CH XXII : Déterminants

I. Déterminant

I.1. Forme n-linéaire alternée

I.1.a) Définition et exemples

Définition

Soient E_1, ..., E_n et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application.

- On dit que f est **n-linéaire** si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, pour tous $x_1 \in E_1$, ..., $x_{k-1} \in E_{k-1}$, $x_{k+1} \in E_{k+1}$, ..., $x_n \in E_n$ fixés :

$$\text{l'application } f_k : \begin{array}{ccc} E_k & \to & F \\ x & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \end{array} \text{ est linéaire.}$$

- On dit que f est **bilinéaire** si $n = 2$.
- On dit que f est une <u>**forme**</u> **n-linéaire** si $F = \mathbb{K}$.

Exemples

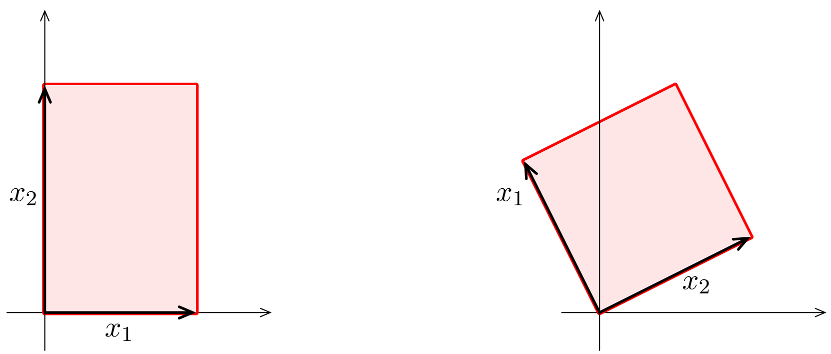
- Le produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{R})$.
- Le produit fonctionnel $(f, g) \mapsto fg$ est bilinéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Pour tous $\mathbb{R}$-ev E, E', E'', la composition $(f, g) \mapsto f \circ g$ est bilinéaire de $\mathscr{L}(E, E') \times \mathscr{L}(E', E'')$ dans $\mathscr{L}(E, E'')$.
- L'application suivante est 4-linéaire :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^4 & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & 5x_1x_2x_3x_4 \end{array} \right.$$

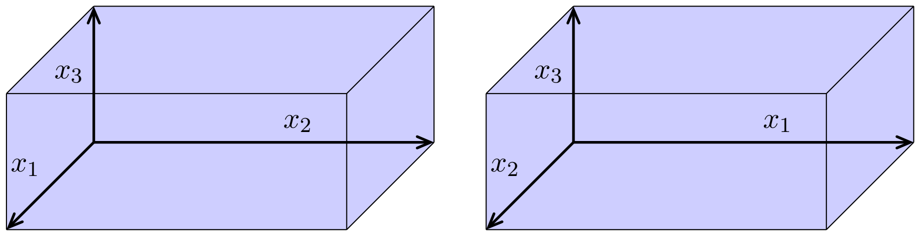
- L'application suivante est n-linéaire :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (f_1, \ldots, f_n) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f_1(t) \times \cdots \times f_n(t)\ dt \end{array} \right.$$

- L'aire d'un rectangle ou, plus généralement, d'un parallélogramme formé par deux vecteurs, est une forme bilinéaire car (par exemple) l'aire est doublée quand on double une des deux longueurs. Attention, quand on parle d'aire (ou de volume dans l'exemple suivant), on parle d'aire **signée** ou **algébrique**, c'est-à-dire qu'une aire du parallélogramme formé par x_1 et x_2 est comptée positivement si on va de x_1 à x_2 dans le sens direct, et négativement sinon. Ci-dessous, l'aire du parallélogramme formé par x_1 et x_2 est comptée positivement (à gauche) et négativement (à droite).



- Le volume d'un parallélépipède ou pavé (pas forcément droit) formé par trois vecteurs, est une forme 3-linéaire. Idem, on parle du volume signé ou algébrique selon que les vecteurs sont dans le sens direct ou non (règle de la main droite, du tire-bouchon, de Spiderman etc.). À gauche, un volume positif, et à droite, un volume négatif.



Nous reparlerons d'orientation d'espaces dans le paragraphe II.3.

Définition
Soient E un $\mathbb{K}$-ev et f une forme n-linéaire de E^n.
On dit que f est *alternée* si f est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.

Exemple
L'aire (respectivement le volume) d'un parallélogramme (respectivement d'un pavé) formé par deux (respectivement trois) vecteurs est une forme alternée car vaut 0 si deux vecteurs sont égaux.

I.1.b) Propriétés des formes n-linéaires alternées

Proposition 1.
Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

$$\boxed{(x_1, \dots, x_n) \text{ liée } \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0}$$

Proposition 2.
Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée.
Soient $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $i \in [\![1, n]\!]$ et $(\lambda_j)_{j \neq i} \in \mathbb{K}^{n-1}$.

$$\boxed{f\left(x_1, \dots, x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j, \dots, x_n\right) = \overrightarrow{(}x_1, \dots, x_n)}$$

En d'autres termes, on ne change pas la valeur d'une forme linéaire alternée en ajoutant à un terme une combinaison linéaire des autres termes.

Proposition 3.
Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ vérifiant : $i < j$.

$$\boxed{f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i}_{j}, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_n)}$$

Remarque
Nous n'étudierons dans ce chapitre que des formes n-linéaires alternées. Pour de telles formes :

- pour sortir une constante, il suffit qu'elle soit en facteur **d'une** coordonnée. Si elle est en facteur de plusieurs coordonnées, on peut la sortir plusieurs fois, mais attention à la puissance ! Si on la sort deux fois, on aura du λ^2 par exemple : il est plus simple de la sortir « en plusieurs fois », une fois pour chaque coordonnée, pour être sûr de ne pas se tromper.

- Cas particulier important : $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^n f(x_1, \ldots, x_n)$ (avec les mêmes notations que ci-dessus). À connaître sur le bout des doigts !
- On peut de la même façon sortir les sommes pour chaque coordonnée. Si on sort plusieurs sommes, attention à prendre des indices distincts !
- Quand on échange deux coordonnées, on multiplie par -1.
- Plus généralement, quand on permute les n coordonnées, on multiplie par la signature de la permutation correspondante.
- On peut rajouter une CL des autres coordonnées à l'une des coordonnées sans changer la valeur de la fonction. *On voit se dessiner les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, et donc la méthode du pivot de Gauss... cf. paragraphe II.2.*
- L'image d'une famille liée est nulle. En particulier, si une famille contient le vecteur nul, alors son image est nulle.

I.2. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

On a vu dans la partie précédente la définition d'une forme n-linéaire alternée, et on en a déduit des propriétés. Mais il reste tout de même une question d'importance cruciale : existe-t-il forcément des formes n-linéaires alternées ? Puisque la fonction nulle de E^n dans $\mathbb{K}$ est évidemment une forme n-linéaire, existe-t-il forcément des formes n-linéaires alternées non nulles ?

