CH VI : Équations différentielles linéaires

I. Rappels d'intégration sur un segment

I.1. Primitives sur un intervalle I

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

- On appelle **primitive de** f **sur** I toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

  a) F est dérivable sur I.

  b) $F' = f$.

Théorème 1.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

$$\boxed{f \text{ continue sur un } \textbf{intervalle } I \quad \Rightarrow \quad f \text{ admet une primitive sur } I}$$

Démonstration.
Admis. □

Remarque (CULTURE)

- La démonstration classique de ce résultat consiste à définir proprement la notion d'intégrale sur un segment $[a,b]$ d'une fonction continue sur $[a,b]$. Pour chaque subdivision $\mathscr{S}$: $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_i < \ldots < a_n = b$, on considère le minimum et le maximum de f sur $[a_i, a_{i+1}]$ et on définit :

  × $m(f, \mathscr{S})$ la somme des aires des rectangles sous la courbe de f.

  × $M(f, \mathscr{S})$ la somme des aires des rectangles au-dessus de la courbe de f.

  (le dessin suivant illustre cette définition)

- On considère alors toutes les subdivisions possibles et on récupère :

  × $I_m = \max\limits_{\mathscr{S}} \ m(f, \mathscr{S})$, plus grande valeur sous-approchée de l'aire.

  × $I_M = \min\limits_{\mathscr{S}} \ M(f, \mathscr{S})$, plus petite valeur sur-approchée de l'aire.

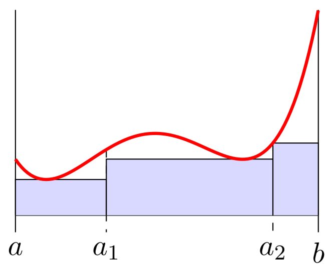
  Lorsque $I_m = I_M$, on dit que f est intégrable sur $[a,b]$ et on note :

$$\int_a^b \ f(t) \ dt = I_m = I_M$$

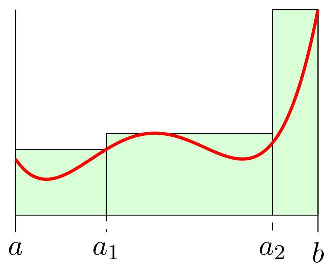
- La primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a est alors la fonction :

$$x \mapsto \int_a^x \ f(t) \ dt \quad \textit{(intégrale sur } [a,x]\textit{)}$$

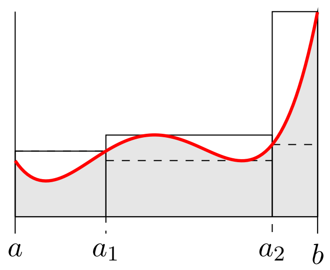
Représentation graphique.



Sous-approximation de l'aire sur la subdivision $\mathscr{S}$: (a_0, a_1, a_2, a_3)



Sur-approximation de l'aire sur la subdivision $\mathscr{S}$: (a_0, a_1, a_2, a_3)



L'aire sous la courbe sur le segment $[a,b]$ est comprise entre $m(f, \mathscr{S})$ et $M(f, \mathscr{S})$ pour la subdivision $\mathscr{S}$

Théorème 2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.

Soit F une primitive de f sur I.

1) $\boxed{\text{$G$ est une primitive de f sur I} \Leftrightarrow \text{Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : } \forall x \in I,\ G(x) = F(x) + \lambda}$

(on en déduit notamment que f admet une infinité de primitives sur I)

2) *Soit $c \in I$.*
Il existe une unique primitive de f sur I s'annulant en c.
C'est la fonction $x \mapsto F(x) - F(c)$.

Démonstration.

1) $(\Rightarrow)$ Soit G est une primitive de f sur I et soit $x \in I$. Par définition :

$$G'(x) = f(x) = F'(x)$$

On en déduit que $F'(x) - G'(x) = 0$ ou encore : $(F - G)'(x) = 0$.
La dérivée de $F - G$ étant nulle sur I, la fonction $F - G$ est constante sur cet intervalle :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ (F - G)(x) = \lambda$$

$(\Leftarrow)$ Si $G = F + \lambda$, alors G est dérivable sur I car F l'est. De plus :

$$\forall x \in I,\ G'(x) = F'(x) = f(x)$$

et G donc une primitive de f sur I.

2) Soit G une primitive de f sur I.
D'après le point précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$G(x) = F(x) + \lambda$$

Si G s'annule en c, on obtient : $G(c) = F(c) + \lambda = 0$ et donc $\lambda = -F(c)$.

□

I.2. Intégrale sur un segment d'une fonction continue

I.2.a) Définition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.

Soit F une primitive de f sur I et soit $(a, b) \in I^2$.
(on ne suppose pas ici $a < b$)

- On appelle **intégrale de** a **à** b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\ dt$ la quantité (le réel) :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Remarque

- La notion d'intégrale sur un segment est indépendante de la primitive choisie. En effet, si F et G sont deux primitives de f, alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ F = G + \lambda$$

  Ainsi : $F(b) - F(a) = (G(b) + \lambda) - (G(a) + \lambda) = G(b) - G(a)$.

- La lettre t de la définition est une variable muette.
  On notera donc, sans distinction :

$$\int_a^b f(t)\ dt \text{ ou } \int_a^b f(x)\ dx \text{ ou } \int_a^b f(u)\ du \ldots$$

- Il faut retenir que l'on définit ici la notion d'intégrale sur un segment.
  × Si $a < b$: comme f continue sur I, f est continue sur $[a, b]$ et on a défini l'intégrale sur $[a, b]$ de f.
  × Si $a \geqslant b$: alors f est continue sur $[b, a]$.

  Par ailleurs, cette définition permet d'obtenir le résultat classique :

$$\int_a^b f(t)\ dt = -\int_b^a f(t)\ dt$$

- En réalité, comme on l'a vu dans la remarque initiale de ce cours (`CULTURE`), l'existence d'une primitive pour une fonction continue sur un intervalle I fait intervenir la notion d'intégrale (c'est la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$).
  On tourne donc en rond lorsqu'on prétend définir $\int_a^b f(t)\ dt$ à l'aide d'une primitive. Le programme prend logiquement le parti, pour l'instant, d'éviter la démonstration d'existence de primitive (relativement technique) afin de se concentrer sur les aspects pratiques fournis par cette définition.

I.2.b) Propriétés de l'intégrale

Proposition 1.

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions **continues** *sur un intervalle I.*

Soit $(a, b, c) \in I^3$.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

- *Linéarité*

$$\boxed{\int_a^b \big(\lambda f + \mu g\big)(t)\ dt \ = \ \lambda \int_a^b f(t)\ dt + \mu \int_a^b g(t)\ dt}$$

- *Relation de Chasles*

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt}$$

- *Inégalité triangulaire*
  Supposons : $a \leqslant b$.

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \ \leqslant \ \int_a^b \big|f(t)\big|\ dt}$$

Proposition 2.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions **continues** *sur un intervalle I.*

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que : $a \leqslant b$.

Positivité

$$\boxed{\forall t \in [a, b],\ f(t) \geqslant 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0}$$

Croissance

$$\boxed{\forall t \in [a, b],\ f(t) \geqslant g(t) \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(t)\ dt \geqslant \int_a^b g(t)\ dt}$$

Proposition 3.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** *sur un intervalle I.*

Soit $(a, b) \in I^2$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur } I \\[2mm] \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = 0 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \forall t \in [a, b],\ f(t) = 0}$$

I.3. Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$

- On dit que f est **continue** sur I si les fonctions $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont.
- On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ ou $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes continues sur I.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur I.

Soit $(a, b) \in I^2$.

On appelle **intégrale** de f entre a et b le nombre complexe :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_a^b \mathrm{Re}\,(f)\,(t)\ dt + i \int_a^b \mathrm{Im}\,(f)\,(t)\ dt}$$

Proposition 4.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur I.

Soit $(a, b) \in I^2$.

On déduit de la définition précédente :

1) $$\boxed{\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\ dt\right) \ = \ \int_a^b \mathrm{Re}\,(f)\,(t)\ dt}$$

2) $$\boxed{\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\ dt\right) \ = \ \int_a^b \mathrm{Im}\,(f)\,(t)\ dt}$$

Proposition 5.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur I.

Soit $(a, b) \in I^2$.

$$\boxed{\overline{\int_a^b f(t)\ dt} \ = \ \int_a^b \overline{f(t)}\ dt}$$

I.4. Calcul d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment

I.4.a) Calcul de primitives « à vue »

Principe.

Il s'agit ici de calculer une intégrale en devinant une de ses primitives. Autrement dit, il faut être capable de voir la fonction f à intégrer comme la dérivée d'une autre fonction.

Exemple

- $\displaystyle\int_0^1 5\ dt = [\ 5\ t\ ]_0^1 = 5\,(1-0) = 5$
- $\displaystyle\int_0^1 t^2\ dt = \left[\ \frac{1}{3}\ t^3\ \right]_0^1 = \frac{1}{3}\,(1-0) = \frac{1}{3}$
- $$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{t}\ dt &= \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\ dt \\ &= \left[\ \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\ \left[\ t\ \sqrt{t}\ \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\,(1-0) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$
- $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{1}{t}\ dt = [\ \ln(|t|)\ ]_{-1}^{-2} = \ln(|-2|) - \ln(|-1|) = \ln(2) - \cancel{\ln(1)}$
- $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\ dt = [\ \mathrm{e}^t\ ]_0^1 = (\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0) = \mathrm{e}^1 - 1$

- $$\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)^3}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2t\,(t^2+1)^{-3}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{(t^2+1)^{-2}}{-2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(t^2+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1}\right) = \frac{3}{16}$$

- $$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2t\,(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \cancel{\frac{1}{2}}\left[\frac{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}}\right]_0^1 = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2}-\sqrt{1} = \sqrt{2}-1$$

- $$\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln(|t^2+1|)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln(2)-\cancel{\ln(1)}\right)$$

- $$\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt = -\int_1^2 \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\,dt = -\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\right]_1^2 = -\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{1}}\right) = \mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}$$

Primitives classiques.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto a$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a\,x$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$)	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{-*}$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$
$x \mapsto a^x$ (avec $a>0$ et $a \neq 1$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)}$
$x \mapsto \sin(x)$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$I \subset \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)	$x \mapsto \ln\left(\lvert\cos(x)\rvert\right)$

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$I \subset \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$
$x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$ (avec $a \neq 0$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{a} \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (avec $a \neq 0$)	$I \subset \left]-a, a\right[$	$x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$
$x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (avec $a \neq 0$)	$I \subset \left]-a, a\right[$	$x \mapsto \arccos\left(\dfrac{x}{a}\right)$

Remarque

Il ne faut pas confondre x^α (avec $\alpha \neq -1$) et a^x (avec $a > 0$) :

× pour tout $x > 0$: $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.

