CH XXII : Déterminants

I. Formes n-linéaires alternées

I.1. Applications n-linéaires

I.1.a) Définitions et premiers exemples

Définition

Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application.

- On dit que f est **n-linéaire** si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, pour tous $x_1 \in E_1$, $\ldots$, $x_{k-1} \in E_{k-1}$, $x_{k+1} \in E_{k+1}$, $\ldots$, $x_n \in E_n$ fixés :

  l'application $f_k : \begin{array}{ccc} E_k & \to & F \\ x & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \end{array}$ est linéaire.

  Autrement dit, une application f est n-linéaire si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall (u_i, v_i) \in E_i^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, & \\ & f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda \cdot u_i + \mu \cdot v_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ = & \lambda \cdot f(x_1, \ldots, x_{i-1}, u_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ + & \mu \cdot f(x_1, \ldots, x_{i-1}, v_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{array}}$$

- Si $n = 2$, on dit que f est **bilinéaire**.
- Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une **<u>forme</u> n-linéaire**.
  Si de plus $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, on dit que f est une forme n-linéaire **sur** E.

Exemples

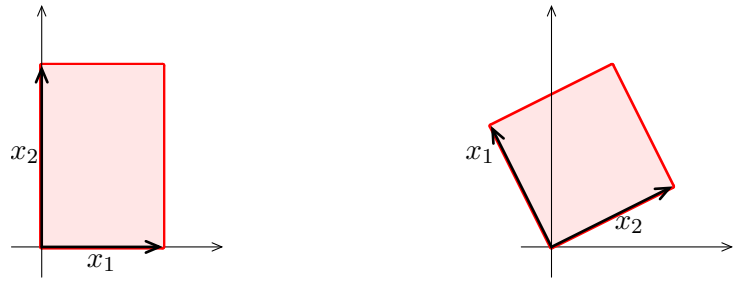
- Le produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{R})$.
- Le produit fonctionnel $(f, g) \mapsto fg$ est bilinéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Pour tous $\mathbb{R}$-ev E, E', E'', la composition $(f, g) \mapsto f \circ g$ est bilinéaire de $\mathscr{L}(E, E') \times \mathscr{L}(E', E'')$ dans $\mathscr{L}(E, E'')$.
- L'application suivante est une forme 4-linéaire :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^4 & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & 5x_1x_2x_3x_4 \end{array} \right.$$

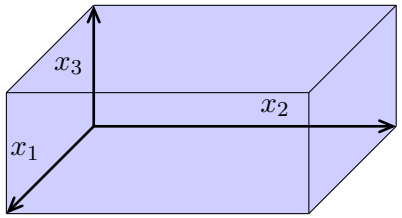
- L'application suivante est une forme n-linéaire :

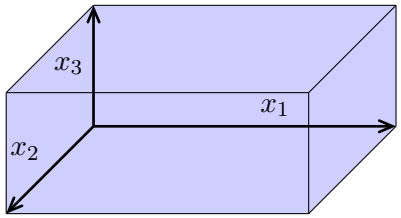
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (f_1, \ldots, f_n) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f_1(t) \times \cdots \times f_n(t)\, dt \end{array} \right.$$

- L'aire d'un rectangle ou, plus généralement, d'un parallélogramme formé par deux vecteurs, est une forme bilinéaire car (par exemple) l'aire est doublée quand on double une des deux longueurs. Attention, quand on parle d'aire (ou de volume dans l'exemple suivant), on parle d'aire **signée** ou **algébrique**, c'est-à-dire qu'une aire du parallélogramme formé par x_1 et x_2 est comptée positivement si on va de x_1 à x_2 dans le sens direct, et négativement sinon. Ci-dessous, l'aire du parallélogramme formé par x_1 et x_2 est comptée positivement (à gauche) et négativement (à droite).



- Le volume d'un parallélépipède ou pavé (pas forcément droit) formé par trois vecteurs, est une forme 3-linéaire. Idem, on parle du volume signé ou algébrique selon que les vecteurs sont dans le sens direct ou non (règle de la main droite, du tire-bouchon, de Spiderman etc.). À gauche, un volume positif, et à droite, un volume négatif.





I.1.b) Conséquences immédiates

Proposition 1.
L'ensemble des applications n-linéaires de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F.

Proposition 2.

Soient E_1, ..., E_n des $\mathbb{K}$-ev.

Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application n-linéaire.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

$$\boxed{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0_{E_i}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \ = \ 0_F}$$

Proposition 3.

Soient E_1, ..., E_n des $\mathbb{K}$-ev.

Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application n-linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

$$\boxed{f(\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n) \ = \ \lambda^n \cdot f(x_1, \ldots, x_n)}$$

I.2. Formes n-linéaires alternées

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-ev.

Soit f une forme n-linéaire sur E.

On dit que f est **alternée** si f est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.
Autrement dit :

$$\boxed{\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \big(i \neq j \ \ \texttt{ET} \ \ x_i = x_j\big) \ \Rightarrow \ f(x_1, \ldots, x_n) = 0}$$

On note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E.

Exemple

- L'aire d'un parallélogramme formé par deux vecteurs est une forme alternée sur $\mathbb{R}^2$.
- Le volume d'un pavé formé par 3 vecteurs est une forme alternée sur $\mathbb{R}^3$.
- L'application φ suivante est une forme bilinéaire sur $E = \mathcal{C}^0\big([0, 1], \mathbb{K}\big)$ mais elle n'est pas alternée.

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E^2 & \to & \mathbb{K} \\ & & (f, g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t) \times g(t)\ dt \end{array}$$

En effet, en choisissant $f = g = \mathrm{id}_E$, alors : $\varphi(f, g) = \dfrac{1}{3} \neq 0$.

I.3. Propriétés immédiates des formes n-linéaires alternées

I.3.a) Comportement sur une famille liée

Proposition 4.

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

$$\boxed{(x_1, \dots, x_n) \text{ liée } \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0}$$

Démonstration.
Supposons que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.
Alors il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot x_k = 0_E$$

Comme $(\mu_1, \dots, \mu_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$, on suppose, sans perte de généralité : $\mu_n \neq 0$.
Alors :

$$x_n = -\frac{1}{\mu_n} \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \cdot x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \cdot x_k \quad \left(\text{en posant : } \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \lambda_k = -\frac{\mu_k}{\mu_n}\right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \cdot x_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \times f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_k) && \textit{(car } f \textit{ est } n\textit{-linéaire)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \times 0 && \textit{(car } f \textit{ est alternée)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

I.3.b) Ajout d'une combinaison linéaire

Proposition 5.

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $(\lambda_j)_{j \neq i} \in \mathbb{K}^{n-1}$.

$$\boxed{f\left(x_1, \dots, x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j, \dots, x_n\right) = f(x_1, \dots, x_n)}$$

En d'autres termes, on ne change pas la valeur d'une forme linéaire alternée en ajoutant à un terme une combinaison linéaire des autres termes.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{aligned} & f\left(x_1, \dots, x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j, \dots, x_n\right) \\ = \quad & f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ + \quad & \sum_{j \neq i} \lambda_j \times f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_n) && \textit{(car } f \textit{ est } n\textit{-linéaire)} \\ = \quad & f(x_1, \dots, x_n) + \cancel{\sum_{j \neq i} \lambda_j \times 0} && \textit{(car } f \textit{ est alternée)} \\ = \quad & f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

I.3.c) Permutation de vecteurs

Proposition 6.

