CH XIII : Calcul différentiel et analyse asymptotique

I. Dérivabilité en un point

Dans la suite, on notera $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et on notera x_0 un point de I.

I.1. Définitions / taux d'accroissement

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

On appelle **taux d'accroissement** de f en x_0 la fonction :

$$\tau_{x_0}(f) \quad : \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \right.$$

Interprétation physique

Un taux d'accroissement peut être pensé comme une **vitesse moyenne** : la quantité $f(x) - f(x_0)$ représente un déplacement effectué sur un laps de temps $x - x_0$.

- La vitesse moyenne de déplacement d'une voiture entre deux moments t_1 et t_2, est définie par un taux d'accroissement :

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{km(t_2) - km(t_1)}{t_2 - t_1}$$

  où $km(t)$ désigne le nombre de kilomètres effectués à la date t.
  Sauf à considérer que l'on peut effectuer des kilomètres négatifs (en marche arrière par exemple), cette vitesse moyenne est toujours positive.

- On peut aussi citer le taux d'accroissement d'une population :

$$\text{Accroissement démographique} = \frac{pop(t_2) - pop(t_1)}{t_2 - t_1}$$

  où $pop(t)$ désigne la taille de la population à la date t.
  Notez que l'on peut avoir un taux d'accroissement négatif : cela signifie que la population a diminué.

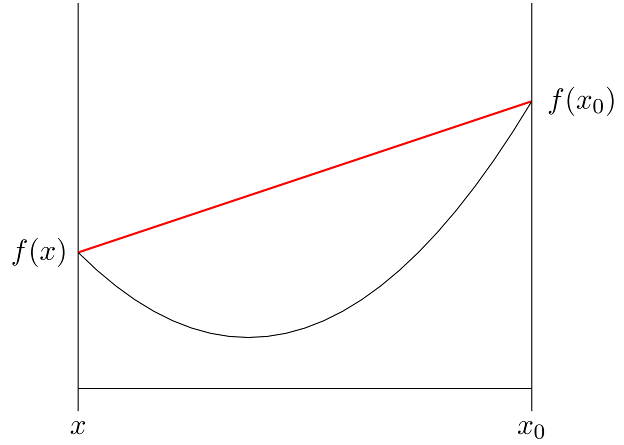
- On considère le déplacement d'un alpiniste en repérant son altitude. Sa vitesse moyenne de déplacement vertical est alors définie par :

$$\text{Vitesse moyenne verticale} = \frac{alt(t_2) - alt(t_1)}{t_2 - t_1}$$

  où $alt(t)$ désigne l'altitude de l'alpiniste à la date t.
  Lorsque cette vitesse moyenne est négative, cela signifie qu'entre les temps t_1 et t_2, l'alpiniste a globalement descendu.
  Au contraire, si elle est positive c'est qu'il a globalement monté.

Interprétation graphique

Notons $M(x, f(x))$ et $M_0(x_0, f(x_0))$ points de la courbe représentative de f. Alors $\tau_{x_0}(f)(x)$ est la pente de la corde M_0M.



Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

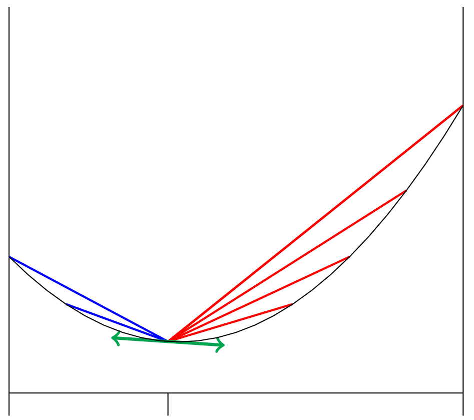
- On dit que f **est dérivable en** x_0 lorsque la fonction $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie en x_0.
- Lorsque cette limite existe, elle est appelée **nombre dérivé de** f **en** x_0 et est noté $f'(x_0)$. Autrement dit :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Interprétation physique

- Le taux d'accroissement s'interprétant comme une vitesse moyenne, sa limite en un point s'interprète comme une vitesse instantanée.
- Par exemple, si une voiture a effectué 200 km en 2H, c'est qu'elle a roulé en moyenne à 100 km/H. Mais elle a pu effectuer des pointes à 130 km/H.

Interprétation graphique



Remarque

- Si f est dérivable en x_0, en effectuant le changement de variable $h = x - x_0$, on obtient :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

(c'est une définition équivalente)

- Dire qu'une fonction f est dérivable en x_0 c'est dire que la fonction taux d'accroissement $\tau_{x_0}(f)$ est continue en x_0 (on peut alors prolonger cette fonction par continuité en posant $\tau_{x_0}(f)(x_0) = f'(x_0)$).