On rappelle que, si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, tout élément x de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des e_i. Par conséquent, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, il existe une unique famille de scalaire (les coordonnées des x_j dans la base B) $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i$$

Remarquons que le premier indice de la coordonnée, i, est celui du vecteur de la base correspondant, et que le deuxième indice, j, est celui du vecteur « global », c'est-à-dire x_j. Nous reprenons ces notations dans la proposition ci-dessous.

Proposition 4.

Soit $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \det_B : & E^n & \to & \mathbb{K} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \end{array}$$

  est l'unique forme n-linéaire alternée f sur E^n qui vérifie $f(\mathscr{B}) = 1$ et on l'appelle déterminant relativement à la base $\mathscr{B}$.
  Les $a_{i,j}$ sont les coordonnées des vecteurs $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ dans la base $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Il est bien évident que si on change les vecteurs, alors les coordonnées changent aussi. Il est tout aussi évident qu'en changeant la base, les coordonnées changent aussi. Voir plus bas pour le lien entre $\det_{\mathscr{B}}$ et $\det_{\mathscr{B}'}$, lorsque $\mathscr{B}'$ est une autre base de E.
- *$\Lambda_n(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1. En d'autres termes, $\det_{\mathscr{B}}$ est une base de $\Lambda_n(E)$, c'est-à-dire que toute forme n-linéaire alternée sur E^n est un multiple de $\det_{\mathscr{B}}$.*

On ne peut calculer que le déterminant de n vecteurs en dimension n. Si on est en dimension 2, on ne peut calculer que le déterminant de deux vecteurs, si on est en dimension 3, on ne peut calculer que le déterminant de trois vecteurs etc. Ce sera la même chose avec le déterminant d'une matrice : on ne pourra calculer que le déterminant d'une matrice carrée.

Démonstration.

- Il est immédiat que $\Lambda_n(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{E^n}$ puisqu'il est non vide (il contient l'application nulle de E^n dans $\mathbb{K}$), stable par somme et par multiplication par un scalaire, donc en particulier c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Prouvons que $\det_{\mathscr{B}}$ est linéaire par rapport à la première variable. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ qu'on note comme ci-dessus (avec les $a_{i,j}$ comme coordonnées). Soit $y_1 = b_{1,1} \cdot e_1 + b_{2,1} \cdot e_2 + \cdots + b_{n,1} \cdot e_n \in E$. Alors :

$$x_1 + y_1 \;=\; (a_{1,1} + b_{1,1}) \cdot e_1 + (a_{2,1} + b_{2,1}) \cdot e_2 + \cdots + (a_{n,1} + b_{n,1}) \cdot e_n$$

si bien que :

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}}(x_1 + y_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(a_{\sigma(1),1} + b_{\sigma(1),1)a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} + \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \det_{\mathscr{B}}(y_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on montre facilement que $\det_{\mathscr{B}}(\lambda x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ donc $\det_{\mathscr{B}}$ est linéaire par rapport à la première variable, et on montre de même qu'elle est linéaire par rapport à chaque variable, donc $\det_{\mathscr{B}}$ est bien n-linéaire.

- Montrons que $\det_{\mathscr{B}}$ est alternée. Soit donc $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et on suppose qu'il existe $k < j$ tels que $x_k = x_j$. Notons τ la transposition $(k\,j)$. On montre facilement que $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de S_n dans lui-même. On en déduit l'égalité suivante à l'aide du « changement d'indice » $\varphi = \tau \circ \sigma$:

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi \circ \tau) a_{\varphi\circ\tau(1),1} a_{\varphi\circ\tau(2),2} \cdots a_{\varphi\circ\tau(n),n}$$

On pose $\varphi = \sigma \circ \tau$, $\sigma = \varphi \circ \tau$ (puisque τ est son propre inverse). Lorsque σ décrit S_n, φ décrit également S_n, d'où l'égalité ci-dessus.

D'une part, ε étant un morphisme de groupe :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\varphi \circ \tau) &= \varepsilon(\varphi) \times \varepsilon(\tau) \\ &= -\varepsilon(\varphi) \end{aligned}$$

D'autre part, rappelons que τ échange k et j mais laisse les autres éléments de $[\![1, n]\!]$ invariants, ce qui donne :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; -\sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(j),k} \cdots a_{\varphi(k),j} \cdots a_{\varphi(n),n}$$

Or, $x_k = x_j$ donc ces deux éléments de E ont les mêmes coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. On reprend les notations ci-dessus :

$$x_j \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \qquad \text{et} \qquad x_k \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i$$

En d'autres termes, pour tout i, $a_{i,j} = a_{i,k}$ donc, en particulier, $a_{\varphi(j),k} = a_{\varphi(j),j}$ et $a_{\varphi(j),k} = a_{\varphi(j),j}$ si bien que :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; -\sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(j),j} \cdots a_{\varphi(k),k} \cdots a_{\varphi(n),n}$$

Le corps étant commutatif, on a enfin :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; -\sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(k),k} \cdots a_{\varphi(j),j} \cdots a_{\varphi(n),n}$$

L'indice de la somme étant muet, $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donc $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$: la forme est alternée.

- Prouvons que $\det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$ (ce qui prouvera en particulier que $\det_{\mathscr{B}}$ n'est pas la fonction nulle). Il suffit de voir que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$x_j \;=\; 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 1 \cdot e_j + \cdots + 0 \cdot e_n$$

En d'autres termes, $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ (i.e. vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon). Par conséquent, si $\sigma \in S_n$ et si $\sigma \neq \mathrm{id}$, alors il existe i tel que $\sigma(i) \neq i$ donc $a_{\sigma(i),i} = 0$ si bien que le produit $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$ est nul. En particulier, dans la somme définissant le déterminant, seul le terme pour $\sigma = \mathrm{id}$ est non nul, si bien que :

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_n) &= \varepsilon(\mathrm{id}) a_{\mathrm{id}(1),1} a_{\mathrm{id}(2),2} \cdots a_{\mathrm{id}(n),n} \\ &= 1 \times a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Pour conclure, il reste donc à prouver que toute forme n-linéaire alternée $f \in \Lambda_n(E)$ est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$. Soit donc $f \in \Lambda_n(E)$ et soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On reprend les notations ci-dessus (i.e. les $a_{i,j}$). Par n-linéarité de f :

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} e_n\Big) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \end{aligned}$$

Si les indices $i_1, \ldots, i_n$ ne sont pas distincts, f étant alternée, $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0$. Par conséquent, dans la somme, il ne reste que les n-uplets d'indices deux à deux distincts :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n \text{ deux à deux distincts}}^{a} {}_{i_1,1} a_{i_2,2} \ldots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$$

Cette somme est une fausse somme multiple : un tel n-uplet est entièrement déterminé par l'application $\sigma : k \mapsto i_k$. Or, puisque les i_k sont deux à deux distincts, c'est une injection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même donc une bijection. *Rappelons qu'une injection d'un ensemble fini dans un autre de même cardinal, et en particulier dans lui-même, est une bijection.*
Ainsi : $\sigma \in S_n$. Dès lors :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

L'application f étant alternée :

$$f(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, \ldots, e_n)$$

si bien que :

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} f(e_1, \ldots, e_n) \\ &= f(e_1, \ldots, e_n) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \\ &= f(e_1, \ldots, e_n) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

□

Et si on prend une autre base ?
L'expression de $\det_{\mathscr{B}}$ dépend de la base $\mathscr{B}$: elle fait intervenir les coordonnées des vecteurs dans cette base. Question : si $\mathscr{B}'$ est une autre base, quel lien y a-t-il entre $\det_{\mathscr{B}}$ et $\det_{\mathscr{B}'}$? Et que peut-on affirmer à propos de $\det_B(\mathscr{B}')$?