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ vérifiant : $i < j$.

a) $$\boxed{f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i}_{j}, \dots, x_n) \;=\; -f(x_1, \dots, x_n)}$$

On dit que f est **antisymétrique**.

b) *Plus généralement, soit σ une permutation d'éléments de $[\![1, n]\!]$.*

$$\boxed{f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \;=\; \varepsilon(\sigma)\, f(x_1, \dots, x_n)}$$

où $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$, où r est le nombre d'échanges de deux éléments dans la permutation σ.

Démonstration.
On démontre le point ***a)*** (le point ***b)*** en est une conséquence).

$$\begin{aligned}
& f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
+\; & f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\
= \; & \Big(f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_{j-1}, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n)\Big) \\
+\; & \Big(f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n)\Big) \\
& \textit{(comme } f \textit{ est alternée, cela revient à ajouter } 0 \textit{ à chaque ligne)} \\
= \; & f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_{j-1}, x_i, \dots, x_n) \\
+\; & f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n) && \textit{(par } n\textit{-linéarité de } f\textit{)} \\
= \; & f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_{j-1}, x_i + x_j, \dots, x_n) && \textit{(par } n\textit{-linéarité de } f\textit{)} \\
= \; & 0 && \textit{(car } f \textit{ alternée)}
\end{aligned}$$

□

Remarque
Soit f une forme n-linéaire sur E. On peut même démontrer l'équivalence suivante :

$$\boxed{f \text{ alternée} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ antisymétrique}}$$

Remarque
Revenons sur la formulation du point ***b)***.
La fonction ε est en fait appelée **signature** (mais on sort du cadre du programme de PCSI). Détaillons sa définition sur des exemples.

- Considérons la permutation suivante : $\sigma = (2\ 1\ 3)$.
  Cette permutation consiste seulement en une interversion (celle des nombres 1 et 2). Ainsi : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^1 = -1$.
  Soit f une fonction 3-linéaire alternée sur E. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in E^3$.

$$\begin{aligned}
f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) &= f(x_2, x_1, x_3) \\
&= -f(x_1, x_2, x_3) && \textit{(car } f \textit{ est 3-linéaire alternée)}
\end{aligned}$$

- Considérons la permutation suivante : $\sigma = (2\ 3\ 1)$.
  Cette permutation consiste en deux interversions (celles des nombres 2 et 3, puis 3 et 1). Ainsi : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^2 = 1$.
  Soit f une fonction 3-linéaire alternée sur E. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in E^3$.

$$\begin{aligned}
f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) &= f(x_2, x_3, x_1) \\
&= -f(x_3, x_2, x_1) && \textit{(car } f \textit{ est 3-linéaire alternée)} \\
&= f(x_1, x_2, x_3) && \textit{(car } f \textit{ est 3-linéaire alternée)}
\end{aligned}$$

II. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

II.1. Théorème fondamental et définition

Il reste des questions d'importance :

× quelle est la structure de l'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes linéaires alternées ? On sait déjà que c'est un $\mathbb{K}$-ev, mais est-il de dimension finie ? Si oui, quelle est sa dimension ?

× que peut-on en déduire sur l'expressivité des formes n-linéaires alternées ?

Théorème 1.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- *L'application*

$$\boxed{\begin{array}{llll} \det_{\mathscr{B}} : & E^n & \to \mathbb{K} & \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \end{array}}$$

est l'unique forme n-linéaire alternée f sur E^n qui vérifie $f(\mathscr{B}) = 1$ et on l'appelle **déterminant relativement à la base** $\mathscr{B}$.

× *Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le scalaire $a_{i,j}$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur x_j dans la base $\mathscr{B}$.*

- *L'ensemble $\Lambda_n(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.*
  Plus précisément, l'application $\det_{\mathscr{B}}$ est une base de $\Lambda_n(E)$. Autrement dit, toute forme n-linéaire alternée sur E est un multiple par un scalaire de $\det_{\mathscr{B}}$.

⚠ On ne peut calculer que le déterminant de n vecteurs en dimension n. Si on est en dimension 2, on ne peut calculer que le déterminant de deux vecteurs, si on est en dimension 3, on ne peut calculer que le déterminant de trois vecteurs etc. Ce sera la même chose avec le déterminant d'une matrice : on ne pourra calculer que le déterminant d'une matrice carrée.

Démonstration.

- Il est immédiat que $\Lambda_n(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{E^n}$.
- Démontrons que $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire alternée vérifiant :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) \;=\; 1$$

× Tout d'abord, par définition de $\det_{\mathscr{B}}$, cette application est bien à valeurs dans $\mathbb{K}$ (car elle est le produit puis la somme d'éléments de $\mathbb{K}$).

× Démontrons que $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Soit $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in E^{n-1}$.
Pour tout $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}$, on note $(a_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!]}$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(u_k, v_k) \in E^2$. On note $(b_{i,k})_{i \in [\![1,n]\!]}$ (resp. $(c_{i,k})_{i \in [\![1,n]\!]}$) les coordonnées de u_k (resp. v_k) dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned} & \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, \lambda \cdot u_k + \mu \cdot v_k, \dots, x_n) \\ = \;& \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots (\lambda b_{\sigma(k),k} + \mu c_{\sigma(k),k}) \cdots a_{\sigma(n),n} \\ = \;& \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(k),k} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ & + \; \mu \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots c_{\sigma(k),k} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ = \;& \lambda \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, u_k, \dots, x_n) + \mu \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, v_k, \dots, x_n) \end{aligned}$$

× Montrons que $\det_{\mathscr{B}}$ est alternée.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
Supposons : $i \neq j$ et $x_i = x_j$.
On note τ la permutation $(k\ j)$. Alors l'application $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ est une bijection de S_n dans lui-même (de réciproque $\sigma \circ \tau^{-1} = \sigma \circ \tau$). On en déduit l'égalité suivante à l'aide du « changement d'indice » $\boxed{\varphi = \sigma \circ \tau}$:

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \;=\; \sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi \circ \tau) a_{\varphi \circ \tau(1),1} \;\cdots\; a_{\varphi \circ \tau(n),n}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\varphi\circ\tau) &= \varepsilon(\varphi)\times\varepsilon(\tau)\\ &= -\varepsilon(\varphi)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}&\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)\\ =\ & -\sum_{\varphi\in S_n}\varepsilon(\varphi)\ a_{\varphi\circ\tau(1),1}\ \cdots\ a_{\varphi\circ\tau(i),i}\ \cdots\ a_{\varphi\circ\tau(j),j}\ \cdots\ a_{\varphi\circ\tau(n),n}\\ =\ & -\sum_{\varphi\in S_n}\varepsilon(\varphi)a_{\varphi(1),1}\ \cdots\ a_{\varphi(j),i}\ \cdots\ a_{\varphi(i),j}\ \cdots\ a_{\varphi(n),n}\\ & \textit{(par définition de } \tau\textit{)}\end{aligned}$$