× pour tout $x \in \mathbb{R}$: $a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}$.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	× u dérivable sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	× u dérivable sur I. × $u(I) \subset \mathbb{R}_+^*$.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	× u dérivable sur I. × $u(I) \subset \mathbb{R}^*$.	$x \mapsto \ln(\lvert u(x)\rvert)$
$x \mapsto u'(x)\ v\big(u(x)\big)$	× u dérivable sur I. × $u(I) \subset \mathcal{D}_v$	$x \mapsto v\big(u(x)\big)$

Remarque

- Il faut penser à la forme $x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ dès que la fonction à intégrer contient une puissance. Par exemple :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\,dt &= \int_0^1 \frac{t}{(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2t\,(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right]_0^1 = \left[\sqrt{t^2+2}\,\right]_0^1 = \sqrt{3}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

- Cette primitive classique est parfois présentée sous la forme suivante :

$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{(u(x))^\beta}$ (avec $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)	× u dérivable sur I. × $u > 0$ sur I.	$x \mapsto -\dfrac{1}{\beta-1}\,\dfrac{1}{(u(x))^{\beta-1}}$

La dernière formule du tableau précédent permet de retrouver les autres primitives usuelles de composées.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto u'(x)\ \mathrm{e}^{u(x)}$	$\times$ u dérivable sur I.	$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$
$x \mapsto u'(x)\ \sin(u)$	$\times$ u dérivable sur I.	$x \mapsto -\cos\big(u(x)\big)$
$x \mapsto u'(x)\ \cos(u)$	$\times$ u dérivable sur I.	$x \mapsto \sin\big(u(x)\big)$
$x \mapsto u'(x)\ \mathrm{sh}(u)$	$\times$ u dérivable sur I.	$x \mapsto \mathrm{ch}\big(u(x)\big)$
$x \mapsto u'(x)\ \mathrm{ch}(u)$	$\times$ u dérivable sur I.	$x \mapsto \mathrm{sh}\big(u(x)\big)$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{1+\big(u(x)\big)^2}$	$\times$ u dérivable sur I.	$x \mapsto \arctan\big(u(x)\big)$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-\big(u(x)\big)^2}}$	$\times$ u dérivable sur I. $\times$ $u(I) \subset\ ]-1,1[$	$x \mapsto \arcsin\big(u(x)\big)$

I.4.b) Intégration par parties d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment

Théorème 3.

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.
Soit $(a,b) \in I^2$.

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt = \big[\ u(t)\ v(t)\ \big]_a^b - \int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt}$$

Ce qu'on peut lire :

$$\boxed{\int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt = \big[\ u(t)\ v(t)\ \big]_a^b - \int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt}$$

Démonstration.
Pour simplifier les écritures, on suppose $a < b$.

- La fonction uv est $\mathcal{C}^1$ sur I comme produit de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur I.
  De plus :
  $$(uv)' = u'v + uv'$$
- Ainsi, la fonction uv est une primitive sur I de $u'v + uv'$.
  Cette dernière fonction est continue sur $[a,b]$ par somme/produit de fonctions continues sur $[a,b]$ (u $\mathcal{C}^1 \Rightarrow u'$ $\mathcal{C}^0$).
- On en déduit :
  $$\int_a^b (u'v+uv')(t)\ dt = \big[\ u(t)v(t)\ \big]_a^b$$
- Enfin, par linéarité de l'intégrale :
  $$\int_a^b (u'v+uv')(t)\ dt = \int_a^b (u'v)(t)\ dt + \int_a^b (uv')(t)\ dt$$

□

Remarque
Effectuer une IPP consiste donc à écrire la fonction dont on doit calculer l'intégrale comme un produit de deux fonctions ($u \times v'$) :

× dont l'une sera dérivée ($u \rightsquigarrow u'$),

× et l'autre sera intégrée ($v' \rightsquigarrow v$).

Exemple

- $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\ dt = [\ t\ln(t)\ ]_1^2 - \int_1^2 1\ dt = 2\ln(2) - 1$
- $\displaystyle\int_1^2 t^2\ln(t)\ dt = \frac{1}{3}\ [\ t^3\ln(t)\ ]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 t^2\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 t^k\ln(t)\ dt = \frac{1}{k+1}\left[\ t^{k+1}\ln(t)\ \right]_1^2 - \frac{1}{k+1}\int_1^2 t^k\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 (\ln(t))^2\ dt = [\ (\ln(t))^2\ ]_1^2 - 2\int_1^2 \ln(t)\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\ dt = -\frac{1}{2}\ [\ (t^2+1)^{-1}\ln(t)\ ]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t(1+t^2)}\ dt$
  Or $\displaystyle\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$ donc ...
- $\displaystyle\int_0^1 t^3\mathrm{e}^{t^2}\ dt = \frac{1}{2}\left[\ t^2\mathrm{e}^{t^2}\ \right]_0^1 - \int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\ dt = \dots$

`À RETENIR`

Il faut s'empresser de dériver la fonction ln : en la dérivant, on tombe sur le calcul de la primitive d'une fonction rationnelle.

Application : calcul d'une primitive de $\ln$

Soit $x > 0$.

Le calcul précédent fournit la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

$$\int_1^x \ln(t)\ dt = [\ t\ln(t)\ ]_1^x - \int_1^x 1\ dt = x\ln(x) - (x-1)$$

I.4.c) Changement de variable pour une intégrale d'une fonction continue

Théorème 4.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J = [\alpha, \beta]$ tq $\varphi([\alpha,\beta]) \subseteq I$.

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt}$$

Démonstration.

- La fonction f est continue sur l'intervalle I.
  Elle admet donc une primitive F sur I de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt &= [\ F(t)\ ]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= (F\circ\varphi)(\beta) - (F\circ\varphi)(\alpha) = [\ (F\circ\varphi)(t)\ ]_\alpha^\beta\end{aligned}$$

- Par composée, la fonction $F\circ\varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur J. De plus :

$$(F\circ\varphi)' = F'\circ\varphi \times \varphi' = f\circ\varphi\times\varphi'$$

- On en déduit :

$$[\ (F\circ\varphi)(t)\ ]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi\times\varphi'(t)\ dt$$

□

Aspect pratique

- Si on se réfère au théorème précédent, un changement de variable est la donnée d'une fonction φ.

$\hookrightarrow$ calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\varphi : t \mapsto \ln(t)$.

$$\left|\begin{array}{l} \varphi(t) = \ln(t) \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = \dfrac{1}{t} \\ \bullet\ \varphi(\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = e \\ \bullet\ \varphi(\beta) = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta = e^2 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[e, e^2]$.

On obtient : $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_e^{e^2} \frac{1}{t+1}\,\frac{1}{t}\,dt$.

On termine ce calcul en remarquant : $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$.

- En pratique, les changements de variable seront réalisés à l'aide de la méthode symbolique décrite ci-dessous.

<u>MÉTHODO</u> : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = e^t}$

$$\left|\begin{array}{l} u = e^t \ (\text{donc } t = \ln(u)) \\ \hookrightarrow du = e^t\,dt \quad \text{et} \quad dt = \dfrac{1}{e^t}\,du = \dfrac{1}{u}\,du \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = e^1 \\ \bullet\ t = 2 \ \Rightarrow\ u = e^2 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[e, e^2]$.

En remplaçant dt par $\dfrac{1}{u}\,du$ et e^t par u, on obtient :

$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_{e^1}^{e^2} \frac{1}{u+1}\,\frac{1}{u}\,du$$

ce qui correspond au calcul précédent.

- L'idée du changement de variable est de faire disparaître une partie « gênante » de la quantité $f(t)$. Ainsi, on posera souvent le changement de variable : « $u =$ la racine présente dans l'intégrale ».

<u>MÉTHODO</u> : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \sqrt{t}}$

$$\left|\begin{array}{l} u = \sqrt{t} \quad (\text{donc } t = u^2) \\ \hookrightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \quad \text{et} \quad dt = 2\sqrt{t}\,du = 2\,u\,du \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1} = 1 \\ \bullet\ t = 2 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto u^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \sqrt{2}]$.
On obtient :

$$\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2+u}\,2u\;du = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\cancel{u}(u+1)}\,2\cancel{u}\;du$$

$$= 2\left[\ \ln(|u+1|)\ \right]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$$

- <u>MÉTHODO</u> : calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\,dt$ en posant $\boxed{u = \sqrt{1+e^t}}$

$$\left|\begin{array}{l} u = \sqrt{1+e^t} \quad (\text{donc } e^t = u^2-1 \text{ et } t = \ln(u^2-1)) \\ \hookrightarrow du = \dfrac{e^t}{2\sqrt{1+e^t}}\,dt \quad \text{et} \quad dt = \dfrac{2\sqrt{1+e^t}}{e^t}\,du = \dfrac{2\,u}{u^2-1}\,du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1+e^0} = \sqrt{2} \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1+e} \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u^2-1)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\sqrt{2}, \sqrt{1+e}]$. On obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{\cancel{u}}\,\frac{2\,\cancel{u}}{u^2-1}\,du.$

On termine ce calcul en remarquant que : $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{u-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{u+1}$.