Corollaire 1.

Soient B et B' deux bases de E. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.

$$\boxed{\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(e_1, \ldots, e_n) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)}$$

Démonstration.
Découle de la démonstration précédente, puisque $\det_{\mathscr{B}'}$ est une forme n-linéaire alternée. □

Remarque
Cette formule est à rapprocher de la formule de changement de base $X_{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} X_{\mathscr{B}}$ vue dans le Chapitre XX sur la représentation matricielle, mais attention : telle quelle, cette formule n'est qu'un moyen mnémotechnique. En effet, d'une part, on ne sait pas encore calculer le déterminant d'une matrice, et d'autre part, nous ne pourrons calculer que le déterminant d'une matrice carrée alors que $X_{\mathscr{B}}$ et $X_{\mathscr{B}'}$ sont des matrices colonnes.

Proposition 5.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $\mathscr{B}' = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

a) *La famille $\mathscr{B}'$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$.*

b) *Dans ce cas :* $\boxed{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})}}$.

En d'autres termes, une famille à n éléments est une base si et seulement si son déterminant (dans n'importe quelle base) est non nul.

Démonstration.

- Puisque c'est une famille à n éléments en dimension n, c'est une base si et seulement si c'est une famille libre.
  Si cette famille est liée, elle annule toute forme n-linéaire alternée donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 0$.
- Réciproquement, si cette famille est libre, c'est une base donc, d'après le corollaire précédent :

$$1 = \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(e_1, \ldots, e_n) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

  et, en particulier, $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ et $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})}$.

□

Orientation d'un espace

Dans cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Comme dit précédemment, on peut vouloir chercher à munir le plan, l'espace, ou plus généralement n'importe quel espace vectoriel (de dimension finie) d'une orientation pour compter les aires, les volumes (cette notion pouvant se généraliser à une dimension plus grande de façon positive ou négative.

Proposition 6.

On définit sur l'ensemble des bases de E la relation $\sim$ par :

$$\boxed{\mathscr{B} \sim \mathscr{B}' \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0}$$

Alors $\sim$ est une relation d'équivalence.

Démonstration.

- Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1 > 0$ donc $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}$.
  La relation $\sim$ est donc réflexive.
- Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E telles que : $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}'$.
  Alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$. Or, d'après la proposition ci-dessus, $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')} > 0$ c'est-à-dire : $\mathscr{B}' \sim \mathscr{B}$.
  La relation $\sim$ est donc symétrique.
- Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E telles que : $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}' \sim \mathscr{B}''$.
  D'après le corollaire ci-dessus, en notant $(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{B}''$:

$$\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'') = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'')$$

  Tous ces déterminants sont non nuls donc :

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') &= \frac{\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')}{\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})} \\ &= \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'') \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \\ &> 0\end{aligned}$$

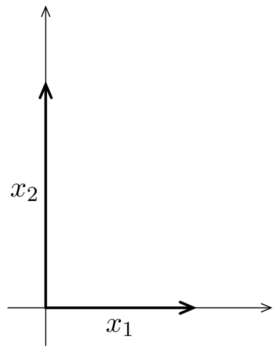
□

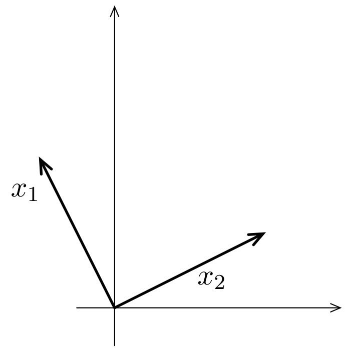
Proposition 7.

Il y a deux classes d'équivalence. On choisit arbitrairement l'une des deux classes d'équivalence et on dit que toutes les bases de cette classe d'équivalence sont directes, et toutes les autres sont indirectes.

Remarque

- Par conséquent, orienter un espace, c'est choisir arbitrairement « la moitié » (entre guillemets car il y en a évidemment une infinité) des bases de E et décréter tout aussi arbitrairement que ces bases sont directes et que les autres sont indirectes. En général, quand on se place sur $\mathbb{R}^n$, on décrète que la base canonique est directe et cela suffit à orienter l'espace (on parle parfois d'orientation canonique). Par exemple, quand on munit $\mathbb{R}^2$ de son orientation canonique, ci-dessous une base directe (à gauche) et une base indirecte (à droite) :





- Cet arbitraire n'est pas vraiment surprenant : par exemple, selon qu'on est au-dessus ou en dessous d'un plan, une orientation directe deviendra indirecte et réciproquement. Cela ne change pas la notion d'orientation car l'essentiel est que deux bases qui ont la même orientation gardent la même, peu importe d'où on regarde.
- En conclusion, quand on parle d'aire, de volume orienté, il est sous-entendu : par rapport à une bases arbitrairement choisie (en général la base canonique dans $\mathbb{R}^n$).
- Remarquons enfin que, puisque le déterminant est alterné, quand on permute des éléments d'une base, on multiplie le déterminant par la signature de la permutation. Par conséquent, quand on permute des éléments d'une base, elle garde la même orientation (directe ou indirecte) quand cette signature vaut 1. En particulier, puisqu'une transposition a une signature égale à -1, quand on échange deux vecteurs, on change l'orientation de la base.

I.3. Déterminant d'un endomorphisme

On rappelle que dans toute la suite du cours, E est supposé de dimension n. De plus, on note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E.

I.3.a) Définition

Lemme 1.

Soit f une forme n-linéaire alternée sur E.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

L'application suivante est n-linéaire alternée.

$$\begin{array}{rccc} f_u & : & E^n & \to & \mathbb{K} \\ & & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) \end{array}$$

Démonstration.
Le caractère alterné est immédiat puisque f est alternée, le caractère n-linéaire découle de la linéarité de u et de la n-linéarité de f. $\square$

Proposition 8.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

Il existe un unique scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall f \in \Lambda_n(E), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad f\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) = \alpha \times f(x_1, \dots, x_n)$$

Ce scalaire est appelé **déterminant de l'endomorphisme** *u et est est noté* $\det(u)$.