Or : $x_i = x_j$. Ces deux vecteurs de E ont donc mêmes coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad a_{k,i} = a_{k,j}$$

En particulier :

$$a_{\varphi(j),k} = a_{\varphi(j),j}\qquad\text{et}\qquad a_{\varphi(j),k} = a_{\varphi(j),j}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}&\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)\\ =\ & -\sum_{\varphi\in S_n}\varepsilon(\varphi)\ a_{\varphi(1),1}\ \cdots\ a_{\varphi(j),j}\ \cdots\ a_{\varphi(i),i}\ \cdots\ a_{\varphi(n),n}\\ =\ & -\sum_{\varphi\in S_n}\varepsilon(\varphi)\ a_{\varphi(1),1}\ \cdots\ a_{\varphi(i),i}\ \cdots\ a_{\varphi(j),j}\ \cdots\ a_{\varphi(n),n}\\ & \textit{(par commutativité de } \times\textit{)}\\ =\ & -\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n) = 0$$

× Démontrons enfin : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.
On rappelle que, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, les coordonnées du vecteur e_j dans la base $\mathscr{B}$ sont : $(\delta_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!]}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) &= \det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\ \delta_{\sigma(1),1}\ \cdots\ \delta_{\sigma(n),n}\\ &= \varepsilon(\mathrm{id})\ \delta_{\mathrm{id}(1),1}\ \cdots\ \delta_{\mathrm{id}(n),n}\\ &= 1\times\delta_{1,1}\ \cdots\ \delta_{n,n}\\ &= 1\end{aligned}$$

- Il reste à démontrer que le $\mathbb{K}$-ev $\Lambda_n(E)$ est de dimension 1. Autrement dit, il reste à démontrer que toute forme n-linéaire alternée $f\in\Lambda_n(E)$ est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$.
Soit $f\in\Lambda_n(E)$. Soit $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$.
Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on note toujours $(a_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!]}$ les coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathscr{B}$.
Par n-linéarité de f :

$$\begin{aligned}f(x_1,\dots,x_n) &= f\Big(\sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i,\ \sum_{i=1}^n a_{i,2}e_i,\ \dots,\ \sum_{i=1}^n a_{i,n}e_n\Big)\\ &= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1}\sum_{i_2=1}^n a_{i_2,2}\dots\sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n}\,f(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\end{aligned}$$

Si les indices $i_1,\dots,i_n$ ne sont pas distincts, f étant alternée :

$$f(e_{i_1},\dots,e_{i_n}) = 0$$

Par conséquent, dans la somme, il ne reste que les n-uplets d'indices deux à deux distincts :

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\substack{i_1,\ \dots,\ i_n\\ \text{deux à deux distincts}}} a_{i_1,1}\ a_{i_2,2}\ \cdots\ a_{i_n,n}\ f(e_{i_1},\dots,e_{i_n})$$

On note alors $\sigma : k \mapsto i_k$.
Comme les i_1, ..., i_n sont deux à deux distincts, alors l'application σ est injective.
De plus, σ est définie sur $[\![1, n]\!]$ et à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Elle est donc bijective. C'est donc une permutation de $[\![1, n]\!]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
& f(x_1, \ldots, x_n) \\
= \; & \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \, f(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \\
= \; & \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \, \varepsilon(\sigma) \, f(e_1, \ldots, e_n) \qquad \textit{(car } f \textit{ est alternée)} \\
= \; & f(e_1, \ldots, e_n) \times \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
= \; & f(e_1, \ldots, e_n) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

On note alors : $\lambda = f(e_1, \ldots, e_n)$. On a démontré :

$$f \;=\; \lambda \cdot \det_{\mathscr{B}}$$

Ainsi : $\Lambda_n(E) = \mathrm{Vect}\,(\det_{\mathscr{B}})$.
La famille $\mathcal{F} = (\det_{\mathscr{B}})$ est donc :

× génératrice de $\Lambda_n(E)$, d'après ce qui précède,
× libre, car constituée uniquement d'un vecteur non nul (car : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1 \neq 0$)

C'est donc une base de $\Lambda_n(E)$. On en conclut :

$$\dim\big(\Lambda_n(E)\big) \;=\; \mathrm{Card}(\mathcal{F}) \;=\; 1$$

□

II.2. Changement de bases

Et si on prend une autre base ?
L'expression de $\det_{\mathscr{B}}$ dépend de la base $\mathscr{B}$: elle fait intervenir les coordonnées des vecteurs dans cette base. On peut alors se demander, si $\mathscr{B}'$ est une autre base, quel lien y a-t-il entre $\det_{\mathscr{B}}$ et $\det_{\mathscr{B}'}$? Et que peut-on affirmer à propos de $\det_B(\mathscr{B}')$?

Proposition 7.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Soient B et B' deux bases de E.
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.

$$\boxed{\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \det_{\mathscr{B}'}(e_1, \ldots, e_n) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)}$$

Démonstration.
Découle de la démonstration précédente, puisque $\det_{\mathscr{B}'}$ est une forme n-linéaire alternée. □

Proposition 8.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Soit $\mathscr{B}' = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

a) *La famille $\mathscr{B}'$ est une base de E si et seulement si :* $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$.

b) *Dans ce cas :* $\boxed{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})}}$.

En d'autres termes, une famille à n éléments est une base si et seulement si son déterminant (dans n'importe quelle base) est non nul.

Démonstration.

- Tout d'abord, on remarque : $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = \dim(E)$. Ainsi :

$$\mathscr{B}' \text{ base de } E \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{B}' \text{ libre}$$

On cherche donc à démontrer :

$$\mathscr{B}' \text{ libre} \quad \Leftrightarrow \quad \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$$

- On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $\mathscr{B}'$ est libre.
La famille $\mathscr{B}'$ est donc :

- libre,
- telle que : $\text{Card}(\mathscr{B}') = n = \dim(E)$.

C'est donc une base de E.
On peut donc appliquer la Proposition 8 :

$$\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n) \;=\; \det_{\mathscr{B}'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Or, par définition de $\det_{\mathscr{B}'}$:

$$\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n) \;=\; \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}') \;=\; 1$$

Ainsi :

$$\begin{array}{ccccc} \det_{\mathscr{B}'}(e_1, \dots, e_n) & \times & \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) & = & 1 \\ & \shortparallel & & & \\ \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) & \times & \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') & & \end{array}$$

En particulier : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$ et : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})}$.

