit une méthode de démonstration. Pour montrer que $A = B$, on procédera généralement par **double inclusion**.

```
Démontrons que A = B.
(⊂) Soit x ∈ A.
    ...démonstration ...
    Alors x ∈ B. On a donc démontré A ⊂ B.
(⊃) Soit x ∈ B.
    ...démonstration ...
    Alors x ∈ A. On a donc démontré B ⊂ A.
```

- Par ailleurs, A est différent de B (noté $A \neq B$) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} A \neq B \quad & \Leftrightarrow \quad \texttt{NON}(A \subset B \texttt{ ET } B \subset A) \\ & \Leftrightarrow \quad \texttt{NON}(A \subset B) \texttt{ OU } \texttt{NON}(B \subset A) \\ & \Leftrightarrow \quad (\exists x \in A, x \notin B) \texttt{ OU } (\exists x \in B, x \notin A) \end{aligned}$$

- On dit que A est inclus strictement dans B, et on note $A \subsetneq B$, lorsque $A \subset B$ et $A \neq B$:

$$\begin{aligned} A \subsetneq B &\Leftrightarrow A \subset B \texttt{ ET } B \not\subset A \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in A, x \in B) \texttt{ ET } (\exists x \in B, x \notin A) \end{aligned}$$

Notion de relation d'ordre

- Les points *2*), *3*), *4*) définissent la notion de **relation d'ordre**.
  La relation binaire $\leqslant$ (récip. $\geqslant$) est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
  La relation binaire $\subset$ est, quant à elle, une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$.
- Il est à noter que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné par la relation $\leqslant$, ce qui signifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ (x \leqslant y) \texttt{ OU } (y \leqslant x)$$

- En revanche, la relation $\subset$ n'est pas totale sur $\mathscr{P}(E)$:

$$\exists (A, B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E),\ (A \not\subset B) \texttt{ ET } (B \not\subset A)$$

(c'est la négation de la propriété précédente)

II.4. L'ensemble des parties des éléments de E

Notation

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble constitué de toutes les parties de E.

Remarque

- $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles.
  C'est donc un ensemble dont les éléments sont des ensembles.
- Tout sous-ensemble A de E vérifie $A \subset E$. Mais comme A est une partie de E, cette propriété peut aussi s'écrire : $A \in \mathscr{P}(E)$.

$$\boxed{A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathscr{P}(E)}$$

Proposition 2. *(immédiates)*

- *Si* $E = \varnothing$, *on a* $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing\}$.
- *Si* $E = \{a\}$, *on a* $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}\}$.
- *Si* $E = \{a, b\}$, *on a* $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

On peut d'ailleurs démontrer que si E *compte* n *éléments, alors* $\mathscr{P}(E)$ *compte* 2^n *éléments.*

Exercice 2

On considère $A = \{\{1, 2\}, 3, \varnothing\}$.

a) Combien d'éléments possède A ?

b) Détailler $\mathscr{P}(A)$.
Quel est le cardinal de cet ensemble ? Était-ce prévisible ?

Démonstration.

a) L'ensemble A possède 3 éléments. Le premier, noté $a_1 = \{1, 2\}$, est un ensemble ; le deuxième, $a_2 = 3$, est un réel ; le troisième, $a_3 = \varnothing$, est un ensemble.

b) Détaillons $\mathscr{P}(A)$ en utilisant les notations précédentes.

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(A) = \{ \ & \varnothing, \\ & \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \\ & \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \\ & \{a_1, a_2, a_3\} \quad \} \end{aligned}$$

Enfin, en remplaçant les a_i par leur valeurs, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(A) = \{ \ & \varnothing, \\ & \{\{1, 2\}\}, \{3\}, \{\varnothing\}, \\ & \{\{1, 2\}, 3\}, \{\{1, 2\}, \varnothing\}, \{3, \varnothing\}, \\ & \{\{1, 2\}, 3, \varnothing\} \quad \} \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{P}(A)$ contient 8 éléments ($= 2^3$). □

III. Opérations ensemblistes

III.1. Avant propos : notion de famille

Notion intuitive de famille

Soit I un ensemble (d'indices).