Remarque

- En d'autres termes, $\det(u)$ est la « constante de proportionnalité » par laquelle on multiplie $f(x_1, \dots, x_n)$ lorsqu'on applique f à $u(x_1), \dots, u(x_n)$.
- Notons que la définition de $\det(u)$ ne dépend pas de la base choisie : certes, on a par ailleurs $\det(u) = \det_B\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ (voir la proposition suivante), mais cela est vrai pour toute base, la définition du déterminant d'un endomorphisme est indépendante du choix de la base.

Démonstration.

- Le $\mathbb{K}$-ev $\Lambda_n(E)$ étant de dimension 1, il existe donc $\varphi \in \Lambda_n(E) \backslash \{0_{\mathscr{L}(E)}\}$ tel que φ est une base de $\Lambda_n(E)$.
- Tout d'abord, d'après le lemme précédent (dont on reprend les notations), $\varphi_u \in \Lambda_n(E)$ donc il existe α tel que $\varphi_u = \alpha\varphi$, c'est-à-dire :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \varphi\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) \;=\; \alpha \times \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

- Soit $f \in \Lambda_n(E)$. Toujours car φ est une base de $\Lambda_n(E)$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \cdot \varphi$. Dès lors, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\begin{aligned} f\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) &= \lambda \times \varphi\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) \\ &= \alpha \times \lambda \times \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \alpha \times f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

  Par construction, α est la coordonnée de φ_u dans la base (φ) et est donc unique.

$\square$

Corollaire 2.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

$$\boxed{\det_{\mathscr{B}}\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) \;=\; \det(u) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)}$$

En particulier :

$$\boxed{\det(u) \;=\; \det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)}$$

En d'autres termes, le déterminant d'un endomorphisme u est le déterminant de l'image d'une base par u.

Remarque

En particulier, la quantité $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)$ est indépendante de la base choisie : on aurait pu définir le déterminant de u de cette manière (et c'est d'ailleurs comme ça qu'on le définit dans certains livres).

Démonstration.

La première égalité vient de la proposition précédente avec $f = \det_{\mathscr{B}}$ qui est bien une forme n-linéaire alternée, et la deuxième vient du fait que $\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ (*cf* définition du déterminant d'une famille de vecteurs : $\det_{\mathscr{B}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée qui vaut 1 en $e_1, \dots, e_n$). $\square$

I.3.b) Propriétés

Proposition 9.

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{\det(\lambda \cdot u) \;=\; \lambda^n \times \det(u)}$$

Démonstration.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

D'après la proposition précédente :

$$\det(\lambda \cdot u) \;=\; \det_{\mathscr{B}}\big(\lambda \cdot u(e_1), \dots, \lambda \cdot u(e_n)\big)$$

Par n-linéarité de $\det_{\mathscr{B}}$:

$$\begin{aligned} \det(\lambda \cdot u) &= \lambda^n \times \det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big) \\ &= \lambda^n \times \det(u) \end{aligned}$$

$\square$

⚠

- Attention, le déterminant d'un endomorphisme n'est pas linéaire, on n'a pas :

$$\det(\lambda \cdot u) \;\cancel{=}\; \lambda \times \det(u)$$

- Pour autant, il est impropre de dire que le déterminant d'un endomorphisme est n-linéaire puisque le déterminant d'un endomorphisme n'est pas défini sur un n-uplet. Le déterminant d'une famille de vecteurs (et, plus tard, d'une matrice) est n-linéaire, mais c'est un (léger) abus de langage de dire que le déterminant d'un endomorphisme est n-linéaire. Néanmoins, on peut garder à l'esprit qu'il vérifie les mêmes conditions qu'une application n-linéaire.

Proposition 10.

$$\boxed{\det(\mathrm{id}_E) = 1}$$

Démonstration.
C'est immédiat : si on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. En effet :

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{id}_E) &= \det_{\mathscr{B}}\left(\mathrm{id}(e_1), \dots, \mathrm{id}(e_n)\right) \\ &= \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Proposition 11.
Soit $(u, v) \in \left(\mathscr{L}(E)\right)^2$.

1) $\boxed{\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)}$
En d'autres termes, le déterminant d'une composée est le produit des déterminants.

2) *En particulier, pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\det\left(u^n\right) = \left(\det(u)\right)^n}$.

Démonstration.

1) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
D'après le corollaire de la partie précédente appliqué à $x_1 = v(e_1)$, …, $x_n = v(e_n)$:

$$\begin{aligned} \det(u \circ v) &= \det_{\mathscr{B}}\left((u \circ v)(e_1), \dots, (u \circ v)(e_n)\right) \\ &= \det(u) \times \det_{\mathscr{B}}\left(v(e_1), \dots, v(e_n)\right) \\ &= \det(u) \times \det(v) \end{aligned}$$

En effet, toujours d'après le corollaire précédent : $\det(v) = \det_{\mathscr{B}}\left(v(e_1), \dots, v(e_n)\right)$.

2) Par récurrence.

□

Proposition 12 (Caractérisation des automorphismes)**.**
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) *L'endomorphisme* u *est bijectif si et seulement si* $\det(u) \neq 0$ *:*

$$u \textit{ est un automorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad \det(u) \neq 0$$

2) *Dans ce cas :* $\boxed{\det\left(u^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(u)}}$.

Remarque
Puisqu'on manie des endomorphismes en dimension finie, on manie en particulier des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. Par conséquent, une fois cette proposition prouvée, si $u \in \mathscr{L}(E)$, nous aurons les quatre équivalences suivantes :

$$u \text{ bijectif} \;\Leftrightarrow\; u \text{ injectif} \;\Leftrightarrow\; u \text{ surjectif} \;\Leftrightarrow\; \det(u) \neq 0$$

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que u est bijectif.
D'après les deux propositions précédentes :

$$\begin{aligned} 1 &= \det(\mathrm{id}_E) \\ &= \det\left(u \circ u^{-1}\right) \\ &= \det(u) \times \det\left(u^{-1}\right) \end{aligned}$$

On obtient : $\det(u) \neq 0$. De plus : $\det\left(u^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

($\Leftarrow$) On démontre la contraposée. Supposons que u n'est pas bijectif.
Comme u est un endomorphisme de E qui est de dimension finie, alors u n'est pas injectif.
On en déduit que l'image d'une base par u est une famille liée. En particulier, $\left(u(e_1), \ldots, u(e_n)\right)$ est une famille liée donc :

$$\det_{\mathscr{B}} \left(u(e_1), \ldots, u(e_n)\right) \ = \ 0$$

Cette quantité est égale à $\det(u)$ ce qui permet de conclure.