($\Leftarrow$) On procède par contraposée.
Supposons que $\mathscr{B}'$ est liée.
Comme l'application $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire alternée, alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \;=\; 0$$

□

III. Déterminant d'un endomorphisme

III.1. Définition

Proposition 9.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Soit f une forme n-linéaire alternée sur E.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

L'application suivante est n-linéaire alternée.

$$\begin{array}{rccc} f_u & : & E^n & \to & \mathbb{K} \\ & & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) \end{array}$$

Démonstration.
Le caractère alterné est immédiat puisque f est alternée, le caractère n-linéaire découle de la linéarité de u et de la n-linéarité de f. □

Proposition 10.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

Il existe un unique scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall f \in \Lambda_n(E), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad f\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) \;=\; \alpha \times f(x_1, \dots, x_n)$$

Ce scalaire est appelé **déterminant de l'endomorphisme** *u et est noté* $\det(u)$.

Démonstration.

- Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\Lambda_n(E)$ est de dimension 1. Il existe donc $\varphi \in \Lambda_n(E) \setminus \{0_{\mathscr{L}(E)}\}$ tel que φ est une base de $\Lambda_n(E)$.
(on a démontré dans le Théorème 1 qu'on pouvait choisir : $\varphi = \det_{\mathscr{B}}$, où $\mathscr{B}$ est une base de E)

- Tout d'abord, d'après la Proposition 9 (dont on reprend les notations) : $\varphi_u \in \Lambda_n(E)$. Il existe donc un unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que : $\varphi_u = \alpha \cdot \varphi$.
  Autrement dit :
  $$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \varphi\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) \ = \ \alpha \times \varphi(x_1, \dots, x_n)$$
- Soit $f \in \Lambda_n(E)$.
  Comme (φ) est une base de $\Lambda_n(E)$, alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \cdot \varphi$.
  Dès lors, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:
  $$\begin{aligned} f\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) &= \lambda \times \varphi\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) \\ &= \alpha \times \lambda \times \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \alpha \times f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$
  On rappelle que le scalaire α est la coordonnée de φ_u dans la base (φ) et est donc unique.

□

Remarque

- En d'autres termes, $\det(u)$ est la « constante de proportionnalité » par laquelle on multiplie $f(x_1, \dots, x_n)$ lorsqu'on applique f à $u(x_1), \dots, u(x_n)$.
- Notons que la définition de $\det(u)$ ne dépend pas de la base choisie.
  On verra dans la section suivante :
  $$\det(u) \ = \ \det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$$
  Mais cela est vrai pour toute base, la définition du déterminant d'un endomorphisme est indépendante du choix de la base.

III.2. Lien entre déterminant d'une famille de vecteurs et déterminant d'un endomorphisme

Proposition 11.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

$$\boxed{\det_{\mathscr{B}}\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) \ = \ \det(u) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)}$$

En particulier :

$$\boxed{\det(u) \ = \ \det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)}$$

En d'autres termes, le déterminant d'un endomorphisme u est le déterminant de l'image d'une base par u.

Démonstration.

1) On applique la Proposition 10 à $f = \det_{\mathscr{B}}$ qui est bien une forme n-linéaire alternée.

2) On rappelle : $\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$

□

Remarque

En particulier, la quantité $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)$ est indépendante de la base choisie : on aurait pu définir le déterminant de u de cette manière (et c'est d'ailleurs comme ça qu'on le définit dans certains livres).

III.3. Manipulations algébriques

III.3.a) Multiplication par un scalaire

Proposition 12.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{\det(\lambda \cdot u) \;=\; \lambda^n \times \det(u)}$$

Démonstration.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
D'après la proposition précédente :

$$\det(\lambda \cdot u) \;=\; \det_{\mathscr{B}}\big(\lambda \cdot u(e_1), \ldots, \lambda \cdot u(e_n)\big)$$

Par n-linéarité de $\det_{\mathscr{B}}$:

$$\begin{aligned}\det(\lambda \cdot u) &= \lambda^n \times \det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big)\\ &= \lambda^n \times \det(u)\end{aligned}$$

□

- Attention, le déterminant d'un endomorphisme n'est pas linéaire, on n'a pas :

$$\det(\lambda \cdot u) \;\cancel{=}\; \lambda \times \det(u)$$

- Pour autant, il est impropre de dire que le déterminant d'un endomorphisme est n-linéaire puisque le déterminant d'un endomorphisme n'est pas défini sur un n-uplet. Le déterminant d'une famille de vecteurs (et, plus tard, d'une matrice) est, par contre, n-linéaire.

III.3.b) Déterminant particulier

Proposition 13.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

$$\boxed{\det(\mathrm{id}_E) = 1}$$

Démonstration.
On note : $n = \dim(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Alors :

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{id}_E) &= \det_{\mathscr{B}}\big(\mathrm{id}(e_1), \ldots, \mathrm{id}(e_n)\big)\\ &= \det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_n)\\ &= \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})\\ &= 1\end{aligned}$$

□

III.3.c) Déterminant d'une composée

Proposition 14.
Soit $(u, v) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$.

1) $\boxed{\det(u \circ v) \;=\; \det(u) \times \det(v)}$

2) *En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$:* $\boxed{\det\left(u^n\right) = \big(\det(u)\big)^n}$.

Démonstration.
1) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

$$\begin{aligned}\det(u \circ v) &= \det_{\mathscr{B}}\big((u \circ v)(e_1), \ldots, (u \circ v)(e_n)\big)\\ &= \det(u) \times \det_{\mathscr{B}}\big(v(e_1), \ldots, v(e_n)\big)\\ &= \det(u) \times \det(v)\end{aligned}$$

En effet : $\det(v) = \det_{\mathscr{B}}\big(v(e_1), \ldots, v(e_n)\big)$.

2) Par récurrence.

□

III.4. Caractérisation des automorphismes

Proposition 15 (Caractérisation des automorphismes)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) *L'endomorphisme u est bijectif si et seulement si* $\det(u) \neq 0$ *:*

$$u \text{ est un automorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad \det(u) \neq 0$$

2) *Dans ce cas :* $\boxed{\det\left(u^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(u)}}$.

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que u est bijectif.

$$\begin{aligned} \det(u) \times \det\left(u^{-1}\right) &= \det\left(u \circ u^{-1}\right) \\ &= \det(\mathrm{id}_E) \\ &= 1 \end{aligned}$$

En particulier : $\det(u) \neq 0$. De plus : $\det\left(u^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

($\Leftarrow$) On procède par contraposée.
Supposons que u n'est pas bijectif. Alors, comme :
× l'application u est un endomorphisme,
× le $\mathbb{K}$-ev E est de dimension finie,
on en déduit que u n'est pas injectif.
L'image d'une base par u est donc une famille liée. En particulier, $\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big)$ est une famille liée. Ainsi :

$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big) = 0$$

D'où : $\det(u) = \det_{\mathscr{B}}\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big) = 0$.

□

Remarque
Puisqu'on manie des endomorphismes en dimension finie, on manie en particulier des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. Par conséquent, si $u \in \mathscr{L}(E)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

$$u \text{ bijectif} \Leftrightarrow u \text{ injectif} \Leftrightarrow u \text{ surjectif} \Leftrightarrow \det(u) \neq 0$$

IV. Déterminant d'une matrice carrée de taille n

IV.1. Définition

Définition

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle **déterminant de** A et on note $\det(A)$ le scalaire :

$$\boxed{\det(A) \;=\; \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}}$$

On le note :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

⚠ On ne peut définir le déterminant que pour une matrice carrée.