Exemple

- Si f est constante sur I, alors f est dérivable en tout point x_0 de I et $f'(x_0) = 0$. En effet, si $x_0 \in I$ et $x \neq x_0$, on a :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

- La fonction $x \mapsto x$ est dérivable pour tout x_0 de $\mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 1$.
En effet, si $x_0 \in I$ et $x \neq x_0$, on a :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1$$

- La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable pour tout x_0 de $\mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 2x_0$.
En effet, si $x_0 \in I$ et $x \neq x_0$, on a :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(\cancel{x - x_0})(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 2x_0$$

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable pour tout x_0 de $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
En effet, si $x_0 \in I$ et $x \neq x_0$, on a :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\cancel{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}}{(\cancel{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

(mais elle n'est pas dérivable en 0)

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

- On dit que f **est dérivable à gauche en** x_0 lorsque $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie à gauche en x_0. Cette limite est alors notée $f'_g(x_0)$.

$$\boxed{f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

- On dit que f **est dérivable à droite en** x_0 lorsque $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie à droite en x_0. Cette limite est alors notée $f'_d(x_0)$.

$$\boxed{f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Théorème 1.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathring{I}$.
(x_0 n'est pas une extrémité de I : c'est un point intérieur à I)

f est dérivable en x_0	$\Leftrightarrow$	*f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$*

Démonstration.
La démonstration est une conséquence directe de l'énoncé analogue sur la continuité (cf CH10).

f est dérivable en x_0

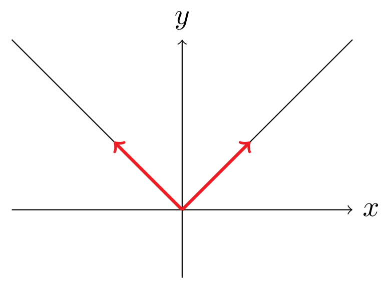
$\Leftrightarrow$ $\tau_{x_0}(f)$ est continue en x_0

$\Leftrightarrow$ $\tau_{x_0}(f)$ est continue à gauche et à droite en x_0, et $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \tau_{x_0}(f)(x) = \lim_{x \to x_0^+} \tau_{x_0}(f)(x)$

$\Leftrightarrow$ f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ □

Exemple

- Cet énoncé est adapté aux fonctions qui sont définies par cas.
- La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 car $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.



- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas dérivable en les points $x_0 \in \mathbb{Z}$.
  Elle n'est déjà pas continue en ces points ! (cf théorème ci-dessous)
- La fonction $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est dérivable ni à droite, ni à gauche en 0.

I.2. Propriétés des fonctions dérivables en un point

Théorème 2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

f est dérivable en x_0	$\Rightarrow$	*f est continue en x_0*

Démonstration.
Supposons que f est dérivable en $x_0 \in I$ et soit $x \neq x_0$.

Par définition, on a : $\tau_{x_0}(f)(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Ainsi : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, \tau_{x_0}(f)(x)$.

On en déduit que f est continue en x_0 car somme de :

× $x \mapsto f(x_0)$ continue en x_0 car constante.

× $x \mapsto (x - x_0)\, \tau_{x_0}(f)(x)$ continue en x_0 car produit de :

- ***(i)*** $x \mapsto x - x_0$ continue en x_0 car polynomiale,
- ***(ii)*** $x \mapsto \tau_{x_0}(f)(x)$ continue en x_0 car f est dérivable en x_0. □

Remarque
La réciproque est fausse. Contre-exemples à cette réciproque :

- La fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais pas dérivable en 0.
- Les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $(n > 1)$ continues en 0 mais pas dérivables en 0.

Théorème 3.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.
(x_0 n'est pas une extrémité de I : c'est un point intérieur à I)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ est dérivable en } x_0 \\ f \text{ admet un extremum local en } x_0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0}$$

Démonstration.
Supposons que f admet un maximum local en x_0.
Par définition, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

- Pour tout $x \in \,]x_0, x_0 + \alpha]$, on a : $x - x_0 > 0$.

  On en déduit que : $\tau_{x_0}(f)(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$.

  Comme f est dérivable en x_0, $\tau_{x_0}(f)(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to x_0$ qui est égale ici à $f'_d(x_0)$ *(on a considéré seulement les $x > x_0$)*.
  Par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient donc : $f'_d(x_0) \leqslant 0$.
- On démontre de même que : $f'_g(x_0) \geqslant 0$ ($x < x_0$ et toujours $f(x) \leqslant f(x_0)$).