Soit E un ensemble.

- Une famille d'éléments de E est une collection **indexée** d'objets de E.
  On utilisera la notation $(x_i)_{i\in I}$ pour représenter une famille d'éléments de E indexée par I.
- Pour mieux comprendre cette définition, détaillons les exemples classiques suivants :
  × si l'ensemble d'indices I est l'ensemble fini $[\![1,n]\!]$ (où n est un entier naturel non nul), une famille $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n'est autre qu'un n-uplet d'objets :
  $$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
  × si l'ensemble d'indices I est $\mathbb{N}$, une famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite.

  Notons au passage que, dans une famille, le même objet peut apparaître plusieurs fois (le n-uplet ou la suite évoqués ci-dessus n'ont pas à être constitués d'éléments distincts).
- Dans les deux exemples précédents, on comprend que l'indexation par un ensemble d'entiers est une numérotation des objets. Numéroter des objets c'est leur assigner un ordre. Si on considère l'ensemble $\{6,7,10\}$, on peut (par exemple) former les familles :
  $$x_1 = 6,\ x_2 = 7,\ x_3 = 10 \quad \text{et} \quad y_1 = 10,\ y_2 = 7,\ y_3 = 6$$
  Les familles $(x_i)_{i\in[\![1,3]\!]}$ et $(y_i)_{i\in[\![1,3]\!]}$ ont été crées à partir des mêmes éléments mais elles sont différentes puisque la propriété $\texttt{NON}(\forall i \in [\![1,3]\!],\ x_i = y_i)$ est vérifiée.
- Il est classique d'utiliser des ensembles d'entiers pour indexer une famille mais ce n'est pas une obligation. En particulier, on peut tout à fait considérer un ensemble non dénombrable ($I = \mathbb{R}$ par exemple) d'indices.

III.2. Réunion de parties de E

Définition

Soit E un ensemble

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

- On appelle **réunion** de A et de B et on note $A\cup B$ **l'ensemble** suivant.
  $$\boxed{A\cup B = \{x\in E \mid (x\in A)\ \texttt{OU}\ (x\in B)\}}$$
- Autrement dit, pour $x\in E$, on a : $\boxed{x\in A\cup B \ \Leftrightarrow\ (x\in A)\ \texttt{OU}\ (x\in B)}$.

Généralisation

Soit I un ensemble (d'indices).

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E ($\forall i\in I,\ A_i\subset E$).

- On note $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ la réunion de toutes les éléments de la famille $(A_i)_{i\in I}$.
  $$\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i = \{x\in E \mid \exists i\in I, x\in A_i\}}$$
- Autrement dit, pour $x\in E$, on a : $\boxed{x\in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \ \Leftrightarrow\ \exists i\in I, x\in A_i}$.

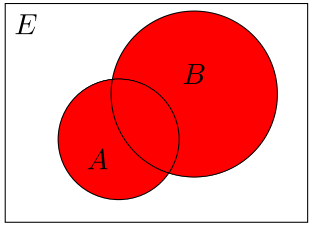
  Dans le cas où $I = [\![1,3]\!]$ (par exemple) :
  $$\begin{aligned} x\in \bigcup_{i\in[\![1,3]\!]} A_i &\Leftrightarrow \exists i\in[\![1,3]\!], x\in A_i \\ &\Leftrightarrow (x\in A_1)\ \texttt{OU}\ (x\in A_2)\ \texttt{OU}\ (x\in A_3) \end{aligned}$$
  Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ est noté $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$.

  Dans le cas où $I = [\![m,n]\!]$ (pour $m\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$), $\bigcup\limits_{i\in[\![m,n]\!]} A_i$ est noté $\bigcup\limits_{i=m}^{n} A_i$.

  Dans le cas où $I = \varnothing$, $\bigcup\limits_{i\in\varnothing} A_i = \varnothing$.