Remarque

Cette définition, bien qu'utile dans les démonstrations, ne sera `JAMAIS` utilisée pour des calculs pratiques de déterminants.

IV.2. Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs

Proposition 16.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note C_1, …, C_n les colonnes de la matrices A.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\det(A) \;=\; \det_{\mathscr{B}}(C_1, \ldots, C_n)}$$

Démonstration.
Immédiat car, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, les coordonnées du vecteurs C_j dans la base $\mathscr{B}$ sont $a_{1,j}$, …, $a_{n,j}$. □

IV.3. Lien avec le déterminant d'un endomorphisme

Proposition 17.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. On note : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\boxed{\det(f) \;=\; \det(A)}$$

Autrement dit, le déterminant de A est le déterminant de tout endomorphisme représenté par A.

Démonstration.
On note : $n = \dim(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
On note de plus C_1, …, C_n les colonnes de A, et $\tilde{\mathscr{B}}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On calcule :

$$\begin{aligned} \det(f) &= \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big) && \textit{(par définition du déterminant d'un endomorphisme)} \\ &= \det_{\tilde{\mathscr{B}}}(C_1, \ldots, C_n) && \textit{(par construction de } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\textit{)} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

□

Remarque

Ces trois définitions (déterminant d'une famille de vecteurs, déterminant d'un endomorphisme et déterminant d'une matrice) sont équivalentes : on aurait pu définir le déterminant avec n'importe laquelle d'entre elles.

IV.4. Manipulations algébriques

IV.4.a) Déterminant particulier

Proposition 18.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\det(I_n) \;=\; 1}$$

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{aligned}\det(I_n) &= \det(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}) && \textit{(d'après la Proposition 17)}\\ &= 1 && \textit{(d'après la Proposition 13)}\end{aligned}$$

□

IV.4.b) Multiplication par un scalaire

Proposition 19.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{\det(\lambda \cdot A) \;=\; \lambda^n \times \det(A)}$$

Démonstration.
On note $f : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A.

$$\begin{aligned}\det(\lambda \cdot A) &= \det(\lambda \cdot f) && \textit{(d'après la Proposition 17)}\\ &= \lambda^n \times \det(f) && \textit{(d'après la Proposition 12)}\\ &= \lambda^n \times \det(A) && \textit{(d'après la Proposition 17)}\end{aligned}$$

□

IV.4.c) Déterminant d'un produit

Proposition 20.

Soit $(A, B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$.

1) $\boxed{\det(A \times B) \;=\; \det(A) \times \det(B)}$

2) *En particulier, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $\boxed{\det\left(A^n\right) = \big(\det(A)\big)^n}$.

Démonstration.

1) On note $u : X \mapsto AX$ et $v : X \mapsto BX$ les endomorphismes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associés, respectivement, à A et à B.

$$\begin{aligned}\det(A \times B) &= \det(u \circ v) && \textit{(d'après la Proposition 17)}\\ &= \det(u) \times \det(v) && \textit{(d'après la Proposition 14)}\\ &= \det(A) \times \det(B) && \textit{(d'après la Proposition 17)}\end{aligned}$$

2) Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \det(A^n) = \big(\det(A)\big)^n$.

- **Initialisation** :

$$\det(A^0) \;=\; \det(I_n) \;=\; 1$$

D'où $\mathscr{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* : $\det(A^{n+1}) = \big(\det(A)\big)^{n+1}$)

$$\begin{aligned}\det(A^{n+1}) &= \det(A \times A^n)\\ &= \det(A) \times \det(A^n) && \textit{(d'après 1))}\\ &= \det(A) \times \big(\det(A)\big)^n && \textit{(par hypothèse de récurrence)}\\ &= \big(\det(A)\big)^{n+1}\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\det(A^n) = \big(\det(A)\big)^n$.

□

IV.4.d) Déterminant de la transposée

Proposition 21.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\det\left(A^T\right) \;=\; \det(A)}$$

Démonstration.

- Par définition de $\det(A)$:

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

- Soit $\sigma \in S_n$.
  Rappelons que σ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Par conséquent, les réels $\sigma(1)$, …, $\sigma(n)$ sont exactement les nombres 1, …, n dans un certain ordre. On peut donc réorganiser les termes du produit $a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}$, c'est-à-dire : mettre d'abord le terme $a_{\sigma(i),i}$ tel que $\sigma(i) = 1$, et alors $i = \sigma^{-1}(1)$, puis le terme $a_{\sigma(i),i}$ tel que $\sigma(i) = 2$, et alors $i = \sigma^{-1}(2)$, et ainsi de suite.
  On obtient :

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\; a_{1,\sigma^{-1}(1)} \;\cdots\; a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

- Or, comme $(-1)^{-1} = -1$: $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) \;=\; \varepsilon(\sigma)^{-1} \;=\; \varepsilon(\sigma)$.
  On en déduit :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon\left(\sigma^{-1}\right)\; a_{1,\sigma^{-1}(1)} \;\cdots\; a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi)\; a_{1,\varphi(1)} \;\cdots\; a_{n,\varphi(n)} && \textit{(avec le changement de variable } \boxed{\varphi = \sigma^{-1}}\textit{)} \\
&= \sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi)\, \left(A^T\right)_{\varphi(1),1} \;\cdots\; \left(A^T\right)_{\varphi(n),n} \\
&= \det\left(A^T\right)
\end{aligned}$$

□

IV.5. Caractérisation de l'inversibilité

Proposition 22 (Caractérisation des matrices inversibles).
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{A \textit{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0}$$

Dans ce cas : $\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}}$.

Démonstration.
On note $f : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à la matrice A.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
A \text{ inversible} &\Leftrightarrow f \text{ bijectif} \\
&\Leftrightarrow \det(f) \neq 0 && \textit{(d'après la Proposition 15)} \\
&\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 && \textit{(d'après la Proposition 17)}
\end{aligned}$$

- Supposons que la matrice A est inversible. Alors :

$$\begin{aligned}
\det(A^{-1}) &= \det(f^{-1}) && \textit{(d'après la Proposition 17)} \\
&= \frac{1}{\det(f)} && \textit{(d'après la Proposition 15)} \\
&= \frac{1}{\det(A)}
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On note $\mathscr{B}$ une de ses bases.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\boxed{\begin{aligned} f \text{ est bijectif} &\Leftrightarrow f \text{ est injectif} \\ &\Leftrightarrow f \text{ est surjectif} \\ &\Leftrightarrow \det(f) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow A \text{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n \\ &\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Les colonnes de } A \text{ forment une famille libre} \\ &\Leftrightarrow \text{Les lignes de } A \text{ forment une famille libre} \\ &\Leftrightarrow \text{Les lignes de } A \text{ forment une base de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ &\Leftrightarrow \text{Les colonnes de } A \text{ forment une base de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \end{aligned}}$$

IV.6. Invariance du déterminant par similitude

Proposition 23 (Invariance du déterminant par similitude)**.**

Soit $(A, B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$.