Enfin, comme f est dérivable en x_0, on obtient :

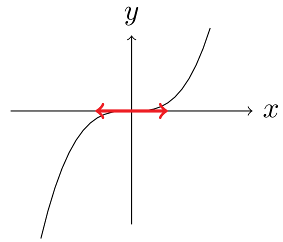
$$0 \;\leqslant\; f'_g(x_0) \;=\; f'(x_0) \;=\; f'_d(x_0) \;\leqslant\; 0$$

On en déduit que $f'(x_0) = 0$. □

Interprétation physique
Reprenons l'exemple de l'alpiniste. Son altitude maximale est atteinte au sommet de la montagne qu'il gravit. Une fois en haut, sa vitesse instantanée est nulle : il ne monte ni ne descend.

Remarque

- L'hypothèse x_0 point intérieur est importante.
  Considérons par exemple la fonction $x \mapsto x$ sur $[0, 1]$. Cette fonction admet un minimum en 0 $(= 0)$ mais $f'(0) = 1$.
- La réciproque est fausse.
  Le contre exemple classique est la fonction $x \mapsto x^3$ qui est de dérivée nulle en 0 mais qui n'atteint pas de maximum (resp. minimum) en ce point.



I.3. Développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point

I.3.a) $\mathrm{DL}_1(x_0)$ et approximation affine de f en x_0

Définition $\mathrm{DL}_1(x_0)$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0.

- On dit que f possède **un développement limité d'ordre 1 en x_0** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

  ou encore :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)}$$

Remarque

- Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ alors on a : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - (a + b\,(x - x_0)) = 0$.
  Ainsi, les courbes représentatives de f et de la droite d'équation $y = a + b\,(x - x_0)$ ont tendance à se confondre à proximité de x_0.
- C'est pourquoi on dit que la droite d'équation $y = a + b\,(x - x_0)$ est une **approximation affine** de f en x_0.
  $\hookrightarrow$ c'est la droite qui représente le mieux la fonction f au voisinage de x_0.

Théorème 4.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ admet un développement limité d'ordre 1 en } x_0}$$

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\left\{ \begin{array}{l} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \end{array} \right.$

Ainsi, si f est dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tq au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)}$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons f dérivable en x_0.

Notons $\varepsilon(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$

(c'est le ε donné par la formule finale)

Comme f est dérivable en x_0, alors $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. De plus, pour tout $x \neq x_0$:

$$\begin{array}{rl} & \varepsilon(x) = \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) \\ \text{donc} & \varepsilon(x) + f'(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{et} & f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \end{array}$$

Cette formule est aussi valable pour $x = x_0$. Au final, on a bien :
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0) + (x - x_0)\ \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

($\Leftarrow$) Si f possède un développement limité d'ordre 1 alors :

× $a = f(x_0)$ (le développement est vérifié en x_0 !)

× pour tout x dans un voisinage épointé de x_0 : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b + \varepsilon(x)$

On en conclut que $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie quand $x \to x_0$. □

Remarque

D'après ce théorème, il y a unicité (lorsqu'il existe) du développement limité de f d'ordre 1 en x_0.

I.3.b) Tangente de f en x_0

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

- Si f est dérivable en x_0, on appelle **tangente de f en x_0** la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ de cœfficient directeur $f'(x_0)$.
- Autrement dit, c'est la droite d'équation : $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)}$

Remarque

Il arrive parfois que la fonction f possède une dérivée à gauche et à droite en x_0 sans pour autant être dérivable en x_0. Plus précisément, c'est le cas lorsque $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$. On introduit alors les notions suivantes.

- La demi-tangente à gauche de f en x_0 est la droite d'équation : $y = f(x_0) + f'_g(x_0)\,(x - x_0)$.
- La demi-tangente à gauche de f en x_0 est la droite d'équation : $y = f(x_0) + f'_d(x_0)\,(x - x_0)$.

Définition *(Tangente de la forme $x = x_0$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

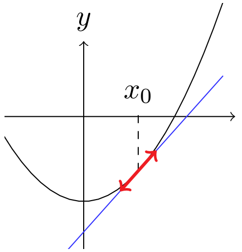
Supposons que :

× f est continue en x_0

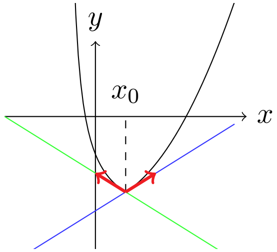
× $\lim\limits_{x \to x_0} \tau_{x_0}(f)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) *(f est donc non dérivable en x_0)*

- On appelle **tangente verticale de f en x_0** la droite verticale passant par le point $(x_0, f(x_0))$.
- Autrement dit, c'est la droite d'équation $x = x_0$.