Représentation graphique

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.



$A \cup B$

Proposition 3. *(élémentaires)*

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

1) *Propriétés de la loi $\cup$:*

- ***a.*** $A \cup B = B \cup A$
  (la loi $\cup$ est commutative)
- ***b.*** $A \cup \varnothing \ = \ \varnothing \cup A = A$
  (l'ensemble vide est l'élément neutre de la loi $\cup$)
- ***c.*** $A \cup E \ = \ E \cup A = E$
  (l'ensemble E est l'élément absorbant de la loi $\cup$)
- ***d.*** $A \cup A \ = \ A$
  (tout élément A est idempotent pour la loi $\cup$)
- ***e.*** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  (la loi $\cup$ est associative)

2) *Propriétés liant $\cup$ et $\subset$:*

- ***a.*** $A \subset A \cup B$ *et* $B \subset A \cup B$
- ***b.*** $A \subset B \ \Rightarrow \ A \cup C \subset B \cup C$
- ***c.*** $\left.\begin{array}{c} A \subset B \\ C \subset D \end{array}\right\} \Rightarrow \ A \cup C \subset B \cup D$
- ***d.*** $A \cup B = A \ \Leftrightarrow \ B \subset A$

Démonstration.
La seule difficulté de la démonstration réside dans la rédaction.
À titre d'illustration, développons les points ***2)c.*** et ***2)d.***

c. Supposons $A \subset B$ et $C \subset D$ et démontrons $A \cup C \ \subset \ B \cup D$.

Soit $x \in A \cup C$.
Ceci signifie que $x \in A$ ou $x \in C$. Deux cas se présentent alors :

- × si $x \in A$: alors, comme $A \subset B$, on a $x \in B$.
  Or B $B \cup D$. On en déduit, comme $x \in B$ que $x \in B \cup D$.
- × si $x \notin A$: alors, comme $x \in A \cup C$, on a forcément $x \in C$.
  Or $C \subset D \subset B \cup D$. Comme $x \in C$, on en déduit que $x \in B \cup D$.

On en déduit que $x \in B \cup D$.

On remarque au passage que la propriété ***2)b.*** est un cas particulier de cette propriété ***2)c.*** En effet, il suffit d'appliquer ***2)c.*** avec $D = C$ pour obtenir la propriété ***2)b.***

d. Il s'agit ici de démontrer une équivalence.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons $A \cup B = A$ et démontrons $B \subset A$.

Soit $x \in B$.
Comme $B \subset A \cup B = A$, alors $x \in A$.
($B \subset A \cup B = A$ est une démonstration suffisante et qui permet de ne pas avoir à introduire d'élément)

($\Leftarrow$) Supposons $B \subset A$ et démontrons $A \cup B = A$.
Il s'agit ici de démontrer une égalité. On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $x \in A \cup B$.
Ceci signifie que $x \in A$ ou $x \in B$. Deux cas se présentent alors :

- × si $x \in A$: alors on a bien $x \in A$.
- × si $x \notin A$: alors, comme $x \in A \cup B$, on a forcément $x \in B$.
  Or $B \subset A$. Comme $x \in B$, on en déduit que $x \in A$.

($\supset$) $A \cup B \supset A$ (c'est la $2^{\text{ème}}$ propriété).

□

Traiter une hypothèse du type $x \in A \cup B$

- Une hypothèse de la forme $x \in A \cup B$ signifie soit que $x \in A$, soit que $x \in B$ (éventuellement x appartient à la fois à A et à B). Pour traiter correctement ce type d'hypothèse, on réalise une disjonction de cas.