- On doit pouvoir repérer les changements de variable affines (ceux du type $\boxed{u = c\,t + d}$).

Exercice 1
Considérons par exemple : $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{2\,t+3}}\ dt$.
Montrer que $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_3^9 \frac{u-3}{\sqrt{u}}\ du$ et en déduire la valeur de I.

On effectue le changement de variable $\boxed{u = 2\,t + 3}$

$u = 2t + 3 \quad$ (donc $2\,t = u - 3$)
$\hookrightarrow du = 2\ dt \quad$ et $\quad dt = \dfrac{1}{2}\,du$
- $t = 0 \ \Rightarrow\ u = 2 \times 0 + 3 = 3$
- $t = 3 \ \Rightarrow\ u = 2 \times 3 + 3 = 9$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \dfrac{u-3}{2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[3, 9]$.
On obtient : $I = \displaystyle\int_3^9 \frac{\frac{1}{2}(u-3)}{\sqrt{u}}\ \frac{1}{2}\ du = \frac{1}{4}\int_3^9 \frac{u-3}{\sqrt{u}}\ du$.
Or : $\dfrac{u-3}{\sqrt{u}} = \dfrac{u}{\sqrt{u}} - \dfrac{3}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} - \dfrac{3}{\sqrt{u}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
4\ I &= \int_3^9 \sqrt{u}\ du - 3\int_3^9 \frac{1}{\sqrt{u}}\ du \\
&= \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_3^9 - 3\left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_3^9 \ = \ \frac{2}{3}\left(9\sqrt{9} - 3\sqrt{3}\right) - 6\left(\sqrt{9} - \sqrt{3}\right) \\
&= \cancel{6\sqrt{9}} - 2\sqrt{3} - \cancel{6\sqrt{9}} + 6\sqrt{3} \ = \ 4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Donc $I \ = \ \sqrt{3}$.

I.5. Méthodes de calculs d'intégrales

I.5.a) Intégrande de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $(b,c) \in \mathbb{R}^2$.

MÉTHODO **Calcul d'intégrale de type $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx$**

On note Δ le discriminant du polynôme P défini par $P(X) = aX^2+bX+c$. Trois cas se présentent.

- si $\Delta > 0$, alors le polynôme P admet deux racines réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  1) On décompose la fraction rationnelle $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ en éléments simples.
  2) On est alors ramené à un intégrande du type $x \mapsto \alpha \left(\dfrac{\beta_1}{x-x_1} + \dfrac{\beta_2}{x-x_2}\right)$ dont on sait déterminer une primitive à vue.
- si $\Delta = 0$, alors le polynôme P admet une unique racine : $x_0 = \dfrac{b}{2a}$.
  1) On commence par remarquer : $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx = \int \frac{1}{a\,(x-x_0)^2}\, dx$.
  2) On effectue le changement de variable $\boxed{t = x - x_0}$.
  3) On est alors ramené à un intégrande du type $t \mapsto \dfrac{1}{a\,t^2}$ dont on sait déterminer une promitive à vue.
- si $\Delta < 0$, alors :
  1) On commence par mettre l'expression ax^2+bx+c sous forme canonique. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right)
\end{aligned}$$

  2) On effectue ensuite le changement de variable $\boxed{t = x + \dfrac{b}{2a}}$.
  3) On est alors ramené à un intégrande du type $t \mapsto \dfrac{1}{a}\,\dfrac{1}{t^2+\alpha^2}\, dt$ (où $\alpha = \sqrt{\dfrac{|\Delta|}{4a^2}}$) dont on sait déterminer une primitive à vue.

Exercice 2

1. Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x^2-3x+2}\, dx$.

I.5.b) Intégrande de la forme Polynôme × Exponentielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Soit $c \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\texttt{MÉTHODO}}$ **Calcul d'intégrale de type** $\displaystyle\int (a_0 + \cdots + a_n\, x^n)\, \mathrm{e}^{cx}\ dx$

1) On commence par effectuer une IPP en dérivant la fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n$ et en « primitivant » la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{cx}$.

2) On itère le procédé jusqu'à faire disparaître le terme polynomial.

⚠ Ne pas inventer de méthodes. Celle présentée ci-dessus n'est valide qu'avec la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{cx}$ où c est une constante.
En particulier, elle n'est pas valide avec des fonctions du type $\cancel{x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}}$, $\cancel{x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$, $\cancel{x \mapsto \mathrm{e}^{\ln(x)}}$...

Exercice 3 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2x+3)\, \mathrm{e}^x\ dx$.

I.5.c) Intégrande de la forme Polynôme × Logarithme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

$\boxed{\texttt{MÉTHODO}}$ **Calcul d'intégrale de type** $\displaystyle\int (a_0 + \cdots + a_n\, x^n)\ \ln(x)\ dx$

1) On commence par effectuer une IPP en dérivant la fonction ln et en « primitivant » la fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n$.

2) On obtient une expression polynomiale dont on sait obtenir une primitive à vue.

Exercice 4

1) Calculer $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\ dx$.

2) Calculer $\displaystyle\int_1^2 (x^2+3)\ \ln(x)\ dx$.

I.5.d) Intégrande de la forme Polynôme × Sinus/Cosinus

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

$\boxed{\texttt{MÉTHODO}}$ **Calcul d'intégrale de type** $\displaystyle\int (a_0 + \cdots + a_n\, x^n)\ \cos(x)\ dx$

1) On commence par effectuer une IPP en dérivant la fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n$ et en « primitivant » la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

2) On itère le procédé jusqu'à faire disparaître le terme polynomial.

On procède de la même manière pour une intégrale du type $\displaystyle\int (a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n)\ \sin(x)\ dx$.

Exercice 5

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\ \cos(x)\ dx$.

I.5.e) Intégrande de la forme Exponentielle × Sinus/Cosinus

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

MÉTHODO **Calcul de $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax} \cos(bx)\ dx$ et $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\ dx$**

1) On commence par écrire la fonction cos ou sin sous la forme d'une exponentielle complexe.

a) On écrit :

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{ax} \cos(bx)\ dx &= \int \mathrm{e}^{ax}\ \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ibx}\right)\ dx \\ &= \int \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{e}^{ibx}\right)\ dx \\ &= \int \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(a+ib)x}\right)\ dx\end{aligned}$$

b) On obtient de même : $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\ dx = \int \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(a+ib)x}\right)\ dx$

2) On utilise les propriétés reliant l'intégrale avec la partie réelle et la partie imaginaire.

a) $\displaystyle\int \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(a+ib)x}\right)\ dx = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^{(a+ib)x}\ dx\right)$

b) $\displaystyle\int \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(a+ib)x}\right)\ dx = \mathrm{Im}\left(\int \mathrm{e}^{(a+ib)x}\ dx\right)$

3) On calcule $\displaystyle\int \mathrm{e}^{(a+ib)x}\ dx$ grâce à une primitive à vue.

4) On conserve la partie réelle ou la partie imaginaire pour conclure.

N.B. : on procède de même si un polynôme est en facteur d'une telle expression.

Exercice 6
Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \sin(3x)\ dx$.

I.5.f) Intégrande de la forme Polynôme en Sinus et Cosinus

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

MÉTHODO **Calcul d'intégrale de type $\displaystyle\int \sin^p(x) \cos^q(x)\ dx$**

Trois se présentent :

- si p est impair :
  1) on effectue le changement de variable $\boxed{t = \cos(x)}$.
  2) on est ainsi ramené à un intégrande polynomiale dont on peut déterminer une primitive à vue.
- si q est impair :
  1) on effectue le changement de variable $\boxed{t = \sin(x)}$.
  2) on est ainsi ramené à un intégrande polynomiale dont on peut déterminer une primitive à vue.
- si p et q sont pairs :
  1) on linéarise $\sin^p(x) \cos^q(x)$
  2) on est ainsi ramené à un intégrande dont on peut déterminer une primitive à vue.

Exercice 7
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(x) \cos^3(x)\ dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x) \sin^5(x)\ dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x) \sin^2(x)\ dx$

II. Généralités sur les équations différentielles

II.1. Solution d'une équation différentielle

Définition

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit F une application de $\mathbb{R} \times \big(\mathcal{F}(I, \mathbb{K})\big)^{p+1}$ dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

- On appelle **équation différentielle d'ordre** p une équation fonctionnelle de la forme :

$$\boxed{F\big(t, y, y', \ldots, y^{(p)}\big) \; = \; 0 \qquad (E)}$$

- On dit de plus que cette équation est :

  × **linéaire** si la fonction F est linéaire en les variables y, y', …, $y^{(p)}$, c'est-à-dire si l'équation (E) s'écrit sous la forme :

  $$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) \; = \; b(t) \quad (L)$$

  où :

  × les fonctions a_0, …, a_p sont continues sur I (à valeurs dans $\mathbb{K}$),

  × la fonction a_p n'est pas la fonction nulle,

  × la fonction b est continue sur I (à valeurs dans $\mathbb{K}$) et est appelée **second membre** de l'équation différentielle (L).

  On écrira aussi cette équation fonctionnelle sous la forme :

  $$\boxed{a_p\, y^{(p)} + a_{p-1}\, y^{(p-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y \; = \; b \quad (L)}$$

  × **linéaire à coefficients constants** si les fonction a_0, …, a_p définies précédemment sont constantes sur I. On écrit alors l'équation différentielle sous la forme :

  $$\boxed{a_p\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) \; = \; b(t)}$$

  × **homogène** lorsque son second membre est nul, c'est-à-dire si la fonction b est la fonction nulle.
  Lorsque le second membre de (L) n'est pas nul, on appelle **équation différentielle homogène associée à** (L) l'équation obtenue en remplaçant la fonction b par la fonction nulle :

  $$\boxed{a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) \; = \; 0 \quad (H)}$$

- Une **solution** de l'équation (E) est un couple (J, y) où :

  × l'ensemble J est un intervalle de $\mathbb{R}$,

  × la fonction y est dérivable p fois sur J et vérifie (E) pour tout $t \in J$.