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ semblables} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = \det(B)}$$

Autrement dit, deux matrices semblables ont même déterminant.

Démonstration.
Supposons que les matrices A et B sont semblables.

- Démonstration 1 :
  Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\left(P^{-1}\right) \times \det(B) \times \det(P) \\ &= \frac{1}{\det(P)} \times \det(B) \times \det(P) \\ &= \det(B) \end{aligned}$$

- Démonstration 2 :
  Alors les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans 2 bases différentes.
  Ainsi, d'après la Proposition 17 :

$$\det(A) = \det(f) = det(B)$$

□

La réciproque est fausse ! Par exemple, on note :

$$A = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{K})} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, en notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$:

× d'une part : $\det(A) = \det(0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{K})}) = 0$,

× d'autre part : $\det(B) = \det_{\mathscr{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$.
En effet, l'application $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme 2-linéaire alternée et la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est liée.

Or A et B ne sont pas semblables. Il est en effet aisé de démontrer que seule la matrice nulle est semblable à elle-même :

$$\forall P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}), \quad PAP^{-1} = P \times 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{K})} \times P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{K})}$$

V. Calcul pratique de déterminant d'une matrice carrée

V.1. Cas des matrices triangulaires

Proposition 24.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *une matrice triangulaire supérieure.*

$$\boxed{\det(A) = a_{1,1} \times \cdots \times a_{n,n}}$$

Démonstration.

- Par définition :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

  Soit $\sigma \in S_n$. Supposons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\sigma(i) \leqslant i$.
  On démontre par récurrence finie (à faire) : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(i) = i$.

- Il en découle que σ est l'identité. Par contraposée, si $\sigma \neq \mathrm{id}$, alors il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i_0) > i_0$ donc $a_{\sigma(i_0),i_0} = 0$ donc le produit correspondant à σ dans la définition de $\det(A)$ est nul. En d'autres termes, dans cette somme, il ne reste que le terme correspondant à id qui vaut $a_{1,1} \cdots a_{n,n}$ puisque la signature de id vaut 1.

□

Corollaire 1.

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *une matrice triangulaire inférieure.*

$$\boxed{\det(A) = a_{1,1} \times \cdots \times a_{n,n}}$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *une matrice diagonale.*

$$\boxed{\det(A) \;=\; a_{1,1} \times \cdots \times a_{n,n}}$$

Démonstration.
Le premier résultat vient du fait qu'une matrice et sa transposée ont même déterminant, et le deuxième résultat vient du fait qu'une matrice diagonale est triangulaire. □

⚠ Évidemment, ce résultat est faux pour une matrice quelconque (ni triangulaire, ni diagonale).

Remarque

- On retrouve le fait qu'une matrice triangulaire ou diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.⚠⚠.
- En conclusion, le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.

Exemple
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\det(\lambda \cdot I_n) \;=\; \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \;=\; \lambda^n$$

Même si on le savait déjà puisque $\det(I_n) = 1$ et puisque le déterminant est n-linéaire donc $\det(\lambda \cdot I_n) = \lambda^n \times \det(I_n) = \lambda^n$.

Remarque

- En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \;=\; \lambda$$

  Ceci qui prouve que l'application $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupes surjectif. En prenant un endomorphisme représenté par cette matrice, il en découle que le morphisme $\det : \mathrm{GL}(E) \to \mathbb{K}^*$ est aussi surjectif.
- Ce morphisme n'est pas injectif dès que $n \geqslant 2$. En effet :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \;=\; 1$$

  Ainsi $\mathrm{Ker}(\det) \neq \{I_n\}$ donc ce morphisme n'est pas injectif. De même, $\det : \mathrm{GL}(E) \to \mathbb{K}^*$ n'est pas injectif dès que $n \geqslant 2$.
- Le noyau du déterminant (restreint à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) est noté $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et est appelé groupe spécial linéaire d'ordre n. C'est l'ensemble des matrices ayant un déterminant égal à 1 (et c'est donc un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$).
- Par analogie, on note $\mathrm{SL}(E)$ le noyau de la restriction du déterminant à $\mathrm{GL}(E)$: c'est l'ensemble des endomorphismes ayant un déterminant égal à 1. C'est toujours un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Plus précisément, en revenant aux aires, volumes, $\mathrm{SL}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes qui laissent le volume invariant.

V.2. Déterminant et pivot de Gauss

Proposition 25 (Effet des opérations élémentaires sur le déterminant).

1) Quand on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1.

2) Multiplier une ligne ou une colonne par un scalaire λ multiplie le déterminant par ce scalaire λ.

3) Effectuer une opération du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ (avec $i \neq j$) ne modifie pas le déterminant.

4) Plus généralement, on peut ajouter une combinaison linéaire des autres lignes à l'une des lignes, ou une combinaison linéaire des autres colonnes à une autre colonne, sans changer la valeur du déterminant.

Remarque

- Attardons-nous sur la deuxième opération élémentaire, à savoir $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ (avec $\lambda \neq 0$). Le déterminant est alors multiplié par λ, c'est-à-dire que si prend $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et si on note $\tilde{A}$ la matrice obtenue en effectuant l'une de ces deux opérations élémentaires, alors $\det(\tilde{A}) = \lambda \det(A)$, c'est-à-dire que le déterminant de la nouvelle matrice est égal au déterminant de l'ancienne multiplié par λ.
- Cependant, dans ce paragraphe, c'est $\det(A)$ qui nous intéresse : on a alors $\det(A) = \dfrac{1}{\lambda}\det(\tilde{A})$, c'est-à-dire que le déterminant de la matrice originelle est le déterminant de la matrice après modification, **divisé** par λ.
- On en déduit un moyen simple de calculer $\det(A)$. On fait comme pour inverser une matrice : on part de A pour arriver à une matrice triangulaire à l'aide d'opérations élémentaires (on peut mélanger les lignes et les colonnes ici) :

  a) Quand on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1.

  b) Quand on multiplie une ligne ou une colonne par un scalaire λ, on **divise** le nouveau déterminant par ce scalaire.

  c) Effectuer une opération du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ (avec $i \neq j$) ne modifie pas le déterminant.

Exemple

Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & 2a & 2a \\ 2b & a+b & 2a \\ 2b & 2b & a+b \end{vmatrix}$$

V.3. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

V.3.a) Notion de mineur et de cofacteur

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

1) On appelle **mineur** d'indice (i, j) de la matrice A, le déterminant $\Delta_{i,j}(A)$ de la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

2) On appelle **cofacteur** d'indice (i, j) de A le scalaire $(-1)^{i+j}\,\Delta_{i,j}(A)$.