> *...début de démonstration ...*
> `Ainsi` $x \in A \cup B$. `Deux cas se présentent alors :`
>
> $\times$ `si` $x \in A$ `:`
> *...démonstration ...*
>
> $\times$ `si` $x \notin A$ `: alors, comme` $x \in A \cup B$, `on a` $x \in B$.
> *...démonstration ...*

- Une étude de cas se doit d'être exhaustive (c'est-à-dire de traiter tous les cas). C'est quelque chose que l'on retrouve naturellement en informatique lorsqu'on effectue un branchement conditionnel (utilisation d'un `if`). En effet, la dernière branche n'est autre qu'un `else` et cette branche est visitée dans le cas où aucune autre condition précédente n'est vérifiée. La rédaction précédente met en avant le caractère exhaustif de l'étude de cas. On teste initialement si x est un élément de A et dans ce cas, on entre dans la première branche de la démonstration. **Sinon** (c'est-à-dire si x n'est pas élément de A), on entre dans la dernière branche de la démonstration.

III.3. Intersection de parties de E

Définition

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

- On appelle **intersection** de A et B et on note $A \cap B$ **l'ensemble** suivant.

$$\boxed{A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \texttt{ ET } (x \in B)\}}$$

- Autrement dit, pour $x \in E$, on a : $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \texttt{ ET } (x \in B)$.
- Deux ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.

Généralisation

Soit I un ensemble (d'indices).

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E ($\forall i \in I$, $A_i \subset E$).

- On note $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ la réunion de toutes les éléments de la famille $(A_i)_{i\in I}$.

$$\boxed{\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}}$$

- Autrement dit, pour $x \in E$, on a : $\boxed{x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i}$.

Dans le cas où $I = [\![1,3]\!]$ (par exemple) :

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i\in[\![1,3]\!]} A_i &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,3]\!], x \in A_i \\ &\Leftrightarrow (x \in A_1) \texttt{ ET } (x \in A_2) \texttt{ ET } (x \in A_3) \end{aligned}$$

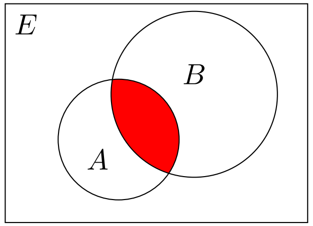
Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ est noté $\bigcap\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$.

Dans le cas où $I = [\![m,n]\!]$ (pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$), $\bigcap\limits_{i\in[\![m,n]\!]} A_i$ est noté $\bigcap\limits_{i=m}^{n} A_i$.

Dans le cas où $I = \varnothing$, $\bigcap\limits_{i\in\varnothing} A_i = E$.

Représentation graphique

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.



$A \cap B$

Proposition 4. *(élémentaires)*

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

1) *Propriétés de la loi $\cap$:*

- ***a.*** $A \cap B = B \cap A$
  (la loi $\cap$ est commutative)
- ***b.*** $A \cap E \;=\; E \cap A = E$
  (l'ensemble E est l'élément neutre de la loi $\cap$)
- ***c.*** $A \cap \varnothing \;=\; \varnothing \cap A = \varnothing$
  (l'ensemble vide est l'élément absorbant de la loi $\cap$)
- ***d.*** $A \cap A \;=\; A$
  (tout élément A est idempotent pour la loi $\cap$)
- ***e.*** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  (la loi $\cap$ est associative)

2) *Propriétés liant $\cap$ et $\subset$:*

- ***a.*** $A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B$
- ***b.*** $A \subset B \;\Rightarrow\; A \cap C \subset B \cap C$
- ***c.*** $\left.\begin{array}{c} A \subset B \\ C \subset D \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; A \cap C \subset B \cap D$
- ***d.*** $A = A \cap B \;\Leftrightarrow\; A \subset B$

Démonstration.

À titre d'illustration, développons les points ***2)c.*** et ***2)d.***

c. Supposons $A \subset B$ et $C \subset D$ et démontrons $A \cap C \;\subset\; B \cap D$.

Soit $x \in A \cap C$.

Ceci signifie que $x \in A$ et $x \in C$.

- × comme $x \in A$ et $A \subset B$ alors $x \in B$.
- × comme $x \in C$ et $C \subset D$ alors $x \in D$.

On en déduit que $x \in B \cap D$.