- On appelle **trajectoire** de (E) la courbe représentative d'une des solutions de (E).
- On appelle **équilibre** de (E) une solution constante de (E). On parle aussi de solution **stationnaire**.

Exemples

- L'équation $t\, y^{(3)}(t) + 2\, e^t\, y'(t) - y(t) \; = \; 2\, |t|$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 3. Son équation homogène associée est $t\, y^{(3)}(t) + 2\, e^t\, y'(t) - y(t) \; = \; 0$.
- L'équation $3\, y^{(3)}(t) + 2\, y'(t) - y(t) \; = \; 2\, |t|$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 3 à coefficients constants. Son équation homogène associée est $3\, y^{(3)}(t) + 2\, y'(t) - y(t) \; = \; 0$.

- L'équation $t\,y^{(3)}(t) + 2\,\mathrm{e}^t\,y'(t) - y^5(t) \;=\; 2\,|t|$ est une équation différentielle non linéaire d'ordre 3. Son équation homogène associée est $t\,y^{(3)}(t) + 2\,\mathrm{e}^t\,y'(t) - y^5(t) \;=\; 0$.
- L'équation $2\,\mathrm{e}^t\,y'(t) - y(t) \;=\; 2\,|t|$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Son équation homogène associée est $2\,\mathrm{e}^t\,y'(t) - y(t) \;=\; 0$.

Remarque
A priori, les questions d'existence et d'unicité de solutions n'est pas trivial. On verra dans le cours quelques théorèmes positifs à ce sujet. Une autre question sera de trouver *explicitement* des (les/la) solution(s).

II.2. Problème de Cauchy

Définition

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $t_0 \in I$.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$.

Un **problème de Cauchy** est la donnée :

- d'une équation différentielle d'ordre p :

$$F\big(t, y, y', \ldots, y^{(p)}\big) \;=\; 0$$

- de p **conditions initiales** de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y(t_0) & = & \alpha_0 \\ y'(t_0) & = & \alpha_1 \\ & \vdots & \\ y^{(p-2)}(t_0) & = & \alpha_{p-2} \\ y^{(p-1)}(t_0) & = & \alpha_{p-1} \end{array}\right.$$

Remarque
On verra, dans le cadre d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 et d'ordre 2, que les problèmes de Cauchy admettent en général une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ (on peut même démontrer un tel résultat dans un cadre bien plus général mais cela est largement hors de notre programme).

Exemples
Les problèmes suivants sont de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + 2t\,y' - 3y = t^2 + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{100} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y' - 2\,\mathrm{e}^t\,y = 5 \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

Les problèmes suivants ne sont pas de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + 2t\,y' - 3y = t^2 + 1 \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y' - 2\,\mathrm{e}^t\,y = 5 \\ y^2(0) = 1 \end{array}\right.$$

Remarque
Des conditions supplémentaires un peu différentes peuvent se poser, comme le problème suivant, sur un segment $[0, T]$:

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + \lambda\,y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(T) = 0 \end{array}\right.$$

Ce type de problème avec conditions « aux bords » est plus délicat. Nous n'énoncerons pas de théorèmes généraux dans ce cas.

II.3. Cas des équations linéaires

Proposition 6.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit (H) une équation différentielle **linéaire homogène** *d'ordre p.*

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) définies sur un même intervalle I (non vide et non réduit à un point) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}^p(I, \mathbb{K})$ des fonctions dérivables p fois sur I. Cela signifie :

1) $\boxed{\mathcal{S}_H \subset \mathcal{D}^p(I, \mathbb{K})}$

2) $\boxed{\mathcal{S}_H \neq \varnothing}$

3) *$\mathcal{S}_H$ est stable par combinaison linéaire :*

$$\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (f, g) \in \big(\mathcal{S}_H\big)^2,\ \lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_H}$$

Démonstration.
Soit (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre p définie sur I par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) \ = \ 0$$

1) Tout d'abord, par définition des solutions d'une équation différentielle d'ordre p : $\mathcal{S}_H \subset \mathcal{D}^p(I, \mathbb{K})$.

2) Ensuite : $\mathcal{S}_H \neq \varnothing$. En effet : $0_{\mathcal{F}(I,\mathbb{K})} \in \mathcal{S}_H$. Autrement dit, la fonction nulle est bien solution de (H).

3) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(f, g) \in \big(\mathcal{S}_H\big)^2$.

- On commence par remarquer : $\lambda f + \mu g \in \mathcal{D}^p(I, \mathbb{R})$.
- De plus, pour tout $t \in I$:

$$\begin{array}{cl}
 & a_p(t)\, (\lambda f + \mu g)^{(p)}(t) \quad + \ \cdots \ + \quad a_0(t)\, (\lambda f + \mu g)(t) \\
= & a_p(t)\, (\lambda f^{(p)} + \mu g^{(p)})(t) \quad + \ \cdots \ + \quad a_0(t)\, (\lambda f + \mu g)(t) \\
 & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\
= & a_p(t)\, \big(\lambda f^{(p)}(t) + \mu g^{(p)}(t)\big) \quad + \ \cdots \ + \quad a_0(t)\, \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big) \\
 & \textit{(par linéarité de l'évaluation en } t\textit{)} \\
= & \lambda \big(a_p(t)\ f^{(p)}(t) + \cdots + a_0(t)\, f(t)\big) \\
+ & \mu \big(a_p(t)\, g^{(p)}(t) + \cdots + a_0(t)\, g(t)\big) \\
= & \lambda \times 0 + \mu \times 0 \\
 & \textit{(car } f \textit{ et } g \textit{ sont solutions de } (H)\textit{)} \\
= & 0
\end{array}$$

Ainsi, $\lambda f + \mu g$ est solution de H. Autrement dit : $\lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_H$.

□

Remarque
Pour démontrer cette proposition, on peut aussi remarquer que l'application Φ suivante est linéaire :

$$\begin{array}{rccl}
\Phi & : & \mathcal{D}^p(I, \mathbb{K}) & \to \ \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \\
 & & y & \to \ a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + a_0(t)\, y(t)
\end{array}$$

De plus : $\mathcal{S}_H = \mathrm{Ker}(\Phi)$. Ainsi, $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}^p(I, \mathbb{K})$.

Proposition 7.

Soit (L) une équation différentielle **linéaire** *définie sur un intervalle I, non vide et non réduit à un point. On note (H) son équation différentielle linéaire homogène associée.*

Soit g_0 une **solution particulière** *de (L) sur I.*

L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_L$ de l'équation L est alors :

$$\{g_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$$

On retiendra :

solution générale de (L)	$=$	*solution particulière de (L)*	$+$	*solution générale de (H)*

Démonstration.
Soit (L) l'équation différentielle linéaire d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ définie sur I par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) \ = \ b(t)$$

On note (H) son équation différentielle linéaire homogène associée.
Soit f une fonction p fois dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
& f \in \mathcal{S}_L \\
\Leftrightarrow \ & a_p(t)\, f^{(p)}(t) + \cdots + +a_0(t)\, f(t) = b(t) \\
\Leftrightarrow \ & a_p(t)\, f^{(p)}(t) + \cdots + a_0(t)\, f(t) = a_p(t)\, g_0^{(p)}(t) + \cdots + a_0(t)\, g_0(t) \\
& \textit{(car } g_0 \textit{ solution de } (L)\textit{)} \\
\Leftrightarrow \ & a_p(t)\, f^{(p)}(t) + \cdots + a_0(t)\, f(t) - \big(a_p(t)\, g_0^{(p)}(t) + \cdots + a_0(t)\, g_0(t)\big) = 0 \\
\Leftrightarrow \ & a_p(t)\, \big(f^{(p)}(t) - g_0^{(p)}(t)\big) + \cdots + a_0(t)\, \big(f(t) - g_0(t)\big) = 0
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
& f \in \mathcal{S}_L \\
\Leftrightarrow \ & a_p(t)\, (f - g_0)^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, (f - g_0)'(t) + a_0(t)\, (f - g_0)(t) = 0 \\
& \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\
\Leftrightarrow \ & f - g_0 \in \mathcal{S}_H \\
\Leftrightarrow \ & \exists h \in \mathcal{S}_H,\ f - g_0 = h \\
\Leftrightarrow \ & \exists h \in \mathcal{S}_H,\ f = g_0 + h
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien : $\mathcal{S}_L = \{g_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$. □

`MÉTHODO` **Résolution d'une équation différentielle linéaire (EDL)**

Pour trouver l'ensemble des solutions d'une équation différentielle **linéaire** :

1) on résout l'équation homogène associée. On note $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ l'ensemble de ses solutions.

2) on recherche d'une solution particulière de l'équation complète. On note cette fonction g.

3) on obtient les solutions de l'EDL complète :

$$\mathcal{S} \ = \ \{g + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$$

Pour le point ***2)***, on se réfèrera aux méthodes de recherche d'une solution particulière des sections suivantes dans le cas des EDL d'ordre 1 et d'ordre 2.

Proposition 8 (Principe de superposition)**.**
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soient (L_1) et (L_2) des équations différentielles **linéaires** *d'ordre p définies sur un intervalle I, non vide et non réduit à un point, par :*

$$\begin{array}{rcll} a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \dots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) & = & b_1(t) & (L_1) \\ a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \dots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) & = & b_2(t) & (L_2) \end{array}$$

Soient f_1 et f_2 des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

$$\boxed{\begin{array}{c} \underbrace{f_1 \text{ solution de } (L_1) \quad \texttt{ET} \quad f_2 \text{ solution de } (L_2)} \\ \Downarrow \\ \text{pour tout } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \text{ solution de} \\ a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \dots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) \end{array}}$$

Démonstration.
Supposons que :

× la fonction f_1 est solution de (L_1),
× la fonction f_2 est solution de (L_2).