Remarque
Le mineur $\Delta_{i,j}(A)$ est donc le déterminant ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

V.3.b) Développement par rapport à une colonne

Lemme 1.
Soit $B \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\det(A) \;=\; \det(B)}$$

Proposition 26 (Développement par rapport à une colonne)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\boxed{\det(A) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\, \Delta_{i,j}(A)}$$

V.3.c) Développement par rapport à une ligne

Proposition 27 (Développement par rapport à une ligne).
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\boxed{\det(A) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\, \Delta_{i,j}(A)}$$

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (+1) \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} + (-1) \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} + (+1) \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \quad -2 \times \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \quad +3 \times \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

On rappelle que l'on déduit de ce calcul que la matrice considérée n'est pas inversible.

Remarque

- Il est simple de développer par rapport à une ligne / colonne contenant beaucoup de 0.
  On commencera par utiliser la méthode du pivot pour « mettre » des 0 dans la matrice. Puis on développera par rapport aux lignes et colonnes.
- On privilégiera, tant que possible, la méthode du pivot, qui fournit davantage des résultats sous forme factorisée. Il est alors plus simple de conclure quant à la nullité du déterminant.

Exemple

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \qquad \textit{(développement par rapport à la } 3^{\text{ème}} \textit{ colonne)}$$

$$= (-1) \left((-1) \times \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \right) + \left(-(-1) \times \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \right) = 4$$

(développement par rapport à la $1^{\text{ère}}$ colonne)

Exercice 2

1. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivante est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & (0) \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & 1 \\ (0) & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Calculer :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$$

On combinera la méthode du pivot de Gauss avec celle du développement par rapport à une ligne / à une colonne.

V.4. Cas des matrices carrées d'ordre 2

Proposition 28.

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Alors il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ tel que : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\det(A) \;=\; ad - bc}$$

Démonstration.
Pour la démonstration, on note plutôt : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$.
L'ensemble S_2 est réduit à deux éléments : $S_2 = \{\mathrm{id}; (1\,2)\}$.
Par conséquent, si on note $\tau = (1\,2)$, comme la signature d'une transposition est égale à -1 :

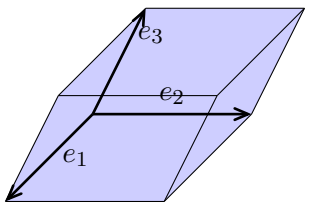
$$\begin{aligned} \det(A) &= \varepsilon(\mathrm{id}) a_{\mathrm{id}(1),1} a_{\mathrm{id}(2),2} + \varepsilon(\tau) a_{\tau(1),1} a_{\tau(2),2} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \end{aligned}$$

□

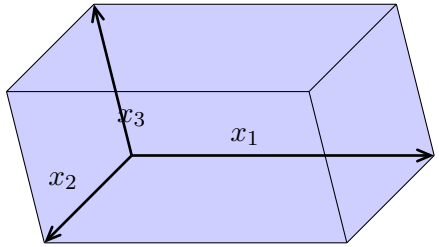
VI. Lien entre déterminant, aire et volume

On suppose dans ce paragraphe que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Le déterminant (d'une matrice ou d'une famille de vecteurs) possède une interprétation géométrique : on a vu que l'aire d'un parallélogramme ou le volume d'un parallélépipède (pas forcément rectangle, pavé pour les intimes) formé par, respectivement, deux ou trois vecteurs, était une forme n-linéaire alternée (avec $n = 2$ et $n = 3$ respectivement). Or, on a prouvé que toutes les formes n-linéaires alternées sont proportionnelles au déterminant. Par conséquent, si on se donne deux vecteurs x_1 et x_2 (dans le plan), le déterminant de ces deux vecteurs (dans une base quelconque) est proportionnel à leur déterminant, et c'est la même chose en dimension 3 (avec le volume du pavé formé par trois vecteurs).

Cherchons la constante de proportionnalité. Si on fixe une base $\mathscr{B}$ de référence, alors le déterminant de cette base vaut 1 : on peut voir ça comme une unité de volume (ou d'aire en dimension 2). Plus précisément, si on dit que le volume du pavé formé par ces trois vecteurs (ou deux en dimension 2) est l'unité de volume, alors le déterminant et le volume coïncident pour ces vecteurs donc la constante de proportionnalité vaut 1, c'est-à-dire que le volume est égal au déterminant ! Encore une fois : si on fixe une base $\mathscr{B}$, alors le déterminant de vecteurs dans cette base est égal au volume formé par ces vecteurs (en considérant le volume du pavé (précisons que le pavé n'a aucune raison d'être droit : sur les dessins ci-dessous, ce n'est d'ailleurs pas le cas) formé par les vecteurs de la base comme l'unité de volume c'est-à-dire valant 1). C'est pareil en dimension 2, et cela nous permet de généraliser la notion de volume en dimension supérieure : en dimension n, on définit le volume (on parle parfois d'hypervolume) du « pavé » formé par n vecteurs comme le déterminant, encore une fois en partant d'une base qui donne un volume de référence, une unité de volume.



Volume de référence $= \det_B(e_1, e_2, e_3) = 1$



Volume du pavé $= \det_B(x_1, x_2, x_3)$

En conclusion, dans le cadre de la dimension 2 ou 3, on a prouvé le résultat suivant :

Proposition 29.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

- *Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On appelle* **volume** *du pavé formé par $(x_1, \ldots, x_n)$ relativement à la base $\mathscr{B}$ la quantité $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$.*
- *Soient $x_1 = (a_1, b_1)$ et $x_2 = (a_2, b_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. L'***aire** *du pavé formé par x_1 et x_2 est égale à :*

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

- *Soient $x_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $x_2 = (a_2, b_2, c_2)$ et $x_3 = (a_3, b_3, c_3)$ trois éléments de $\mathbb{R}^3$. Le* **volume** *du pavé formé par x_1, x_2, x_3 est égal à :*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

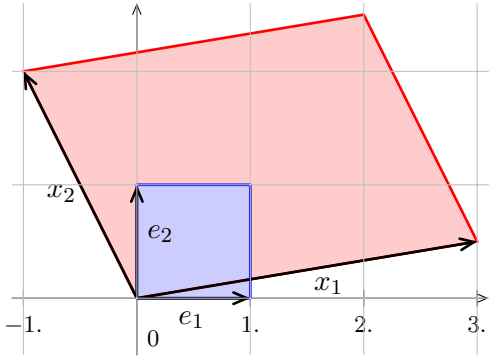
Remarque

- Si rien n'est précisé, on prend comme base la base canonique et donc comme aire de référence le carré formé par les vecteurs de la base canonique (idem pour le volume).
- Pour une aire ou un volume, on aurait pu montrer ce résultat à la main en se souvenant de l'aire d'un parallélogramme (Base $\times$ hauteur) ou le volume d'un pavé (Aire de la base $\times$ hauteur) mais, d'une part, il aurait fallu un peu de travail géométrique, et d'autre part, cela ne nous aurait pas permis de généraliser la notion de volume en dimension supérieure.
- Enfin, quand on dit Base $\times$ hauteur, il ne faut pas oublier que l'aire est algébrique i.e. peut être négative si les vecteurs sont dans le sens indirect !