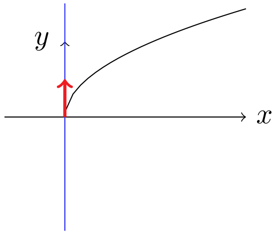
Représentation graphique



Tangente



Demi-tangentes



Tangente verticale

I.3.c) $\mathrm{DL}_1(x_0)$ et négligeabilité / équivalence

Dans l'écriture du $\mathrm{DL}_1(x_0)$ de f, on a introduit l'écriture $(x - x_0)\,\varepsilon(x)$ où la fonction ε est telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- La fonction $x \mapsto (x - x_0)\ \varepsilon(x)$ est négligeable devant $x \mapsto (x - x_0)$ en x_0. En effet :
$$\frac{(\cancel{x - x_0})\,\varepsilon(x)}{\cancel{x - x_0}} = \varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$$
- C'est une écriture générique d'une fonction négligeable devant $x \mapsto (x - x_0)$ en x_0. Cette écriture étant un peu lourde, on utilisera généralement la notation $\underset{x\to x_0}{o}(x - x_0)$.

Notation

Rappelons la notation introduite au CH8.

- $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(x - x_0)$ si f est négligeable devant $x \mapsto x - x_0$ *i.e.* si :
$$\frac{f(x)}{x - x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$$
- $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ si f est négligeable devant la fonction g *i.e.* si :
$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, si f est dérivable en x_0, son $\mathrm{DL}_1(x_0)$ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x - x_0)}$$

Exemple

Avec cette notation, au voisinage de 0, on a :

$$\boxed{\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)} \qquad \boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)}$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)} \qquad \boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + \underset{x\to 0}{o}(x)}$$

Remarque

- Il est à noter que le premier terme non nul de ces développements fournit un équivalent de la fonction considérée.
  On retrouve ainsi : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \left(i.e.\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1\right)$.
  (ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que $y = \ln(1+x)$ peut-être confondue avec sa tangente $y = x$ à proximité de 0)
- D'autre part, on a aussi : $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$.
  (ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que $y = \mathrm{e}^x$ peut-être confondue avec sa tangente $y = 1 + x$ à proximité de 0)
- Enfin, on peut aussi écrire que : $\mathrm{e}^x - 1 = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.
  On retrouve alors : $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to x_0}{\sim} x \quad \left(i.e.\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1\right)$.
  (ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que $y = \mathrm{e}^x - 1$ peut-être confondue avec sa tangente $y = x$ à proximité de 0)

II. Dérivabilité globale

II.1. Notion de fonction dérivable sur un ensemble

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- La fonction f est dite **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors **fonction dérivée** et on note f' la fonction suivante.

$$f' \ : \left| \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

- Une fonction est dite dérivable sur une réunion finie d'intervalles D si elle est dérivable sur chacun des intervalles composant D.
(la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $]-\infty, 0[\, \cup \,]0, +\infty[$:
en effet, elle est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.)

II.2. Opérations sur les fonctions dérivables

II.2.a) Dérivabilité et opérations algébriques

Théorème 5.

Soit I un intervalle.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Supposons que f et g sont dérivables sur I.

***1)** La fonction $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est dérivable sur I et :*

$$\boxed{(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)' \ = \ \lambda \cdot f' + \mu \cdot g'}$$

***2)** La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et :*

$$\boxed{(f \times g)' \ = \ f' \times g + f \times g'}$$

Démonstration.
Soient $x_0 \in I$ et $x \in I$ tel que $x \neq x_0$.

1) Dans le cas de la somme, on a :

$$\begin{array}{rcl} \tau_{x_0}(f+g)(x) & = & \dfrac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} \\ & = & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ + \ \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ & = & \underset{\substack{\big\downarrow x \to x_0 \\ f'(x_0)}}{\tau_{x_0}(f)(x)} \ + \ \underset{\substack{\big\downarrow x \to x_0 \\ g'(x_0)}}{\tau_{x_0}(g)(x)} \end{array}$$

2) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \tau_{x_0}(\lambda f)(x) & = & \dfrac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0} \ = \ \lambda \, \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ & = & \lambda \, \tau_{x_0}(f)(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \lambda \, f'(x_0) \end{array}$$

3) Pour le cas du produit, on a :

$$\begin{array}{rcl} \tau_{x_0}(f \times g)(x) & = & \dfrac{(f \times g)(x) - (f \times g)(x_0)}{x - x_0} \\ & = & \dfrac{(f(x) - f(x_0)) \times g(x) + (g(x) - g(x_0)) \times f(x_0)}{x - x_0} \\ & = & \underset{\substack{\big\downarrow x \to x_0 \\ f'(x_0) \times g(x_0)}}{\tau_{x_0}(f)(x) \times g(x)} \ + \ \underset{\substack{\big\downarrow x \to x_0 \\ f(x_0) \times g'(x_0)}}{f(x_0) \times \tau_{x_0}(g)(x)} \end{array}$$

□

Théorème 6.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$.

Supposons que f et g sont dérivables sur I.