$\square$

I.4. Déterminant d'une matrice carrée de taille n

I.4.a) Définition

Définition

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle **déterminant de** A et on note $\det(A)$ le scalaire :

$$\boxed{\det(A) \ = \ \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}}$$

On le note :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Remarque

- On ne peut définir le déterminant que pour une matrice carrée.
- Nous verrons dans la section suivante des moyens pratiques pour calculer le déterminant d'une matrice sans passer par le groupe symétrique. Cependant, cette définition permet de montrer facilement certaines propriétés ultérieures.
- Par définition, $\det(A)$ est le déterminant des vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique sont les $a_{i,j}$. En d'autres termes, $\det(A) = \det_{\mathscr{B}}(C_1, \ldots, C_n)$ où C_1, ..., C_n sont les vecteurs colonnes de A et B la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Plus généralement, si u est un endomorphisme représenté par A dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, on sait que les vecteurs colonnes de A sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ de $u(e_1)$, ..., $u(e_n)$. Dès lors :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det_{\mathscr{B}}\left(u(e_1), \ldots, u(e_n)\right) \\ &= \det(u) \end{aligned}$$

I.4.b) Lien avec le déterminant d'un endomorphisme

Proposition 13.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. On note : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\boxed{\det(A) \ = \ \det(f)}$$

Autrement dit, le déterminant de A est le déterminant de tout endomorphisme représenté par A.

Remarque

- Finalement, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:
  - × la quantité $\det(A)$ est le scalaire :
  $$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$
  - × le scalaire $\det(A)$ est le déterminant des vecteurs colonnes de A,
  - × le scalaire $\det(A)$ est le déterminant de tout endomorphisme représenté par A.

  Ces trois définitions sont équivalentes : on aurait pu définir le déterminant avec n'importe laquelle d'entre elles.
- Le fait que le déterminant d'une matrice soit le déterminant de tout endomorphisme représenté par cette matrice donne de façon immédiate les résultats suivants.

I.4.c) Propriétés

Proposition 14.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{\det(\lambda \cdot A) \ = \ \lambda^n \times \det(A)}$$

Proposition 15.

$$\boxed{\det(I_n) \ = \ 1}$$

I.4.d) Déterminant d'un produit

Proposition 16.
Soit $(A, B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$.

1) $\boxed{\det(A \times B) \ = \ \det(A) \times \det(B)}$

2) *En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$:* $\boxed{\det\left(A^n\right) = \left(\det(A)\right)^n}$.

Démonstration.
Conséquence directe de la Proposition 13. □

Proposition 17 (Caractérisation des matrices inversibles)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0}$$

Dans ce cas : $\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}}$.

Démonstration.
Conséquence directe de la proposition 13. □

Corollaire 3 (Invariance du déterminant par similitude)**.**
Soit $(A, B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$.

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ semblables} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = \det(B)}$$

Autrement dit, deux matrices semblables ont même déterminant.

Démonstration.
Comme A et B sont semblables, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\left(P^{-1}\right) \times \det(B) \times \det(P) \\ &= \frac{1}{\det(P)} \times \det(B) \times \det(P) \ = \ \det(B) \end{aligned}$$ □

- La réciproque est fausse !
  Par exemple, toute matrice non inversible a un déterminant nul alors que la matrice nulle n'est semblable qu'à elle-même (donc une matrice inversible non nulle et la matrice nulle ont même déterminant mais ne sont pas semblables). Ce résultat est surtout utile par contraposée : si deux matrices n'ont pas le même déterminant, on peut affirmer directement qu'elles ne sont pas semblables.
- Deux matrices équivalentes n'ont pas le même déterminant !
  On sait que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Par conséquent, I_n et $2I_n$ sont équivalentes mais $\det(I_n) = 1$ et $\det(2 \cdot I_n) = 2^n$.

Corollaire 4.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice représentative A dans une base $\mathscr{B}$ de E.

$$
\begin{aligned}
\det(A) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \det(f) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad f \textit{ est bijectif} \\
&\Leftrightarrow \quad u \textit{ est injectif} \\
&\Leftrightarrow \quad u \textit{ est surjectif} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = n \\
&\Leftrightarrow \quad A \textit{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad \textit{Les vecteurs colonnes de } A \textit{ forment une famille libre} \\
&\Leftrightarrow \quad \textit{Les vecteurs lignes de } A \textit{ forment une famille libre} \\
&\Leftrightarrow \quad \textit{Les vecteurs lignes de } A \textit{ forment une base de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\
&\Leftrightarrow \quad \textit{Les vecteurs colonnes de } A \textit{ forment une base de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K})
\end{aligned}
$$

I.4.e) Déterminant de la transposée

Proposition 18.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\det\left(A^T\right) \;=\; \det(A)}$$

Démonstration.

- Par définition de $\det(A)$:

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

- Soit $\sigma \in S_n$.
Rappelons que σ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Par conséquent, les réels $\sigma(1)$, …, $\sigma(n)$ sont exactement les nombres 1, …, n dans un certain ordre. On peut donc réorganiser les termes du produit $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$, c'est-à-dire : mettre d'abord le terme $a_{\sigma(i),i}$ tel que $\sigma(i) = 1$, et alors $i = \sigma^{-1}(1)$, puis le terme $a_{\sigma(i),i}$ tel que $\sigma(i) = 2$, et alors $i = \sigma^{-1}(2)$ etc.
On obtient :

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma^{-1}(1)}\, a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

- Or, $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) \;=\; \varepsilon(\sigma)^{-1} \;=\; \varepsilon(\sigma)$ car les éléments de ± 1 sont leur propre inverse. Par conséquent :

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon\left(\sigma^{-1}\right)\, a_{1,\sigma^{-1}(1)}\, a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

Par ailleurs, quand σ parcourt S_n, σ^{-1} parcourt S_n : on peut faire le changement d'indice $\boxed{\tau = \sigma^{-1}}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \left(A^T\right)_{\tau(1),1} \left(A^T\right)_{\tau(2),2} \cdots \left(A^T\right)_{\tau(n),n} \\ &= \det\left(A^T\right) \end{aligned}$$

□

II. Calcul pratique de déterminant d'une matrice carrée

II.1. Cas des matrices triangulaires

Proposition 19.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *une matrice triangulaire supérieure.*

$$\boxed{\det(A) \;=\; a_{1,1} \times \cdots \times a_{n,n}}$$

Démonstration.

- Par définition :

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Soit $\sigma \in S_n$. Supposons, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\sigma(i) \leqslant i$.
On démontre par récurrence finie (à faire) : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) = i$.

- Il en découle que σ est l'identité. Par contraposée, si $\sigma \neq \mathrm{id}$, alors il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i_0) > i_0$ donc $a_{\sigma(i_0),i_0} = 0$ donc le produit correspondant à σ dans la définition de $\det(A)$ est nul. En d'autres termes, dans cette somme, il ne reste que le terme correspondant à id qui vaut $a_{1,1} \cdots a_{n,n}$ puisque la signature de id vaut 1.