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $t \in I$.

$$\begin{array}{cl} & a_p(t)\, (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^{(p)}(t) \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_0(t)\, (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) \\ = & a_p(t)\, (\lambda_1 f_1^{(p)} + \lambda_2 f_2^{(p)})(t) \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_0(t)\, (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) \\ & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ = & a_p(t) \left(\lambda_1 f_1^{(p)}(t) + \lambda_2 f_2^{(p)}(t)\right) \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_0(t) \left(\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\right) \\ & \textit{(par linéarité de l'évaluation en } t\textit{)} \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{cl} & a_p(t) \left(\lambda_1 f_1^{(p)}(t) + \lambda_2 f_2^{(p)}(t)\right) \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_0(t) \left(\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\right) \\ = & \lambda_1 \left(a_p(t)\ f_1^{(p)}(t) + \dots + a_0(t)\, f_1(t)\right) + \lambda_2 \left(a_p(t)\, f_2^{(p)}(t) + \dots + a_0(t)\, f_2(t)\right) \\ = & \lambda_1 \times b_1(t) + \lambda_2 \times b_2(t) \\ & \textit{(car } f_1 \textit{ solution de } (L_1) \textit{ et } f_2 \textit{ solution de } (L_2)\textit{)} \end{array}$$

On obtient bien que la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de l'équation :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \dots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) \ = \ \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$$

□

⚠ Ne pas inventer de théorème !
Dans cette proposition, les équations différentielles linéaires (L_1) et (L_2) ont les mêmes fonctions coefficients a_0, a_1, ..., a_p. Seuls les seconds membres diffèrent.

`MÉTHODO` **Solution particulère quand le 2$^{\text{nd}}$ membre est une CL**

Soit (L) une équation différentielle **linéaire** d'ordre p de la forme :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \dots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b(t)$$

Supposons que le second membre b de l'équation (L) s'écrit sous forme de combinaison linéaire :

$$b \ = \ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$$

Alors, pour chercher une solution particulière de (L) :

1) on détermine une solution particulière f_1 de l'EDL (L_1) définie par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \dots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b_1(t)$$

2) on détermine une solution particulière f_2 de l'EDL (L_2) définie par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b_2(t)$$

$\vdots$

$\vdots$

n) on détermine une solution particulière f_n de l'EDL (L_n) définie par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b_n(t)$$

$(\star)$ Par principe de superposition, l'EDL (L) admet pour solution particulière la fonction f définie par :

$$f \; = \; \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n$$

III. Équations différentielles linéaires du premier ordre

III.1. Équation homogène

Proposition 9.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit a une fonction continue sur I. Soit A une primitive de a sur I.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur I définie par :

$$y'(t) + a(t)\, y(t) \; = \; 0$$

Alors :

$$\boxed{y \text{ solution de } (H) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y : t \mapsto \lambda\, e^{-A(t)}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{S}_H \; = \; \left\{ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\, e^{-A(t)} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\}}$$

Démonstration.

- Remarquons d'abord que, puisque la fonction a est continue I, elle admet bien une primitive A (de classe $\mathcal{C}^1$ sur I).
- Soit $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. On note z la fonction définie par :

$$z \; : \; \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & y(t) e^{A(t)} \end{array}$$

La fonction z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus, pour tout $t \in I$:

$$\begin{array}{rcl} z'(t) & = & y'(t)\, e^{A(t)} + y(t) \times A'(t)\, e^{A(t)} \\ & = & y'(t)\, e^{A(t)} + a(t)\, y(t)\, e^{A(t)} \\ & = & \big(y'(t) + a(t)\, y(t)\big)\, e^{A(t)} \end{array}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rl} & y \text{ solution de } (H) \\ \Leftrightarrow & \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)\, y(t) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall t \in I,\ \big(y'(t) + a(t)\, y(t)\big)\, e^{A(t)} = 0 \quad (\textit{car : } \forall t \in I,\ e^{A(t)} \neq 0) \\ \Leftrightarrow & \forall t \in I,\ z'(t) = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ z(t) = \lambda \\ \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ y(t)\, e^{A(t)} = \lambda \\ \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ y(t) = \lambda\, e^{-A(t)} \\ \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y : t \mapsto \lambda\, e^{-A(t)} \end{array}$$

$\square$

Remarque
Pour retrouver rapidement ce résultat, on pourra raisonner au brouillon sans rigueur (méthode autrement appelée « à la physicienne »).

$$\begin{array}{rcll} y \text{ solution de } (H) & \Rightarrow & y' + a\,y = 0 & \\ & \Leftrightarrow & y' = -a\,y & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{y'}{y} = -a & \textit{(en supposant :} \\ & & & \forall t \in I,\ y(t) \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \exists \mu \in \mathbb{K},\ \ln\big(y\big) = -A + \mu & \textit{(en primitivant} \\ & & & \textit{l'égalité précédente)} \\ & \Leftrightarrow & \exists \mu \in \mathbb{K},\ y(t) = \mathrm{e}^{-A(t)+\mu} = \mathrm{e}^{\mu}\,\mathrm{e}^{-A(t)} & \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)} & \end{array}$$

Corollaire 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants sur I définie par :

$$y'(t) + a\,y(t) \ = \ 0$$

Alors :

$$\boxed{y \textit{ solution de } (H) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y : t \mapsto \lambda\, e^{-a\,t}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{S}_H \ = \ \left\{ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\, e^{-a\,t} \end{array} \ \middle|\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}}$$

Exercice 8

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + y = 0$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = ay$ avec pour condition initiale : $y(0) = 1$.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' - t\,y = 0$.

Démonstration.

1) L'équation $y' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2) Comme ce problème comporte une condition initiale, on raisonne en deux temps.

- L'équation $y' - a\,y = 0$, notée (H) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :
$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{a\,t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- Soit f une solution de (H).
D'après le point précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$f : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{a\,t}$$
On obtient alors :
$$\begin{array}{rcl} f \text{ vérifie la condition initiale } y(0) = 1 & \Leftrightarrow & f(0) = 1 \\ & \Leftrightarrow & \lambda\,\mathrm{e}^{a \times 0} = 1 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \end{array}$$
On en déduit que l'unique solution de (H) avec pour condition initiale $y(0) = 1$ est la fonction :
$$t \mapsto \mathrm{e}^{a\,t}$$

3) On remarque que :

- × l'équation $y' - ty = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1,
- × une primitive de la fonction $t \mapsto -t$ est $t \mapsto -\dfrac{t^2}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'équation (H) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

□

Exercice 9

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = \tan(x)\, y$.
On pensera notamment à définir auparavant l'intervalle sur lequel on cherche les solutions.

2. Résoudre l'équation différentielle $(1 + t^2)\, y' + t\, y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) \ = \ f(x)\, f(y)$$

III.2. Solution particulière

III.2.a) Solutions remarquables, lorsque a est constante

Soit $a \in \mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant suivante :

$$y'(t) + a\, y(t) \ = \ b(t)$$

On souhaite déterminer une solution particulière de cette équation.

Si $t \mapsto b(t)$ est de la forme...	chercher une solution de la forme...
$t \mapsto \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$ constante	$t \mapsto \mu$, $\mu \in \mathbb{K}$ constante
$t \mapsto P_n(t)$, P_n polynôme de degré n	$t \mapsto Q_n(t)$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\, \mathrm{e}^{\alpha t}$, P_n polynôme de degré n, $\alpha \neq -a$	$t \mapsto Q_n(t)\, \mathrm{e}^{\alpha t}$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\, \mathrm{e}^{-a t}$, P_n polynôme de degré n	$t \mapsto t\, Q_n(t)\, \mathrm{e}^{-a t}$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$, $(\alpha, \beta, \omega) \in \mathbb{K}^3$ des constantes	$t \mapsto \ \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ des constantes

Exercice 11
Trouver une solution particulère, sur $\mathbb{R}$, des équations différentielles :

1. $(E_1)\ y' + y = \mathrm{e}^{t}$

2. $(E_2)\ y' + y = \mathrm{e}^{-t}$

Démonstration.

1. Résolvons (E_1).

- On commence par résoudre son équation homogène associée $(H_1)\ y' + y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
  L'ensemble de ses solutions est donc :
  $$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E_1).
  Comme le second membre de (E_1) est $t \mapsto \mathrm{e}^{t}$, on cherche une solution de la forme $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{t}$ solution de (E_1).
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note alors $h : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{t}$. La fonction h est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
  $$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E_1) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + h(t) = \mathrm{e}^{t} \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda\,\mathrm{e}^{t} + \lambda\,\mathrm{e}^{t} = \mathrm{e}^{t} \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ 2\lambda\,\mathrm{e}^{t} = \mathrm{e}^{t} \\ & \Leftrightarrow \quad 2\,\lambda = 1 \qquad\qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ e^{t} \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
  Ainsi la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t}$ est une solution particulière de (E_1).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_1) est :
$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2. Résolvons (E_2).

- On commence par résoudre son équation homogène associée $(H_2)\ y' + y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. L'ensemble de ses solutions est donc :
  $$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E_2).
  Comme le second membre de (E_1) est $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, on cherche une solution de la forme $t \mapsto \lambda\,t\,\mathrm{e}^{-t}$ solution de (E_2).
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note alors $h : t \mapsto \lambda\,t\,\mathrm{e}^{-t}$. La fonction h est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  $$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E_2) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + h(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \cancel{\lambda\,t \times (-\mathrm{e}^{-t})} + \cancel{\lambda\,t\,\mathrm{e}^{-t}} = \mathrm{e}^{-t} \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \qquad\qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t} \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$
  Ainsi la fonction $h : t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de (E_2).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_2) est :
$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + t\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

□

Exercice 12
Résoudre l'équation différentielle $2y' - 4y = t\,\mathrm{e}^{2t}$.

III.2.b) Méthode de la variation de la constante

`MÉTHODO` **Méthode de la variation de la constante**

Pour déterminer une solution **particulière** d'une équation différentielle linéaire (L) d'ordre 1 $y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t)$ définie sur I, on peut appliquer la méthode dite de la variation de la constante. Pour cela, on suit les étapes suivantes.

1) On détermine les solutions de l'équation homogène associée à (L) :

$$\{t \mapsto \lambda\, y_H(t) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

où $y_H : t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ avec A une primitive de a sur I.