Supposons de plus que g ne s'annule pas sur I.

Alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I. De plus :

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

Démonstration.
Soient $x_0 \in I$ et $x \in I$ tel que $x \neq x_0$.

1) Pour le cas de l'inverse :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \underset{\substack{\downarrow x \to x_0 \\ -g'(x_0)}}{\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}} \times \underset{\substack{\downarrow x \to x_0 \\ \frac{1}{(g(x_0))^2}}}{\frac{1}{g(x)\ g(x_0)}}$$

2) Le cas du produit se déduit des cas du produit et de l'inverse. □

Théorème 7.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Supposons que f est dérivable sur I.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\left\{\begin{array}{l} f^k \text{ est dérivable sur } I \\ \boxed{(f^k)' = k\ f^{k-1} \times f'} \end{array}\right.$

Démonstration.
Par récurrence en écrivant $f^{k+1} = f \times f^k$. □

Application

- Les fonctions constantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (de dérivée nulle).
- $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée la fonction constante $x \mapsto 1$.
- Par le théorème précédent (puissances), $x \mapsto x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto k\ x^{k-1}$.
- Finalement, toutes les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (car obtenues comme sommes et produits par un réel / par une fonction).
- Les fonctions rationnelles *i.e.* de la forme $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ sont dérivables sur tout intervalle I sur lequel Q ne s'annule pas.

II.2.b) Dérivabilité des fonctions composées

Théorème 8.

Soient $h : J \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$

Supposons que :

× *la fonction g est :*
  - *dérivable sur I,*
  - *telle que : $g(I) \subset J$.*

× *la fonction h est dérivable sur J.*

Alors $h \circ g : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $\boxed{(h \circ g)' = (h' \circ g) \times g'}$

Démonstration.
Soient $x_0 \in I$ et $x \in I$ tel que $x \neq x_0$.

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(h \circ g)(x) &= \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \tau_{g(x_0)}(h)(g(x)) \times \tau_{x_0}(g)(x) \end{aligned}$$

On note alors $y_0 = g(x_0)$. En effectuant le changement de variable $y = g(x)$ $(x \to x_0 \;\Rightarrow\; y \to g(x_0) = y_0)$, on obtient :

$$\lim_{x\to x_0} \tau_{y_0}(h)(g(x)) \;=\; \lim_{y\to y_0} \tau_{y_0}(h)(y) \;=\; h'(y_0) \;=\; h'(g(x_0))$$

Dans cette démo, on a choisi x tel que $g(x) \neq g(x_0)$.
Pour trouver un tel x, il faut que g ne soit pas constante au voisinage de x_0.
Si g est constante, on a $g' = 0$ et la formule est encore vérifiée ($h \circ g$ est aussi constante) □

Exemple

Calcul de la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$.

- f est définie sur $\mathscr{D}_f = \,]-\infty, -2] \cup \,]1, +\infty[$.

  En effet, la quantité $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$ est définie dès que $g(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \geqslant 0$.
  Il suffit alors de noter que $g(x)$ a même signe que la quantité $(x+2)(x-1)$.
- f est dérivable sur $D = \mathscr{D}_f \setminus \{-2\}$. En effet, f est la composée de :
  - × $g : x \mapsto \dfrac{x+2}{x-1}$ dérivable (notamment) sur D.
    De plus, $g(D) \subset \,]0, +\infty[$.
  - × $h : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$.
- On a alors, pour tout $x \in D = \,]-\infty, -2[\cup \,]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\,\sqrt{g(x)}} \times g'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \times \frac{(\cancel{x}-1)-(\cancel{x}+2)}{(x-1)^2} \\ & &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \times \frac{-3}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Application : dérivabilité de l'élévation à la puissance quelconque

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$ (par définition).

- Cette fonction est définie pour tout $x > 0$. Autrement dit : $\mathscr{D}_f =]0, +\infty[$.
- La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car est la composée de :
  - × $g : x \mapsto a \ln x$ dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, $g(\,]0, +\infty[\,) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h : x \mapsto e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

  Pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{a}{x}\, e^{a \ln x} = \dfrac{a}{x}\, x^a = x^{a-1}$.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, +\infty[, \quad \boxed{(x^a)' \;=\; a\, x^{a-1}}$$

II.2.c) Dérivabilité des fonctions réciproques

Théorème 9.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle).

Supposons que f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Supposons que f est dérivable sur I.

Supposons que f' ne s'annule pas sur I.