□

Corollaire 5.

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *une matrice triangulaire inférieure.*

$$\boxed{\det(A) \;=\; a_{1,1} \times \cdots \times a_{n,n}}$$

2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *une matrice diagonale.*

$$\boxed{\det(A) \ = \ a_{1,1} \times \cdots \times a_{n,n}}$$

Démonstration.
Le premier résultat vient du fait qu'une matrice et sa transposée ont même déterminant, et le deuxième résultat vient du fait qu'une matrice diagonale est triangulaire. □

⚠ Évidemment, ce résultat est faux pour une matrice quelconque (ni triangulaire, ni diagonale).

Remarque

- On retrouve le fait qu'une matrice triangulaire ou diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.⚠⚠.
- En conclusion, le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.

Exemple
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\det(\lambda \cdot I_n) \ = \ \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \ = \ \lambda^n$$

Même si on le savait déjà puisque $\det(I_n) = 1$ et puisque le déterminant est n-linéaire donc $\det(\lambda \cdot I_n) = \lambda^n \times \det(I_n) = \lambda^n$.

Remarque

- En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \ = \ \lambda$$

  Ceci qui prouve que l'application $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupes surjectif. En prenant un endomorphisme représenté par cette matrice, il en découle que le morphisme $\det : GL(E) \to \mathbb{K}^*$ est aussi surjectif.
- Ce morphisme n'est pas injectif dès que $n \geqslant 2$. En effet :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \ = \ 1$$

  Ainsi $\mathrm{Ker}(\det) \neq \{I_n\}$ donc ce morphisme n'est pas injectif. De même, $\det : GL(E) \to \mathbb{K}^*$ n'est pas injectif dès que $n \geqslant 2$.
- Le noyau du déterminant (restreint à $GL_n(\mathbb{K})$) est noté $SL_n(\mathbb{K})$ et est appelé groupe spécial linéaire d'ordre n. C'est l'ensemble des matrices ayant un déterminant égal à 1 (et c'est donc un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$).
- Par analogie, on note $SL(E)$ le noyau de la restriction du déterminant à $GL(E)$: c'est l'ensemble des endomorphismes ayant un déterminant égal à 1. C'est toujours un sous-groupe de $GL(E)$. Plus précisément, en revenant aux aires, volumes, $SL(E)$ est l'ensemble des endomorphismes qui laissent le volume invariant.

II.2. Déterminant et pivot de Gauss

Proposition 20 (Effet des opérations élémentaires sur le déterminant)**.**

1) *Quand on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1.*

2) *Multiplier une ligne ou une colonne par un scalaire λ multiplie le déterminant par ce scalaire λ.*

3) *Effectuer une opération du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ (avec $i \neq j$) ne modifie pas le déterminant.*

4) *Plus généralement, on peut ajouter une combinaison linéaire des autres lignes à l'une des lignes, ou une combinaison linéaire des autres colonnes à une autre colonne, sans changer la valeur du déterminant.*

Remarque

- Attardons-nous sur la deuxième opération élémentaire, à savoir $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ (avec $\lambda \neq 0$). Le déterminant est alors multiplié par λ, c'est-à-dire que si prend $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et si on note $\tilde{A}$ la matrice obtenue en effectuant l'une de ces deux opérations élémentaires, alors $\det(\tilde{A}) = \lambda \det(A)$, c'est-à-dire que le déterminant de la nouvelle matrice est égal au déterminant de l'ancienne multiplié par λ.
- Cependant, dans ce paragraphe, c'est $\det(A)$ qui nous intéresse : on a alors $\det(A) = \dfrac{1}{\lambda}\det(\tilde{A})$, c'est-à-dire que le déterminant de la matrice originelle est le déterminant de la matrice après modification, **divisé** par λ.
- On en déduit un moyen simple de calculer $\det(A)$. On fait comme pour inverser une matrice : on part de A pour arriver à une matrice triangulaire à l'aide d'opérations élémentaires (on peut mélanger les lignes et les colonnes ici) :

  a) Quand on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1.

  b) Quand on multiplie une ligne ou une colonne par un scalaire λ, on **divise** le nouveau déterminant par ce scalaire.

  c) Effectuer une opération du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ (avec $i \neq j$) ne modifie pas le déterminant.

Exemple

Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & 2a & 2a \\ 2b & a+b & 2a \\ 2b & 2b & a+b \end{vmatrix}$$

II.3. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

II.3.a) Notion de mineur et de cofacteur

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

1) On appelle **mineur** d'indice (i,j) de la matrice A, le déterminant $\Delta_{i,j}(A)$ de la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

2) On appelle **cofacteur** d'indice (i,j) de A le scalaire $(-1)^{i+j}\,\Delta_{i,j}(A)$.

Remarque
Le mineur $\Delta_{i,j}(A)$ est donc le déterminant ci-dessous :

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & \cdots & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
 & \vdots & & \vdots & & \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}_{[n-1]}$$

II.3.b) Développement par rapport à une colonne

Lemme 2.
Soit $B \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et soit :

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc}
1 & * & * & * \\
\hline
0 & & & \\
\vdots & & B & \\
0 & & &
\end{array}\right)$$

$$\boxed{\det(A) \ = \ \det(B)}$$

Proposition 21 (Développement par rapport à une colonne)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\boxed{\det(A) \ = \ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{i,j} \, \Delta_{i,j}(A)}$$

II.3.c) Développement par rapport à une ligne

Proposition 22 (Développement par rapport à une ligne).
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\boxed{\det(A) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\, \Delta_{i,j}(A)}$$

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (+1) \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} + (-1) \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} + (+1) \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right| - 2 \times \left|\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right| + 3 \times \left|\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\right|$$

$$= 0$$

On rappelle que l'on déduit de ce calcul que la matrice considérée n'est pas inversible.

Remarque

- Il est simple de développer par rapport à une ligne / colonne contenant beaucoup de 0.
  On commencera par utiliser la méthode du pivot pour « mettre » des 0 dans la matrice. Puis on développera par rapport aux lignes et colonnes.
- On privilégiera, tant que possible, la méthode du pivot, qui fournit davantage des résultats sous forme factorisée. Il est alors plus simple de conclure quant à la nullité du déterminant.

Exemple

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (-1) \times \left|\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| \qquad \textit{(développement par rapport à la } 3^{\text{ème}} \textit{ colonne)}$$

$$= (-1)\left((-1) \times \left|\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right| - 2 \times \left|\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right|\right) + \left(-(-1) \times \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right|\right) \;=\; 4$$

(développement par rapport à la $1^{\text{ère}}$ colonne)

Exercice 2

1. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivante est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & (0) \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & 1 \\ (0) & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Calculer :

$$D \;=\; \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$$

On combinera la méthode du pivot de Gauss avec celle du développement par rapport à une ligne / à une colonne.