2) On cherche une solution particulière de (L) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\, y_H(t)$.

a) Soit λ une fonction dérivable sur I. On note alors $h : t \mapsto \lambda(t)\, y_H(t)$. La fonction h est bien dérivable sur I.

b) On raisonne ensuite par équivalence.

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (L) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + a(t)\, h(t) = b(t) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = \cdots = g(t) \end{aligned}$$

La fonction λ peut donc être choisie parmi les primitives de g.

c) On détermine de manière explicite une primitive de g sur I. Notons la G.

d) Une solution particulière de (L) est alors : $t \mapsto G(t)\, y_H(t)$.

Exercice 13

Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle (E) $t\, y'(t) + y(t) = t\, \mathrm{e}^{t^2}$.

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène associée (H) $t\, y' + y = 0$.
  Tout d'abord, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:
  $$t\, y'(t) + y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) + \frac{1}{t}\, y(t) = 0$$
  On remarque que :
  × l'équation $y'(t) + \dfrac{1}{t}\, y(t) = 0$ est linéaire homogène d'ordre 1,
  × une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est $t \mapsto \ln(t)$
  L'ensemble des solutions de l'équation (H) est donc :
  $$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\ln(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \ = \ \{t \mapsto \frac{\lambda}{t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  On applique la méthode de variation de la constante. Autrement dit, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$.
  Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note alors $h : t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$. La fonction h est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  $$\begin{aligned} h \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t\, h'(t) + h(t) = t\, \mathrm{e}^{t^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t \left(\frac{\lambda'(t)}{t} - \frac{\lambda(t)}{t^2}\right) + \frac{\lambda(t)}{t} = t\, \mathrm{e}^{t^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t) - \cancel{\frac{\lambda(t)}{t}} + \cancel{\frac{\lambda(t)}{t}} = t\, \mathrm{e}^{t^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t) = t\, \mathrm{e}^{t^2} \end{aligned}$$
  On en déduit que la fonction λ cherchée peut être choisie parmi les primitives de $t \mapsto t\, \mathrm{e}^{t^2}$.
  La fonction $\lambda : t \mapsto \dfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^{t^2}$ convient.
  Ainsi, la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{2t}\, \mathrm{e}^{t^2}$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \frac{1}{2t}\, \mathrm{e}^{t^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

□

Exercice 14

1. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) - \dfrac{y(t)}{t} = t\,\mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Résoudre l'équation différentielle $\big(t^2\ \ln(t)\big)\, y'(t) - t\, y(t) = -\big(1 + \ln(t)\big)$ sur $]0, 1[$.

III.3. Problème de Cauchy

Théorème 5. (Problème de Cauchy d'ordre 1)

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point :

$$y' + a(t)\, y \;=\; b(t)$$

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} y' + a(t)\, y & = & b(t) \\ y(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.}$$

Exercice 15

Trouver la solution de l'équation différentielle (E) $y' + y = \mathrm{ch}$ telle que $y(0) = 0$.

Démonstration.

- L'équation $y' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche une solution particulière de (E).
  Comme le second membre de (E) est une combinaison linéaire, on cherche :
  × une solution particulière h_1 de (E_1) $y' + y = \mathrm{e}^t$,
  × une solution particulière h_2 de (E_2) $y' + y = \mathrm{e}^{-t}$.

  Par principe de superposition, la fonction $h = \dfrac{1}{2}\, h_1 + \dfrac{1}{2}\, h_2$ sera une solution particulière de (E).

  × D'après l'Exercice 11 *1.*, la fonction $h_1 : t \mapsto \dfrac{1}{2}\ \mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E_1).
  × D'après l'Exercice 11 *2.*, la fonction $h_2 : t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de (E_2).

  On en déduit qu'une solution particulière de (E) est $h : t \mapsto \dfrac{1}{4}\ \mathrm{e}^t + \dfrac{1}{2}\ t\,\mathrm{e}^{-t}$.
  Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{4}\ \mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\ t\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Soit f une solution de (E).
  D'après le point précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f : t \mapsto t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{4}\ \mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\ t\,\mathrm{e}^{-t}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{cl} f \text{ vérifie la condition initiale } y(0) = 0 & \Leftrightarrow\ f(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow\ t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-0} + \dfrac{1}{4}\ \mathrm{e}^0 + \dfrac{1}{2} \times 0 \times \mathrm{e}^{-0} = 0 \\ & \Leftrightarrow\ \lambda + \dfrac{1}{4} = 0 \\ & \Leftrightarrow\ \lambda = -\dfrac{1}{4} \end{array}$$

On en déduit que l'unique solution de (E) avec pour condition initiale $y(0) = 0$ est la fonction :

$$t \mapsto -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{2}\,t\,\mathrm{e}^{-t}$$

□

Proposition 10.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit a une fonction continue sur I. Soit A une primitive de a sur I.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur I définie par :

$$y'(t) + a(t)\,y(t) \;=\; 0$$

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de ses solutions :

$$\mathcal{S}_H \;=\; \{t \mapsto \lambda\, e^{-A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \;=\; \mathrm{Vect}\,(f)$$

où $f : t \mapsto e^{-A(t)}$.

Alors l'application Φ suivante est un isomorphisme.

$$\boxed{\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R} \\ & & g & \mapsto & g(0) \end{array}}$$

Démonstration.

- La fonction Φ est linéaire par linéarité de l'évaluation en 0.
- Montrons que Φ est surjective.
  Soit $x_0 \in \mathbb{K}$.
  Alors il existe une fonction g solution du problème de Cauchy d'ordre 1 suivant :
  $$\left\{\begin{array}{l} \forall t \in I,\ g'(t) + a(t)\,g(t) \;=\; 0 \\ g(0) = x_0 \end{array}\right.$$
  Ainsi il existe $g \in \mathcal{S}_H$ tel que : $g(0) = x_0$. Autrement dit, il existe $g \in \mathcal{S}_H$ tel que : $\Phi(g) = x_0$.
  On en déduit que Φ est surjective.
- On sait :
  × d'abord que Φ est linéaire,
  × ensuite : $\dim(\mathcal{S})_H = 1 = \dim(\mathbb{R})$. En effet, la famille (f) est :
    - libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,
    - génératrice de $\mathcal{S}_H$.

    C'est donc une base de $\mathcal{S}_H$ et : $\dim(\mathcal{S}_H) = \mathrm{Card}\,\big((f)\big) = 1$.
  × enfin que Φ est surjective.

  On en déduit que Φ est bijective.

□

Proposition 11.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit a une fonction continue sur I. Soit A une primitive de a sur I.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur I définie par :

$$y'(t) + a(t)\,y(t) \;=\; 0 \qquad (H)$$

Soit y une fonction dérivable sur I.

y solution non nulle de (H)	$\Rightarrow$	*y ne s'annule en aucun point de I*

Démonstration.
Supposons que y est une solution non nulle de (H).
Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que : $y(t_0) = 0$. Alors y est solution du problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} y' + a(t)\,y \;=\; 0 \\ y(t_0) \;=\; 0 \end{array}\right.$$

Ce problème admet une unique solution. Or la fonction nulle est solution de ce problème de Cauchy. On en déduit que y est la fonction nulle.
Absurde ! □

IV. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

IV.1. Équation homogène

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $a \neq 0$. Soit $d \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$.

On note (E) l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants définie sur I par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; d(t)$$

On appelle **équation caractéristique** associée à l'équation (E) l'équation définie sur $\mathbb{K}$ par :

$$\boxed{a\,r^2 + b\,r + c \;=\; 0}$$

Proposition 12.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $a \neq 0$.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; 0$$

On note r_1 et r_2 les deux solutions de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (H).

Deux cas se présentent.

(i) *si $r_1 \neq r_2$, alors :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_1\,t} + \lambda_2\, e^{r_2\,t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}}$$

(ii) *si $r_1 = r_2$, alors, en notant r_0 cette valeur commune :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_0\,t} + \lambda_2\, t\, e^{r_0\,t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}}$$

Proposition 13.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $a \neq 0$.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; 0$$

Trois cas se présentent.

(i) **Régime apériodique** *: si l'équation caractéristique associée à (H) admet* exactement 2 solutions réelles r_1 *et* r_2 *($r_1 \neq r_2$), alors :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_1\,t} + \lambda_2\, e^{r_2\,t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

(ii) **Régime critique** *: si l'équation caractéristique associée à (H) admet* exactement 1 solution réelle r_0, *alors :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_0\,t} + \lambda_2\, t\, e^{r_0\,t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

(iii) **Régime pseudo-périodique** *: si l'équation caractéristique associée à* (H) n'admet pas de solution réelle, *alors on note $r_1 = \alpha + i\beta$ l'une des deux solutions complexes (et $r_2 = \overline{r_1}$ la seconde). On obtient ainsi :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{\alpha\,t}\,\cos(\beta\,t) + \lambda_2\, e^{\alpha\,t}\,\sin(\beta\,t) \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Démonstration.

(i) On procède par double inclusion.

($\supset$) On note $\mathcal{E}$ l'ensemble :

$$\mathcal{E} \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1 \, e^{r_1 t} + \lambda_2 \, e^{r_2 t} \end{array} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f : t \mapsto \lambda_1 \, e^{r_1 t} + \lambda_2 \, e^{r_2 t}$$

En particulier, la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & \lambda_1 \, r_1 \, e^{r_1 t} + \lambda_2 \, r_2 \, e^{r_2 t} \\ f''(t) & = & \lambda_1 \, r_1^2 \, e^{r_1 t} + \lambda_2 \, r_2^2 \, e^{r_2 t} \end{array}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{cl} & a\, f''(t) + b\, f'(t) + c\, f(t) \\ = & a\left(\lambda_1 \, r_1^2 \, e^{r_1 t} + \lambda_2 \, r_2^2 \, e^{r_2 t}\right) + b\left(\lambda_1 \, r_1^2 \, e^{r_1 t} + \lambda_2 \, r_2^2 \, e^{r_2 t}\right) + c\left(\lambda_1 \, e^{r_1 t} + \lambda_2 \, e^{r_2 t}\right) \\ = & \lambda_1 \, e^{r_1 t} \left(a\, r_1^2 + b\, r_1 + c\right) + \lambda_2 \, e^{r_2 t} \left(a\, r_2^2 + b\, r_2 + c\right) \\ = & \lambda_1 \, e^{r_1 t} \times 0 + \lambda_2 \, e^{r_2 t} \times 0 \quad \textit{(car } r_1 \textit{ et } r_2 \textit{ sont solutions de l'équation caractéristique de } (H)\textit{)} \\ = & 0 \end{array}$$

On en déduit que f est solution de (H), c'est-à-dire : $f \in \mathcal{S}_H$.