La propriété ***2)b.*** est un cas particulier de cette propriété ***2)c.*** (il suffit d'appliquer ***2)c.*** avec $D = C$ pour obtenir la propriété ***2)b.***).

d. Il s'agit ici de démontrer une équivalence.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons $A = A \cap B$ et démontrons $A \subset B$.
Il suffit d'appliquer la propriété ***a.*** : $A = A \cap B \subset B$.

($\Leftarrow$) Supposons $A \subset B$ et démontrons $A = A \cap B$.
Il s'agit ici de démontrer une égalité. On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $x \in A$.
Comme $A \subset B$ alors on a aussi $x \in B$.
Ainsi : $x \in A \cap B$.

($\supset$) Soit $x \in A \cap B$.
Ceci signifie notamment que $x \in A$ (et $x \in B$). □

Exercice 3

Déterminer les ensembles suivants.

a) $]0,3[\;\cup\; [2,5]$

b) $]0,3[\;\cap\; [2,5]$

c) $\big(]0,3[\;\cup\;]5,9[\big) \;\cap\; [1,6]$

d) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1-\tfrac{1}{n}[$

e) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}[$

f) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}[$

III.4. Complémentaire d'une partie

Définition

Soit A une partie d'un ensemble E.

- On appelle **complémentaire** de A dans E et on note $\overline{A}^E$ l'ensemble suivant.

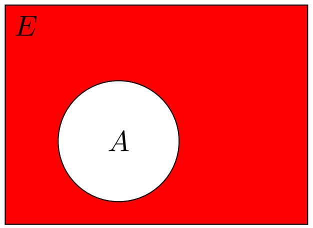
$$\boxed{\overline{A}^E = \{x \in E \mid x \notin A\}}$$

(le B.O. recommande d'utiliser la notation $\overline{A}$, moins précise, mais plus agréable, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de travail E)

- Autrement dit, pour $x \in E$, on a : $x \in \overline{A}^E \Leftrightarrow \texttt{NON}(x \in A)$.
- On trouvera aussi la notation (autorisée) A^c pour désigner le complémentaire de la partie A.

Représentation graphique

Soit A une partie d'un ensemble E.



$\overline{A}^E$

Proposition 5. *(élémentaires)*

Soit E un ensemble.

Soit A une partie de E.

$$\boxed{\left(\overline{\overline{A}^E}^E\right) = A} \qquad \boxed{\overline{E}^E = \varnothing} \qquad \boxed{\overline{\varnothing}^E = E}$$

III.5. Des opérations ensemblistes vers les fonctions : notion d'indicatrice d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble et soit A une partie de E.

- On appelle fonction indicatrice de la partie A est on note $\mathbb{1}_A$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A & : & E & \to & \{0,1\} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Remarque

- La notion d'ensemble est intimement liée à la notion d'appartenance : connaître les éléments d'un ensemble c'est connaître cet ensemble. La fonction indicatrice d'un ensemble n'est qu'une réécriture de la propriété d'appartenance. Cette réécriture peut être synthétisée par la propriété :

$$\boxed{\forall x \in E,\ \big(x \in A \ \Leftrightarrow\ \mathbb{1}_A(x) = 1\big)}$$

- La fonction indicatrice d'un ensemble permet de connaître l'appartenance d'un élément à cet ensemble. De ce fait, elle caractérise cet ensemble :
  - × tout ensemble $A \subset E$ admet une unique fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$,
  - × inversement, toute fonction de E dans $\{0,1\}$ est la fonction indicatrice d'un unique ensemble $A \subset E$.

  On trouve parfois dans la littérature (mais pas dans le programme officiel), le nom de « fonction caractéristique de l'ensemble A ».
- Dans les paragraphes précédents, on s'est concentré sur les opérations ensemblistes. Les formules présentes dans ces paragraphes établissent des égalités entre ensembles. Avec les fonctions indicatrices, on change de point de vue : on passe des ensembles aux entiers et plus précisément à 0 et 1. On peut alors établir des formules sur des entiers et à du calcul sur ces entiers.