II.4. Cas des matrices carrées d'ordre 2

Proposition 23.

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$*. Alors il existe* $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ *tel que :* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\det(A) \;=\; ad - bc}$$

Démonstration.
Pour la démonstration, on note plutôt : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$.
L'ensemble S_2 est réduit à deux éléments : $S_2 = \{\mathrm{id}; (1\,2)\}$.
Par conséquent, si on note $\tau = (1\,2)$, comme la signature d'une transposition est égale à -1 :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \varepsilon(\mathrm{id}) a_{\mathrm{id}(1),1} a_{\mathrm{id}(2),2} + \varepsilon(\tau) a_{\tau(1),1} a_{\tau(2),2} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \end{aligned}$$

□

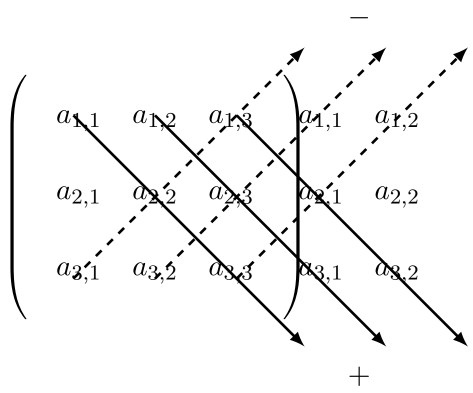
II.5. Cas des matrices carrées d'ordre 3

Proposition 24 (Règle de Sarrus)**.**

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

$$\det(A) \;=\; a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}$$

Remarque
Il existe un moyen simple de visualiser la règle de Sarrus :

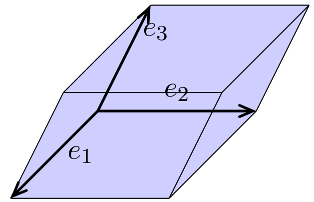


- Attention, on ne peut pas généraliser à une matrice de taille 4 ! À partir de la dimension 4, il faut utiliser les méthodes des paragraphes suivants.
- On utilisera `JAMAIS` cette règle de calcul ! Elle ne permet pas d'obtenir des expressions factorisées du déterminant, ce qui est toujours l'objectif recherché.

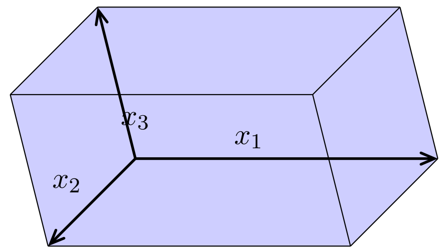
III. Lien entre déterminant, aire et volume

On suppose dans ce paragraphe que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Le déterminant (d'une matrice ou d'une famille de vecteurs) possède une interprétation géométrique : on a vu que l'aire d'un parallélogramme ou le volume d'un parallélépipède (pas forcément rectangle, pavé pour les intimes) formé par, respectivement, deux ou trois vecteurs, était une forme n-linéaire alternée (avec $n = 2$ et $n = 3$ respectivement). Or, on a prouvé que toutes les formes n-linéaires alternées sont proportionnelles au déterminant. Par conséquent, si on se donne deux vecteurs x_1 et x_2 (dans le plan), le déterminant de ces deux vecteurs (dans une base quelconque) est proportionnel à leur déterminant, et c'est la même chose en dimension 3 (avec le volume du pavé formé par trois vecteurs).

Cherchons la constante de proportionnalité. Si on fixe une base $\mathscr{B}$ de référence, alors le déterminant de cette base vaut 1 : on peut voir ça comme une unité de volume (ou d'aire en dimension 2). Plus précisément, si on dit que le volume du pavé formé par ces trois vecteurs (ou deux en dimension 2) est l'unité de volume, alors le déterminant et le volume coïncident pour ces vecteurs donc la constante de proportionnalité vaut 1, c'est-à-dire que le volume est égal au déterminant ! Encore une fois : si on fixe une base $\mathscr{B}$, alors le déterminant de vecteurs dans cette base est égal au volume formé par ces vecteurs (en considérant le volume du pavé (précisons que le pavé n'a aucune raison d'être droit : sur les dessins ci-dessous, ce n'est d'ailleurs pas le cas) formé par les vecteurs de la base comme l'unité de volume c'est-à-dire valant 1). C'est pareil en dimension 2, et cela nous permet de généraliser la notion de volume en dimension supérieure : en dimension n, on définit le volume (on parle parfois d'hypervolume) du « pavé » formé par n vecteurs comme le déterminant, encore une fois en partant d'une base qui donne un volume de référence, une unité de volume.



Volume de référence $= \det_B(e_1, e_2, e_3) = 1$



Volume du pavé $= \det_B(x_1, x_2, x_3)$

En conclusion, dans le cadre de la dimension 2 ou 3, on a prouvé le résultat suivant :

Proposition 25.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

- *Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On appelle* **volume** *du pavé formé par $(x_1, \dots, x_n)$ relativement à la base $\mathscr{B}$ la quantité $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$.*
- *Soient $x_1 = (a_1, b_1)$ et $x_2 = (a_2, b_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. L'***aire** *du pavé formé par x_1 et x_2 est égale à :*

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

- *Soient $x_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $x_2 = (a_2, b_2, c_2)$ et $x_3 = (a_3, b_3, c_3)$ trois éléments de $\mathbb{R}^3$. Le* **volume** *du pavé formé par x_1, x_2, x_3 est égal à :*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

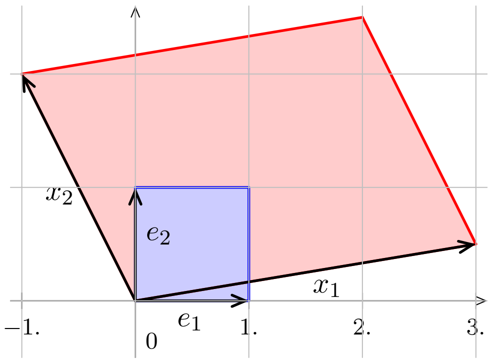
Remarque

- Si rien n'est précisé, on prend comme base la base canonique et donc comme aire de référence le carré formé par les vecteurs de la base canonique (idem pour le volume).
- Pour une aire ou un volume, on aurait pu montrer ce résultat à la main en se souvenant de l'aire d'un parallélogramme (Base $\times$ hauteur) ou le volume d'un pavé (Aire de la base $\times$ hauteur) mais, d'une part, il aurait fallu un peu de travail géométrique, et d'autre part, cela ne nous aurait pas permis de généraliser la notion de volume en dimension supérieure.
- Enfin, quand on dit Base $\times$ hauteur, il ne faut pas oublier que l'aire est algébrique i.e. peut être négative si les vecteurs sont dans le sens indirect !