Alors $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable sur $f(I)$, et : $\boxed{(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$

Démonstration.
Soit $y_0 \in f(I)$. Il existe donc $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$.
Pour tout $y \in f(I)$ tel que $y \neq y_0$:

$$\tau_{y_0}(f^{-1})(y) \;=\; \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \;=\; \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}$$

Comme la fonction f^{-1} est continue, en posant le changement de variable $x = f^{-1}(y)$ $(y \to y_0 \ \Rightarrow \ x \to f^{-1}(y_0) = x_0)$, on obtient :

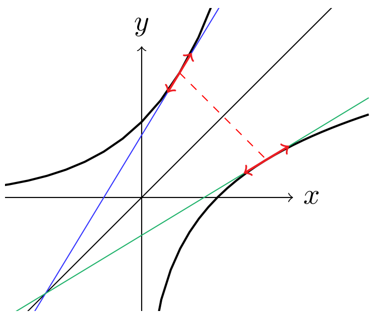
$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Et comme $f'(x_0) \neq 0$, $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$. □

Remarque

- L'hypothèse de bijectivité est généralement obtenue par le théorème de la bijection. On rappelle que si f est continue et strictement croissante sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
- On peut retrouver la formule du théorème via l'égalité $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$.
  En effet, en dérivant formellement cette égalité, on obtient :
  $$\left(f' \circ f^{-1}\right) \times \left(f^{-1}\right)' = 1$$

Interprétation géométrique



- La formule : $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ signifie que le coefficient directeur de la tangente en y_0 de f^{-1} est l'inverse de la tangente en x_0 de f.
- Les tangentes de f^{-1} en y_0 et de f en x_0 sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$.

II.3. Dérivées successives

II.3.a) Définition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Supposons que f est dérivable sur I.

- On dit que f est n **fois dérivable** sur I si :
  × f est $n-1$ fois dérivable sur I,
  × $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I.

  On note alors : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' : I \to \mathbb{R}$.
- On dit que f est **indéfiniment dérivable** sur I si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I.

⚠ Même si les notations sont proches, il ne faut pas confondre :
× f^n qui est la puissance $n^{\text{ème}}$ de la fonction f,
× $f^{(n)}$ qui est la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction f.

Remarque

Détaillons cette définition pour bien la comprendre.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- Si $f' : I \to \mathbb{R}$ est elle-même dérivable sur I, on peut considérer la dérivée de f', appelée **dérivée seconde** de f et notée $(f')' = f'' : I \to \mathbb{R}$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, on peut définir **la dérivée $n^{\text{ème}}$** de f comme suit.

  0) $f^{(0)} = f : I \to \mathbb{R}$,
  1) Si f est dérivable sur I, on note $f^{(1)} = f' : I \to \mathbb{R}$,
  $\vdots$
  n) Si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, on note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' : I \to \mathbb{R}$.

Exemple

- Les fonctions polynomiales sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- On en déduit que la fonction ln est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- La fonction $f : x \mapsto x\ \sqrt{|x|}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrons-le.
  La fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car est la composée de :
  × $g : x \mapsto |x|$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $g(\mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}^{+*}$.
  × $h : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
  De plus, la fonction f est dérivable en 0. En effet :
  $$\tau_0(f)(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\cancel{x}\ \sqrt{|x|}}{\cancel{x}} = \sqrt{|x|} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$
  Enfn, pour $x \neq 0$, on a :
  × si $x > 0$: $f(x) = x\ \sqrt{x}$ et $f'(x) = \sqrt{x} + x\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\ \sqrt{x} = \dfrac{3}{2}\ \sqrt{x}$.
  × si $x < 0$: $f(x) = x\ \sqrt{-x}$. On en déduit :
  $$f'(x) = \sqrt{-x} - x\ \frac{1}{2\sqrt{-x}} = \sqrt{-x} + \frac{\sqrt{-x}\ \cancel{\sqrt{-x}}}{2\ \cancel{\sqrt{-x}}}\ \sqrt{x} = \frac{3}{2}\ \sqrt{-x}$$
  On obtient alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{3}{2}\ \sqrt{|x|}$.
- La fonction $f' : x \mapsto \dfrac{3}{2}\ \sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable en 0. En effet :
  $$\begin{aligned}\tau_0(f')(x) &= \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{3}{2}\ \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \frac{3}{2}\ \frac{\cancel{\sqrt{|x|}}}{\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}\,\cancel{\sqrt{|x|}}} \\ &= \frac{3}{2}\ \frac{1}{\sqrt{|x|}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty \quad \textit{(}+\infty \textit{ à droite et } -\infty \textit{ à gauche)}\end{aligned}$$
  On en déduit que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

II.3.b) Caractère C^n et C^∞

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est de **classe C^n sur I** si
  × f est n fois dérivable sur I,
  × $f^{(n)}$ est continue sur I.
- Ainsi, on dit que f est de classe C^0 sur I si f est continue sur I.
- On dit de plus que f est de classe C^∞ sur I si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I.
- Enfin, on note $C^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I, et $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.