($\subset$) Soit $f \in \mathcal{S}_H$.
On pose g la fonction définie par :

$$g : t \mapsto f(t) \, e^{-r_1 t}$$

On cherche à montrer que g est solution d'une nouvelle équation différentielle linéaire homogène.

- Tout d'abord, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- On remarque de plus :

$$f : t \mapsto g(t) \, e^{r_1 t}$$

D'où :

$$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & g'(t) \, e^{r_1 t} + g(t) \, r_1 \, e^{r_1 t} \;=\; \big(g'(t) + r_1 \, g(t)\big) \, e^{r_1 t} \\ f''(t) & = & \big(g''(t) + r_1 \, g'(t)\big) \, e^{r_1 t} + \big(g'(t) + r_1 \, g(t)\big) \, r_1 \, e^{r_1 t} \\ & = & \big(g''(t) + 2r_1 \, g'(t) + r_1^2 \, g(t)\big) \, e^{r_1 t} \end{array}$$

Or, la fonction f est solution de (H). Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & a\, f''(t) + b\, f'(t) + c\, f(t) \\ & = & a\big(g''(t) + 2r_1 \, g'(t) + r_1^2 \, g(t)\big) \, e^{r_1 t} \\ & + & b\big(g'(t) + r_1 \, g(t)\big) \, e^{r_1 t} \\ & + & c\, g(t) \, e^{r_1 t} \\ & = & \big(a\, g''(t) + (2ar_1 + b) \, g'(t) + (ar_1^2 + b\, r_1 + c) \, g(t)\big) \, e^{r_1 t} \\ & = & \big(a\, g''(t) + (2ar_1 + b) \, g'(t) + \cancel{0 \times g(t)}\big) \, e^{r_1 t} \\ & & \textit{(car } r_1 \textit{ est solution de l'équation caractéristique de } (H)\textit{)} \end{array}$$

Comme $e^{r_1 t} \neq 0$ et $a \neq 0$, on obtient :

$$g''(t) + \frac{2ar_1 + b}{a} \, g'(t) \;=\; 0$$

- On en déduit que la fonction g' est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$y' + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right) y \;=\; 0$$

On rappelle de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} a\,t^2 + b\,t + c & = & a\,(t - r_1)\,(t - r_2) \\ & = & a\left(t^2 - (r_1 + r_2)\,t + r_1\,r_2\right) \\ & = & a\,t^2 - a\,(r_1 + r_2)\,t + a\,r_1\,r_2 \end{array}$$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -a\,(r_1 + r_2) & = & b \\ a\,r_1\,r_2 & = & c \end{array} \right.$$

En particulier : $-(r_1 + r_2) = \dfrac{b}{a}$. On en déduit que g' est solution de l'équation :

$$y' + \left(2r_1 - (r_1 + r_2)\right) y \ = \ 0 \qquad i.e. \qquad y' + (r_1 - r_2)\,y \ = \ 0$$

- D'après la partie précédente du cours, il existe donc $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g' : t \mapsto c_1\,\mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)\,t}$$

Comme $r_1 - r_2 \neq 0$, il existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g : t \mapsto -\frac{c_1}{r_1 - r_2}\ \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)\,t} + c_2$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & g(t)\,\mathrm{e}^{r_1\,t} \\ & = & \left(-\dfrac{c_1}{r_1 - r_2}\ \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)\,t} + c_2\right) \mathrm{e}^{r_1\,t} \\ & = & -\dfrac{c_1}{r_1 - r_2}\ \mathrm{e}^{r_2\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{r_1\,t} \end{array}$$

Ainsi, en posant $\lambda_1 = c_2$ et $\lambda_2 = -\dfrac{c_1}{r_1 - r_2}$, on en déduit :

$$f : t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{r_1\,t} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{r_2\,t}$$

On en conclut : $f \in \mathcal{E}$.

(ii) On procède par double inclusion.

($\supset$) On note $\mathcal{F}$ l'ensemble :

$$\mathcal{F} \ = \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + \lambda_2\,t\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \end{array} \ \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Soit $f \in \mathcal{F}$. Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f : t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + \lambda_2\,t\,\mathrm{e}^{r_0\,t}$$

En particulier, la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & \lambda_1\,r_0\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + \lambda_2\left(1 \times \mathrm{e}^{r_0\,t} + t \times r_0\,\mathrm{e}^{r_0\,t}\right) \\ & = & \left(\lambda_2\,r_0\,t + \lambda_1\,r_0 + \lambda_2\right)\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ f''(t) & = & \lambda_2\,r_0\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + \left(\lambda_2\,r_0\,t + \lambda_1\,r_0 + \lambda_2\right) r_0\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ & = & \left(\lambda_2\,r_0^2\,t + \lambda_1\,r_0^2 + 2\,\lambda_2\,r_0\right)\mathrm{e}^{r_0\,t} \end{array}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rl} & a\,f''(t) + b\,f'(t) + c\,f(t) \\ = & a\left(\lambda_2\,r_0^2\,t + \lambda_1\,r_0^2 + 2\,\lambda_2\,r_0\right)\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ + & b\left(\lambda_2\,r_0\,t + \lambda_1\,r_0 + \lambda_2\right)\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ + & c\,\left(\lambda_1\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + \lambda_2\,t\,\mathrm{e}^{r_0\,t}\right) \\ = & \mathrm{e}^{r_0\,t}\left(\lambda_1\left(a\,r_0^2 + b\,r_0 + c\right) + \lambda_2\,t\left(a\,r_0^2 + b\,r_0 + c\right) + \lambda_2\left(2\,a\,r_0 + b\right)\right) \\ = & \mathrm{e}^{r_0\,t}\left(\lambda_1 \times 0 + \lambda_2\,t \times 0 + \lambda_2\left(2\,a\,r_0 + b\right)\right) \\ & \textit{(car } r_0 \textit{ est solution de l'équation caractéristique de } (H)\textit{)} \\ = & \lambda_2\,(2a\,r_0 + b)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \end{array}$$

On rappelle de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$a\,t^2 + b\,t + c \ = \ a\,(t - r_0)^2 \ = \ a\,(t^2 - 2\,r_0\,t + r_0^2) \ = \ a\,t^2 - 2a\,r_0\,t + a\,r_0^2$$

Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2a\,r_0 & = & b \\ a\,r_0^2 & = & c \end{array}\right.$$

En particulier : $2a\,r_0 + b = 0$. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$a\,f''(t) + b\,f'(t) + c\,f(t) \ = \ 0$$

On en déduit que f est solution de (H), c'est-à-dire : $f \in \mathcal{S}_H$.

$(\subset)$ Soit $f \in \mathcal{S}_H$.
On pose g la fonction définie par :

$$g : t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-r_0\,t}$$

On cherche à montrer que g est solution d'une nouvelle équation différentielle linéaire homogène.

- Tout d'abord, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- On remarque de plus :

$$f : t \mapsto g(t)\,\mathrm{e}^{r_0\,t}$$

D'où :

$$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & g'(t)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + g(t)\,r_0\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \ = \ \big(g'(t) + r_0\,g(t)\big)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ f''(t) & = & \big(g''(t) + r_0\,g'(t)\big)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + \big(g'(t) + r_0\,g(t)\big)\,r_0\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ & = & \big(g''(t) + 2r_0\,g'(t) + r_0^2\,g(t)\big)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \end{array}$$

Or, la fonction f est solution de (H). Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & a\,f''(t) + b\,f'(t) + c\,f(t) \\ & = & a\,\big(g''(t) + 2r_0\,g'(t) + r_0^2\,g(t)\big)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ & + & b\,\big(g'(t) + r_0\,g(t)\big)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ & + & c\,g(t)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ & = & \big(a\,g''(t) + (2ar_0 + b)\,g'(t) + (ar_0^2 + b\,r_0 + c)\,g(t)\big)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ & = & \big(a\,g''(t) + (2ar_0 + b)\,g'(t) + \cancel{0 \times g(t)}\big)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ & & \textit{(car } r_0 \textit{ est solution de l'équation caractéristique de } (H)\textit{)} \end{array}$$

Comme $\mathrm{e}^{r_0\,t} \neq 0$ et $a \neq 0$, on obtient :

$$g''(t) + \frac{2ar_0 + b}{a}\,g'(t) \ = \ 0$$

- On en déduit que la fonction g' est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$y' + \frac{2a\,r_0 + b}{a} y \ = \ 0$$

On rappelle de plus : $2a\,r_0 + b = 0$. On en déduit que g' est solution de l'équation :

$$y' \ = \ 0$$

- D'après la partie précédente du cours, il existe donc $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g' : t \mapsto c_1$$

Il existe donc $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g : t \mapsto c_1\,t + c_2$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & g(t)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ & = & (c_1\,t + c_2)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ & = & c_2\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + c_1\,t\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \end{array}$$

Ainsi, en posant $\lambda_1 = c_2$ et $\lambda_2 = c_1$, on en déduit :

$$f : t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + \lambda_2\,t\,\mathrm{e}^{r_0\,t}$$

On en conclut : $f \in \mathcal{E}$.

□

Exercice 16

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 4\,y' - 5\,y = 0$ (E_1)

2. $y'' + 4\,y' + 4\,y = 0$ (E_2)

Démonstration.