Proposition 6.

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

a) $\boxed{A = B \ \Leftrightarrow\ \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B}$

b) $\boxed{A \subset B \ \Leftrightarrow\ \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B}$

c) $\boxed{\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)}$

d)
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \forall x \in E,\ \mathbb{1}_{A \cup B}(x) & = & \max\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) \\ & = & \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) \end{array}}$$

e) $\boxed{\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)}$

Démonstration.
On développe ici uniquement la démonstration du point ***c)***.
Les autres sont laissées en exercice.

c) Soit $x \in E$. Deux cas se présentent.

- Si $x \in A \cap B$ alors :
  - × $x \in A$ et donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$.
  - × $x \in B$ et donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$.

  Finalement :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A \cap B}(x) & = & 1 & \textit{(puisque } x \in A \cap B\textit{)} \\ & = & \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)\textit{)} \\ & = & \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } x \in A \cap B,\ \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x).}$$

- Si $x \notin A \cap B$ alors $x \in \overline{A \cap B}$ est vérifiée ou encore $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
  Deux cas se présentent :
  - × si $x \in \overline{A}$ alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$. Ainsi :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A \cap B}(x) & = & 0 & \textit{(puisque } x \notin A \cap B\textit{)} \\ & = & \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \end{array}$$
  - × si $x \notin \overline{A}$ alors comme $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ on a forcément $x \in \overline{B}$. Alors :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A \cap B}(x) & = & 0 & \textit{(puisque } x \notin A \cap B\textit{)} \\ & = & \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } x \notin A \cap B,\ \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x).}$$ □

Remarque

- Les fonctions indicatrices peuvent être utilisée pour définir, de manière, à l'aide d'une écriture condensée, une fonction définie par cas et qui est nulle sur un ensemble. Considérons par exemple la fonction f définie par :
$$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \textit{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ \mathrm{e}^{-x} & \textit{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$
  Cette fonction peut aussi être définie par la propriété :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$
- Notons au passage que les fonctions indicatrices peuvent être utilisées en intégration :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\ dx \ = \ \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ dx$$
  Mais encore faudrait-il savoir intégrer sur $\mathbb{R}$ (on n'en est pas là !).

III.6. Propriétés combinant les opérateurs de réunion, intersection et passage au complémentaire

Proposition 7. *(lien ∪, ∩ et passage au complémentaire)*

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

- $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
  (la loi ∩ est distributive par rapport à la loi ∪)
- $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$
  (la loi ∪ est distributive par rapport à la loi ∩)
- $\boxed{\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}}$ *et* $\boxed{\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}}$
  (lois de de Morgan)
- $A \cup \overline{A} = E$ *et* $A \cap \overline{A} = \varnothing$

Remarque

- La définition des opérateurs ensemblistes fait apparaître un lien fort entre ceux-ci et les connecteurs logiques usuels. Mettons en avant ces liens.

$$\begin{array}{ccc}
\texttt{ET}\ \textit{(noté aussi } \wedge) & \longleftrightarrow & \cap \\
\texttt{OU}\ \textit{(noté aussi } \vee) & \longleftrightarrow & \cup \\
\texttt{NON}(a)\ \textit{(noté aussi } \bar{a}) & \longleftrightarrow & \bar{A} \\
\Rightarrow & \longleftrightarrow & \subset \\
\Leftrightarrow & \longleftrightarrow & = \\
faux & \longleftrightarrow & \varnothing \\
vrai & \longleftrightarrow & E
\end{array}$$

- Ce dictionnaire permet de traduire les propriétés énoncés au-dessus en des propositions logiques. On retrouve notamment les lois de de Morgan énoncées dans le **CH I**.
- Il est à noter que l'inclusion se traduit par une implication.
  Ceci provient de l'écriture :

$$A \subset B \Leftrightarrow \Big(\forall x \in E,\ (x \in A) \Rightarrow (x \in B) \Big)$$

III.7. Partition d'un ensemble E

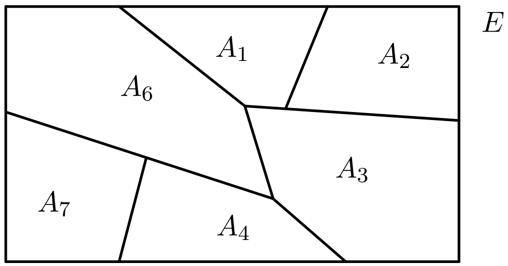
Définition

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E.