Remarque

- Si f est de classe C^n, on dit aussi que f est n **fois continûment dérivable**. Il est à noter que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f^{(k)}$ est continue :
  × si $k \in [\![1, n-1]\!]$, $f^{(k)}$ est continue car dérivable.
  × $f^{(n)}$ est continue par définition.
- Notez que f est C^∞ signifie qu'elle est indéfiniment dérivable (ces deux notions coïncident).

Exemple

- Les fonctions polynomiales sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- On en déduit que la fonction ln est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- La fonction $f : x \mapsto x\ \sqrt{|x|}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Sa dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{3}{2}\ \sqrt{|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$.
  Par contre, f' n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ (car non dérivable en 0).
  Ainsi f n'est pas C^2 sur $\mathbb{R}$.
  Mais on peut montrer qu'elle est C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

II.3.c) Opérations algébriques sur les fonctions de classe C^n

Théorème 10.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que f et g sont n fois dérivables (resp. C^n/C^∞) sur I.

a) *La fonction $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est n fois dérivable (resp. C^n/C^∞) sur I et :*

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)^{(k)} \ = \ \lambda \cdot f^{(k)} + \mu \cdot g^{(k)}}$$

b) *La fonction $f \times g$ est n fois dérivable (resp. C^n/C^∞) sur I et :*

$$\boxed{(f \times g)^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \times g^{(k)}} \qquad \textit{(Formule de Leibniz)}$$

c) *Si de plus la fonction g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable (resp. C^n/C^∞) sur I.*

Démonstration.
Chacune de ces formules se démontre par récurrence (on prouve au passage le caractère dérivable). On laisse ***a)*** et ***b)*** en exercice.

Soient f et g deux fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrons par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : (f \times g)^{(n)} \ = \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\ g^{(n-k)}$.

1) **Initialisation** :
$(f \times g)^{(0)} = f \times g$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)}\ g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)}\ g^{(0)} = f \times g$.
La propriété $\mathscr{P}(0)$ est donc vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.
($i.e.$ $(f \times g)^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\ g^{(n-k)}$).

Tout d'abord, remarquons que : $(f \times g)^{(n+1)} \ = \ \left((f \times g)^{(n)}\right)'$.
Or, par hypothèse de récurrence ($\mathscr{P}(n)$), on sait que :

$$(f \times g)^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\ g^{(n-k)}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&(f \times g)^{(n+1)} \\
= \ & \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}\right)' \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} \times g^{(n-k)}\right)' \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + f^{(k)} \times g^{(n-k+1)}\right) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \\
= \ & \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-(k-1))}\right) + \binom{n}{n} f^{(n+1)} \times g^{(0)} \\
+ \ & \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}\right) + \binom{n}{0} f^{(0)} \times g^{(n+1)} \\
= \ & f^{(0)} g^{(n+1)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}\right) + f^{(n+1)} g^{(0)} \\
= \ & f^{(0)} \times g^{(n+1)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}\right) + f^{(n+1)} \times g^{(0)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

L'avant dernière ligne est obtenue grâce à la formule du triangle de Pascal.
La dernière est obtenue en remarquant que :
$f^{(0)}g^{(n+1)} = \binom{n+1}{0} f^{(0)}g^{(n+1)}$ et $f^{(n+1)}g^{(0)} = \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}g^{(0)}$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Ainsi, par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$. □

Exemple
Déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $h : x \mapsto (x^2+1)\,\mathrm{e}^x$.

- Notons $f : x \mapsto x^2+1$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$.
- f est polynomiale donc C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ et $f^{(3)}(x) = 0$ (d'où : $\forall k \geqslant 3,\ f^{(k)} = 0$).
- La fonction g est elle aussi C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)} = g$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(f\times g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g \ + \ \cancel{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}} \times g \\
&= \binom{n}{0} f^{(0)} \times g \ + \ \binom{n}{1} f^{(1)} \times g \ + \ \binom{n}{2} f^{(2)} \times g \\
&= f \times g \ + \ n\,f' \times g \ + \ \tfrac{n(n-1)}{2}\, f'' \times g \\
&= \left(f \ + \ n\,f' \ + \ \tfrac{n(n-1)}{2}\, f''\right) \times g
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

× $h^{(0)}(x) \ = \ h(x) \ = \ (x^2+1)\ \mathrm{e}^x$.

× $h^{(1)}(x) \ = \ h'(x) \ = \ (2x + (x^2+1))\ \mathrm{e}^x \ = \ (x+1)^2\ \mathrm{e}^x$.

× pour tout $n \geqslant 2$: $h^{(n)}(x) \ = \ (x^2 + 2n\,x + n\,(n-1) + 1)\,\mathrm{e}^x$.