Exemple

L'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $x_1 = \left(3, \dfrac{1}{2}\right)$ et $x_2 = (-1, 2)$ est :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$



Parlons à présent de l'interprétation géométrique du déterminant d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$. Puisque, pour tous vecteurs x_1, ..., x_n (et toute base $\mathscr{B}$) :

$$\det_{\mathscr{B}}\left(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\right) = \det(f) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

alors on en déduit le résultat suivant.

Proposition 26.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soient B une base de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

Le volume du pavé formé par $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ est égal au volume du pavé formé par x_1, ..., x_n, multiplié par $\det(u)$. En d'autres termes, quand on applique un endomorphisme u, on multiplie les volumes par $\det(u)$.

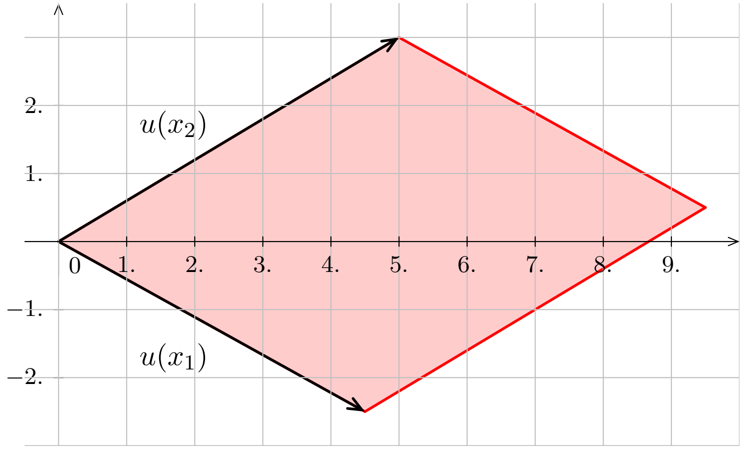
Exemple

On note $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + 3y, y - x) \end{array}$. Alors $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ et sa matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que $\det(f) = \det(A) = 4$: quand on applique f, on multiplie les aires par 4. Si on reprend l'exemple ci-dessus, alors $f(x_1) = \left(\dfrac{9}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$ et $f(x_2) = (5, 3)$ si bien que l'aire du parallélogramme formé par $f(x_1)$ et $f(x_2)$ vaut :

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{2} & 5 \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{vmatrix} = 26 = 4 \det(x_1, x_2)$$



IV. Applications classiques du déterminant

IV.1. Déterminant de Vandermonde

Proposition 27 (Déterminant de Vandermonde)**.**

Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$.

1. *On appelle* **déterminant de Vandermonde** *de* $(x_1,\dots,x_n)$ *le déterminant suivant :*

$$\boxed{V(x_1,\dots,x_n) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}}$$

2. $\boxed{V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)}$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $\mathscr{P}(n)$
où $\quad \mathscr{P}(n) : \forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n, V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$.

- **Initialisation** :
  Soit $(x_1,x_2)\in\mathbb{K}^2$.

$$V(x_1,x_2) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \;=\; x_2 - x_1$$

  D'où $\mathscr{P}(2)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie
(*i.e.* $\forall (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}, V(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)$).
Soit $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Notons :

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & X \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 & X^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} & X^{n-1} \\ {x_1}^n & {x_2}^n & \cdots & {x_n}^n & X^n \end{vmatrix} \in \mathbb{K}[X]$$

P est bien un élément de $\mathbb{K}[X]$ car déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$.

- Supposons dans un premier temps $x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts.
  En développant par rapport à la dernière colonne, on trouve que P est un polynôme de degré n de coefficient dominant $V(x_1, \ldots, x_n)$ qui, par hypothèse de récurrence, vaut

  $$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

  et donc est non nul.
  De plus, $x_1, \ldots, x_n$ sont des racines de P : en effet, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i)$ est le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales dont est nul. Finalement, P est de degré n et admet n racines distinctes donc elles sont simples, et puisque son coefficient dominant est $V(x_1, \ldots, x_n)$, On en déduit :

  $$P(X) = V(x_1, \ldots, x_n) \times \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

  Ainsi :

  $$\begin{aligned} V(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= P(x_{n+1}) \\ &= V(x_1, \ldots, x_n) \times \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \times \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

- Si les x_i ne sont pas deux à deux distincts, le déterminant est nul et le produit est nul donc on a encore égalité.

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \mathscr{P}(n)$. □

Remarque

- On remarque la matrice de Vandermonde (la matrice naturellement définie par le déterminant de Vandermonde) est est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

$$VDM = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

- Le déterminant d'une matrice étant égal à sa transposée, on a également le résultat suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

Ce dernier déterminant est aussi appelé déterminant de Vandermonde et est noté aussi $V(x_1, \ldots, x_n)$ (ce qui n'a rien d'étonnant puisqu'il est égal au précédent).

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = (3-2) \times (5-2) \times (5-3) = 6$$

Exemple

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Remarque

La méthode consistant à ajouter une ligne pour « transformer un déterminant en polynôme », polynôme qu'on cherche ensuite à factoriser, est classique et doit être retenue. On la retrouve par exemple lorsqu'on cherche le déterminant suivant, qu'on peut appeler un déterminant de Vandermonde lacunaire (*cf* TD) :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{n-2} & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{n-2} & {x_2}^n \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{n-2} & {x_3}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{n-2} & {x_n}^n \end{vmatrix}$$

L'astuce est d'ajouter la colonne manquante... mais il faut aussi ajouter une ligne sinon la matrice n'est pas carrée ! On s'en tire avec des X, comme ci-dessus : on introduit donc le polynôme :

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & X & \cdots & X^{n-2} & X^{n-1} & X^n \\ 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{n-2} & {x_1}^{n-1} & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{n-2} & {x_2}^{n-1} & {x_2}^n \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{n-2} & {x_3}^{n-1} & {x_3}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{n-2} & {x_n}^{n-1} & {x_n}^n \end{vmatrix}$$

On cherche ensuite à factoriser P puis à relier le déterminant recherché à P : cf. TD.

IV.2. Polynômes caractéristiques

Définition *(Polynôme caractéristique d'un endomorphisme / d'une matrice)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On appelle **polynôme caractéristique** de f, et on note χ_f, le polynôme défini par :

$$\chi_f(X) \;=\; \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big) \;=\; (-1)^n \det\big(f - X\,\mathrm{id}_E\big)$$

- On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de f sa multiplicité en tant que racine de χ_f.

2) Cas des matrices carrées

- On appelle **polynôme caractéristique** de A, et on note χ_A, le polynôme défini par :

$$\chi_A(X) \;=\; \det\big(X\,I_n - A\big) \;=\; (-1)^n \det\big(A - X\,I_n\big)$$

- On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de A sa multiplicité en tant que racine de χ_A.

Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$\chi_f(X) \;=\; \chi_A(X)$$

En particulier, le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Exercice 3

Déterminer le polynôme caractéristique des matrices suivantes.

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B \;=\; \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$E \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$