- On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est une **partition** de l'ensemble E si les propriétés suivantes sont vérifiées :
  (i) $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$
  (ii) $\forall (i,j) \in I \times I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$
  (les ensembles sont deux à deux disjoints)
  (iii) $E = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$

Représentation graphique

Soit $(A_i)_{i \in [\![1,7]\!]}$ une famille de parties d'un ensemble E.



La famille $(A_1, \dots, A_7)$ est une partition de E.

Remarque

La notion de partition est à rapprocher de celle de puzzle.
Les pièces sont les ensembles A_i de la partition. Posées les unes à côté des autres, ces pièces forment l'image à reconstituer c'est-à-dire l'ensemble E.

III.8. Recouvrement d'une partie F

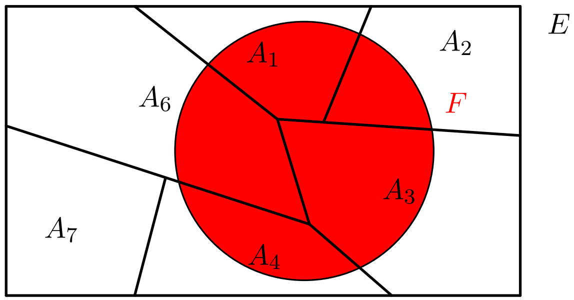
Définition

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E.

Soit F une partie de E.

- On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement** de l'ensemble F si les propriétés suivantes sont vérifiées :
  - ***(i)*** $\cancel{\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing}$
  - ***(ii)*** $\cancel{\forall (i,j) \in I \times I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing}$
  - ***(iii)*** $F \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$

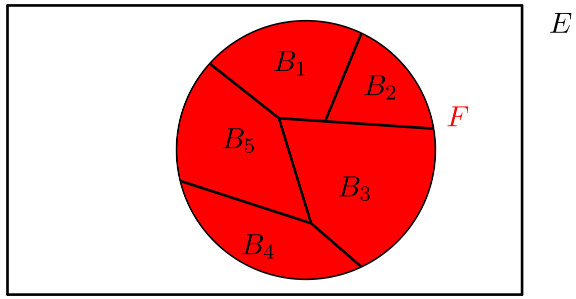
Représentation graphique



- La famille $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7)$ est un recouvrement de l'ensemble F (représenté par le disque rouge).
- La famille $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ est aussi un recouvrement de l'ensemble F.
- La famille $(A_4, A_1, A_2, \varnothing, A_3, A_4, A_5, A_6, \varnothing)$ est aussi un recouvrement de l'ensemble F.

Remarque

- Dans la définition, on a repris la présentation de partition afin de mettre en avant les points communs et les différences avec cette notion.
  Plus précisément :
  - × un (ou plusieurs) élément(s) de la famille $(A_i)_{i\in I}$ peut tout à fait être l'ensemble vide $\varnothing$.
  - × les éléments de la famille $(A_i)_{i\in I}$ ne sont pas forcément deux à deux disjoints.
  - × la réunion des parties de la famille recouvre tout F mais peut tout à fait « déborder ».
- Remarquons au passage que la définition de partition est plus exigeante que celle de recouvrement. Il en résulte que toute partition est un recouvrement (mais un recouvrement ne constitue par forcément une partition !).
- Lorsque les éléments du recouvrement sont 2 à 2 disjoints, on parle de **recouvrement disjoint**.
- Une partition peut être vue comme un recouvrement particulier. En effet, une partition d'un ensemble F est un recouvrement disjoint dont tous les éléments sont des parties de F. Reprenons le schéma précédent pour illustrer ce propos.