1. L'équation (E_1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène. On détermine donc les solutions de son équation caractéristique $r^2 + 4r - 5 = 0$.
On cherche donc les racines du polynôme $Q(X) = X^2 + 4\,X - 5$. On note Δ son discriminant.

$$\Delta \ = \ 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) \ = \ 16 + 20 \ = \ 36$$

Les racines de Q sont alors :

$$r_1 \ = \ \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} \ = \ 1 \qquad \text{et} \qquad r_2 \ = \ \frac{-4 - \sqrt{36}}{2} \ = \ -5$$

Comme $r_1 \neq r_2$, l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{t} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{-5t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

2. L'équation (E_2) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène. On détermine donc les solutions de son équation caractéristique $r^2 + 4r + 4 = 0$.
On cherche donc les racines du polynôme $Q(X) = X^2 + 4\,X + 4 = (X+2)^2$.
L'unique racine de Q est donc :

$$r_0 \ = \ -2$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{-2t} + \lambda_2\,t\,\mathrm{e}^{-2t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

□

Exercice 17

Soient ω_0 et Q deux réels strictement positifs.

1. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' + \omega_0^2\,y = 0$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' - \omega_0^2\,y = 0$. Exprimer cet ensemble à l'aide de la fonction exponentielle, puis à l'aide des fonctions de trigonométrie hyperbolique.

3. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + \dfrac{\omega_0}{Q}\,y' + \omega_0^2\,y = 0$.

IV.2. Solution particulière

IV.2.a) Un premier tableau

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $a \neq 0$. Soit $d \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur I par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; d(t)$$

On note Q son polynôme caractérisque.

Si $t \mapsto d(t)$ est de la forme...	et si...	chercher une solution de la forme...
$t \mapsto \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$ constante		$t \mapsto \mu$, $\mu \in \mathbb{K}$ constante
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n	α non racine de Q	$t \mapsto R_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, R_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n	α racine **simple** de Q	$t \mapsto R_n(t)\,t\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, R_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n	α racine double de Q	$t \mapsto R_n(t)\,t^2\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, R_n polynôme de degré n

Exercice 18
Résoudre l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y'' - 4\,y' + 3\,y = (2t+1)\,\mathrm{e}^t$$

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène (H) associée à (E) : $y'' - 4\,y' + 3\,y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. On détermine donc les solutions de son équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$.
  On cherche donc les racines du polynôme $Q(X) = X^2 - 4\,X + 3 = (X-1)\,(X-3)$. Les racines de Q sont donc :

$$r_1 \;=\; 1 \qquad \text{et} \qquad r_2 \;=\; 3$$

  Comme $r_1 \neq r_2$, l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \mid (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  Comme le second membre de (E) est $t \mapsto (2t+1)\,\mathrm{e}^t$ et que 1 est racine simple de Q, on cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto (a\,t+b)\,t\,\mathrm{e}^t$.
  Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note alors $h : t \mapsto (at^2+bt)\,\mathrm{e}^t$. La fonction h est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h'(t) &= (2at+b)\,\mathrm{e}^t + (at^2+bt)\,\mathrm{e}^t \\ &= \big(at^2 + (2a+b)t + b\big)\,\mathrm{e}^t \\ h''(t) &= \big(2at + 2a + b\big)\,\mathrm{e}^t + \big(at^2 + (2a+b)t + b\big)\,\mathrm{e}^t \\ &= \big(at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b\big)\,\mathrm{e}^t \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
& h \text{ solution de } (E) \\
\iff \quad & \forall t \in \mathbb{R}, \quad h''(t) - 4\,h'(t) + 3\,h(t) = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\
\iff \quad & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \big(at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b\big)\,\mathrm{e}^t \\
& \qquad\qquad -4\,\big(at^2 + (2a+b)t + b\big)\,\mathrm{e}^t \\
& \qquad\qquad +3\,(at^2 + bt)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\
\iff \quad & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \big(-4at + 2a - 2b\big)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\
\iff \quad & \forall t \in \mathbb{R}, \quad -4at + 2a - 2b = 2t + 1 \qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^t \neq 0\textit{)} \\
\iff \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -4a & & & = & 2 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array} \right. \\
\iff \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & 1 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array} \right. \\
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & -1 \\ & - & 2b & = & 2 \end{array} \right. \\
\iff \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & & & = & -\dfrac{1}{2} \\ & & b & = & -1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi la fonction $h : t \mapsto \left(-\dfrac{1}{2}\,t^2 - t\right)\mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} - \left(\frac{1}{2}\,t^2 + t\right)\mathrm{e}^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

□

IV.2.b) Solution particulière quand le 2nd membre est de la forme $t \mapsto A\,\cos(\omega\,t)$ ou $t \mapsto A\,\sin(\omega\,t)$

Proposition 14.

Soient a, b et c des fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $d : I \to \mathbb{K}$.

a)

g solution de $ay'' + by' + cy = d$	$\Rightarrow$	$\mathrm{Re}\,(g)$ *solution de* $ay'' + by' + cy = \mathrm{Re}\,(d)$

b)

g solution de $ay'' + by' + cy = d$	$\Rightarrow$	$\mathrm{Im}\,(g)$ *solution de* $ay'' + by' + cy = \mathrm{Im}\,(d)$

MÉTHODO **Solution particulière quand $d : t \mapsto A\,\cos(\omega\,t)$**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Soit $(A, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy \ = \ A\,\cos(\omega\,t) \qquad (E)$$

1) On cherche une solution particulière **complexe** g de l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy \ = \ A\,\mathrm{e}^{i\omega x}$$

Pour cela, on utilise le tableau précédent.

2) On en déduit que la fonction $\mathrm{Re}\,(g)$ est une solution particulière de (E).

On procède de même pour des seconds membres du type $t \mapsto P_n(t)\,\cos(\omega\,t)$.

Exercice 19

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y'' + y' + y = \mathrm{e}^x\,\cos(x)$

2. $y'' + y = t\,\cos(t)$.

MÉTHODO **Solution particulière quand $d : t \mapsto A\,\sin(\omega\,t)$**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Soit $(A, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy \;=\; A\,\sin(\omega\,t) \qquad (E)$$

1) On cherche une solution particulière **complexe** g de l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy \;=\; A\,\mathrm{e}^{i\omega x}$$

Pour cela, on utilise le tableau précédent.

2) On en déduit que la fonction $\mathrm{Im}\,(g)$ est une solution particulière de (E).

On procède de même pour des seconds membres du type $t \mapsto P_n(t)\,\sin(\omega\,t)$.

IV.3. Problème de Cauchy

Théorème 6. (Problème de Cauchy d'ordre 2)

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; d(t)$$

Soit $(t_0, x_0, \tilde{x}_0) \in I \times \mathbb{K}^2$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; d(t) \\ y(t_0) \;=\; x_0 \\ y'(t_0) \;=\; \tilde{x}_0 \end{array}\right.}$$

Exercice 20

Trouver l'unique solution de l'équation (E) $y'' - 4y' + 3y = (2t+1)\,\mathrm{sh}(t)$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

On rappelle que la fonction sh *est définie par* $\mathrm{sh} : t \mapsto \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Proposition 15.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants sur I définie par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; 0$$

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de ses solutions :

× *si l'équation caractéristique associée admet 2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2 :*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_H &= \{t \mapsto \lambda_1\,e^{r_1\,t} + \lambda_2\,e^{r_2\,t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)\end{aligned}$$

où $f_1 : t \mapsto e^{r_1\,t}$ et $f_2 : t \mapsto e^{r_2\,t}$.

× *si l'équation caractéristique associée admet 1 unique solution r_0 :*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_H &= \{t \mapsto \lambda_1\,e^{r_0\,t} + \lambda_2\,t\,e^{r_0\,t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)\end{aligned}$$

où $f_1 : t \mapsto e^{r_0\,t}$ et $f_2 : t \mapsto t\,e^{r_0\,t}$.

× *si l'équation caractéristique associée admet 2 solutions complexes distinctes $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \overline{r_1}$:*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_H &= \{t \mapsto \lambda_1\,e^{\alpha\,t}\,\cos(\beta\,t) + \lambda_2\,e^{\alpha\,t}\,\sin(\beta\,t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)\end{aligned}$$

où $f_1 : t \mapsto e^{\alpha\,t}\,\cos(\beta\,t)$ et $f_2 : t \mapsto e^{\alpha\,t}\,\sin(\beta\,t)$.

Alors l'application Φ suivante est un isomorphisme.

$$\boxed{\begin{array}{rccc}\Phi & : & \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & g & \mapsto & \big(g(0), g'(0)\big)\end{array}}$$

Démonstration.

- La fonction Φ est linéaire par linéarité de la dérivation et linéarité de l'évaluation en 0.
- Montrons que Φ est surjective.
  Soit $(x_0, \tilde{x}_0) \in \mathbb{R}$.
  Alors il existe une fonction g solution du problème de Cauchy d'ordre 2 suivant :
  $$\begin{cases} \forall t \in I,\ a\, g''(t) + b\, g'(t) + c\, g(t) \ = \ 0 \\ g(0) \ = \ x_0 \\ g'(0) \ = \ \tilde{x}_0 \end{cases}$$
  Ainsi il existe $g \in \mathcal{S}_H$ tel que : $\big(g(0), g'(0)\big) = (x_0, \tilde{x}_0$. Autrement dit, il existe $g \in \mathcal{S}_H$ tel que : $\Phi(g) = (x_0, \tilde{x}_0)$.
  On en déduit que Φ est surjective.
- On sait :
  × d'abord que Φ est linéaire,
  × ensuite : $\dim(\mathcal{S}_H) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. En effet, la famille (f) est :
    - libre car constituée de 2 vecteurs non colinéaires,
    - génératrice de $\mathcal{S}_H$.

    C'est donc une base de $\mathcal{S}_H$ et : $\dim(\mathcal{S}_H) = \text{Card}\,\big((f_1, f_2)\big) = 2$.
  × enfin que Φ est surjective.

  On en déduit que Φ est bijective.

$\square$