Exemple

L'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $x_1 = \left(3, \frac{1}{2}\right)$ et $x_2 = (-1, 2)$ est :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$



Parlons à présent de l'interprétation géométrique du déterminant d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$. Puisque, pour tous vecteurs x_1, ..., x_n (et toute base $\mathscr{B}$) :

$$\det_{\mathscr{B}}\big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\big) \;=\; \det(f) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

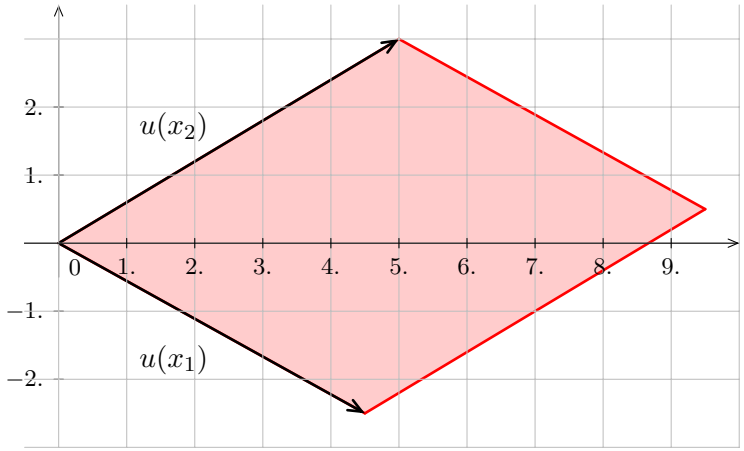
alors on en déduit le résultat suivant.

Proposition 30.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soient B une base de E et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.

Le volume du pavé formé par $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ est égal au volume du pavé formé par x_1, ..., x_n, multiplié par $\det(u)$. En d'autres termes, quand on applique un endomorphisme u, on multiplie les volumes par $\det(u)$.



Exemple

On note $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x+3y, y-x) \end{array}$. Alors $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ et sa matrice canoniquement associée est :

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que $\det(f) = \det(A) = 4$: quand on applique f, on multiplie les aires par 4. Si on reprend l'exemple ci-dessus, alors $f(x_1) = \left(\dfrac{9}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$ et $f(x_2) = (5,3)$ si bien que l'aire du parallélogramme formé par $f(x_1)$ et $f(x_2)$ vaut :

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{2} & 5 \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{vmatrix} \;=\; 26 \;=\; 4\,\det(x_1, x_2)$$

VII. Applications classiques du déterminant

VII.1. Déterminant de Vandermonde

Proposition 31 (Déterminant de Vandermonde)**.**

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

1. *On appelle* **déterminant de Vandermonde** *de* $(x_1, \ldots, x_n)$ *le déterminant suivant :*

$$\boxed{V(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}}$$

2. $\boxed{V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)}$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

- **Initialisation** :
  Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$.

$$V(x_1, x_2) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \;=\; x_2 - x_1$$

  D'où $\mathscr{P}(2)$.

- **Hérédité** : soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie
  (*i.e.* $\forall (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}, V(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)$).
  Soit $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Notons :

$$P(X) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & X \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 & X^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} & X^{n-1} \\ {x_1}^n & {x_2}^n & \cdots & {x_n}^n & X^n \end{vmatrix} \in \mathbb{K}[X]$$

  P est bien un élément de $\mathbb{K}[X]$ car déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$.

- Supposons dans un premier temps x_1, …, x_n deux à deux distincts.
  En développant par rapport à la dernière colonne, on trouve que P est un polynôme de degré n de coefficient dominant $V(x_1, \ldots, x_n)$ qui, par hypothèse de récurrence, vaut

$$\overset{(}{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}} x_j - x_i)$$

  et donc est non nul.
  De plus, x_1, …, x_n sont des racines de P : en effet, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i)$ est le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales dont est nul. Finalement, P est de degré n et admet n racines distinctes donc elles sont simples, et puisque son coefficient dominant est $V(x_1, \ldots, x_n)$, On en déduit :

$$P(X) \;=\; V(x_1, \ldots, x_n) \times \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} V(x_1,\dots,x_{n+1}) &= P(x_{n+1}) \\ &= V(x_1,\dots,x_n)\times\prod_{i=1}^{n}(x_{n+1}-x_i) \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\times\prod_{i=1}^{n}(x_{n+1}-x_i) \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j-x_i) \end{aligned}$$

- Si les x_i ne sont pas deux à deux distincts, le déterminant est nul et le produit est nul donc on a encore égalité.

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \mathscr{P}(n)$. □

Remarque

- On remarque la matrice de Vandermonde (la matrice naturellement définie par le déterminant de Vandermonde) est est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

$$VDM = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

- Le déterminant d'une matrice étant égal à sa transposée, on a également le résultat suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

Ce dernier déterminant est aussi appelé déterminant de Vandermonde et est noté aussi $V(x_1,\dots,x_n)$ (ce qui n'a rien d'étonnant puisqu'il est égal au précédent).

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = (3-2)\times(5-2)\times(5-3) = 6$$

Exemple

Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{K}^4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Remarque
La méthode consistant à ajouter une ligne pour « transformer un déterminant en polynôme », polynôme qu'on cherche ensuite à factoriser, est classique et doit être retenue. On la retrouve par exemple lorsqu'on cherche le déterminant suivant, qu'on peut appeler un déterminant de Vandermonde lacunaire (*cf* TD) :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{n-2} & {x_1}^{n} \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{n-2} & {x_2}^{n} \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{n-2} & {x_3}^{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{n-2} & {x_n}^{n} \end{vmatrix}$$

L'astuce est d'ajouter la colonne manquante... mais il faut aussi ajouter une ligne sinon la matrice n'est pas carrée ! On s'en tire avec des X, comme ci-dessus : on introduit donc le polynôme :

$$P(X) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & X & \cdots & X^{n-2} & X^{n-1} & X^{n} \\ 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{n-2} & {x_1}^{n-1} & {x_1}^{n} \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{n-2} & {x_2}^{n-1} & {x_2}^{n} \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{n-2} & {x_3}^{n-1} & {x_3}^{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{n-2} & {x_n}^{n-1} & {x_n}^{n} \end{vmatrix}$$

On cherche ensuite à factoriser P puis à relier le déterminant recherché à P : cf. TD.

VII.2. Polynômes caractéristiques

Définition *(Polynôme caractéristique d'un endomorphisme / d'une matrice)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On appelle **polynôme caractéristique** de f, et on note χ_f, le polynôme défini par :

$$\chi_f(X) \;=\; \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big) \;=\; (-1)^n \det\big(f - X\,\mathrm{id}_E\big)$$

- On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de f sa multiplicité en tant que racine de χ_f.

2) Cas des matrices carrées

- On appelle **polynôme caractéristique** de A, et on note χ_A, le polynôme défini par :

$$\chi_A(X) \;=\; \det\big(X\,I_n - A\big) \;=\; (-1)^n \det\big(A - X\,I_n\big)$$

- On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de A sa multiplicité en tant que racine de χ_A.

Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$\chi_f(X) \;=\; \chi_A(X)$$

En particulier, le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Exercice 3

Déterminer le polynôme caractéristique des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$