La famille $(B_1, \dots, B_5)$ est une partition de F.

III.9. Différence ensembliste de parties de E

Définition

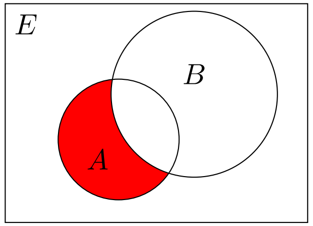
Soient A, B des parties d'un ensemble E.

- On appelle **différence ensembliste** de A et B et on note $A \setminus B$ l'ensemble suivant.

$$\boxed{\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in E \mid (x \in A) \text{ ET } (x \notin B)\} \\ &= A \cap \overline{B}^E \end{aligned}}$$

Représentation graphique

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.



$A \setminus B$

Proposition 8.

Soit E un ensemble et A une partie de E.

$$\boxed{\overline{A}^E = E \setminus A}$$

IV. Produit cartésien de deux ensembles

Définition

Soient E et F deux ensembles.

- Le **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y un élément de F.

$$\boxed{E \times F = \big\{(x, y) \mid x \in E \text{ ET } y \in F\big\}}$$

- Ainsi, tout élément u de l'ensemble $E \times F$ s'écrit sous la forme $u = (u_1, u_2)$ avec $u_1 \in E$ et $u_2 \in F$.

Remarque

- On a utilisé dans cette définition la notion intuitive de couple. Un couple est une paire **ordonnée** d'éléments. Ainsi le couple (x, y) ne doit pas être confondu avec (y, x). Plus précisément, on a :

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \text{ ET } y_1 = y_2)$$

- Lorsque $E = F$, on note $E \times E$ ou tout simplement E^2.

  Ainsi, on écrira sans distinction $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

- Cette définition se généralise à un nombre fini d'ensembles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  L'ensemble $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est constitué des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in E_i$.

  Dans le cas où $E_1 = \ldots = E_n$, on écrit sans distinction E^n ou $E \times \ldots \times E$.

  En particulier : $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

- Si E a p éléments et F a q éléments, l'ensemble $E \times F$ compte pq éléments.

Exercice 4

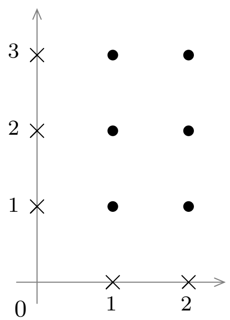
Soient E et F deux ensembles.

Soient A une partie de E ($A \subset E$) et B une partie de F ($B \subset F$).

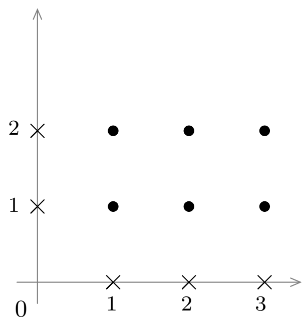
Montrer : $A \times B \subset E \times F$.

Exemple

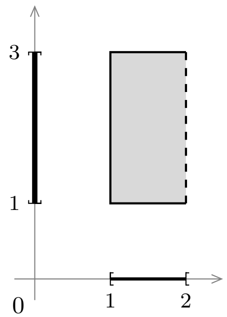
Représentation graphique de $E \times F$ où $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$



Représentation graphique de $E \times F$ où $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2\}$



Représentation graphique de $E \times F$ où $E = [1, 2[$ et $F = [1, 3]$



Exercice 5

1. Représenter graphiquement les ensembles suivants.

a) $A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ ***b)*** $B = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ***c)*** $C = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$

d) $D = \{1, 2, 3\} \times [1, 2]$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\} \times \{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y^2 \leqslant 9\}$

f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2 \;\text{ et }\; 1 \leqslant y \leqslant 3\}$