Théorème 11.
Soient $h : J \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $g(I) \subset J$.
Supposons que :
× *la fonction g est :*
  - *n fois dérivable (resp. C^n/C^∞) sur I,*
  - *telle que : $g(I) \subset J$.*

× *la fonction h est n fois dérivable (resp. C^n/C^∞) sur J.*

Alors $h \circ g : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable (resp. C^n/C^∞) sur I.

Démonstration.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: $\left.\begin{array}{l} h : J \to \mathbb{R} \text{ est } C^n \text{ sur } J \\ g : I \to \mathbb{R} \text{ est } C^n \text{ sur } I \end{array}\right\} \Rightarrow \ h \circ g$ est C^n sur I.

1) **Initialisation** :
Soient $h : J \to \mathbb{R}$ de classe C^0 sur J et $g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^0 sur I.
- $h \circ g$ est continue sur I car c'est la composée de :
  × $g : I \to \mathbb{R}$, continue sur I et telle que $g(I) \subset J$,
  × $h : J \to \mathbb{R}$, continue sur J.

La propriété $\mathscr{P}(0)$ est donc vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.
Soient $h : J \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} sur J et $g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} sur I.
- La fonction $h \circ g$ est dérivable sur I comme composée.
- De plus : $(h \circ g)' = (h' \circ g) \times g'$.
- Comme h est C^{n+1} sur J, alors h' est C^n sur J.
  De plus, g C^n sur I (car C^{n+1} sur I).
  On applique alors l'hypothèse de récurrence à h' et g.
  On en déduit donc que : $h' \circ g$ est de classe C^n sur I.

  Ainsi, $(h \circ g)'$ est C^n sur I par produit de fonctions C^n sur I.

Donc $h \circ g$ est C^{n+1} sur I. D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$. □

II.3.d) Dérivées $k^{\text{ème}}$ de fonctions classiques

Proposition 1.

1) *Soit $(n,a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On note $f : x \mapsto (x-a)^n$. Alors f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \boxed{f^{(k)} : x \mapsto \dfrac{n!}{(n-k)!}\ (x-a)^{n-k}}$$

(on en déduit la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $x \mapsto x^n$ en prenant $a = 0$)

2) *Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$. Alors g est C^∞ sur $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$ et :*

$$\forall k \geqslant 0, \quad \boxed{g^{(k)} : x \mapsto \dfrac{(-1)^k\ k!}{(x-a)^{k+1}}}$$

3) *La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :*

$$\forall k \geqslant 1, \quad \boxed{\ln^{(k)} : x \mapsto \dfrac{(-1)^{k-1}\ (k-1)!}{x^k}}$$

4) *La fonction $x \mapsto e^x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\forall k \geqslant 0, \quad \boxed{\exp^{(k)} : x \mapsto e^x}$$

5) *Soit $a > 0$. La fonction $h : x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\forall k \geqslant 0, \quad \boxed{h^{(k)} : x \mapsto (\ln a)^k\ a^x}$$

Démonstration.
Par récurrence !
On peut retrouver ces formules en généralisant depuis les petites valeurs.

3) Conséquence directe de ***2)***.

4) Dérivée de exp peut s'obtenir comme dérivée de la réciproque de ln. □

III. Les théorèmes de la dérivabilité sur un intervalle

III.1. Théorème de Rolle

Théorème 12.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ il existe } c \in\ ]a,b[\text{ tel que } f'(c) = 0}$$

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction f est continue sur le `SEGMENT` $[a,b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes.
  On en déduit qu'il existe $(c_1, c_2) \in [a,b]^2$ tel que :
  × $f(c_1) = \min\limits_{[a,b]} (f) = m$,
  × $f(c_2) = \max\limits_{[a,b]} (f) = M$.
- Le but est alors de démontrer que l'un de ces deux extrema est atteint sur $]a,b[$.
- Deux cas se présentent :
  1) Si $m = M$, alors pour tout $x \in [a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M = m$.
  La fonction f est donc constante sur $[a,b]$.
  Ainsi : $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) = 0$. On note alors $c = \dfrac{a+b}{2}$. On obtient bien :
  × $c \in\ ]a,b[$,
  × $f'(c) = 0$.
  2) Si $m \neq M$, alors trois cas se présentent :
  × si $c_1 = a$, alors :
  - $c_2 \neq a$, car : $m \neq M$.

- $c_2 \neq b$. En effet, si $c_2 = b$, alors :

$$m = f(c_1) = f(a) = f(b) = f(c_2) = M$$

Absurde !

On en déduit : $c_2 \in]a, b[$. Ainsi :

- la fonction f est dérivable en c_2,
- la fonction f admet un extremum (un maximum) en c_2.

On en conclut, en notant $c = c_2$: $f'(c) = 0$.

× si $c_1 \in]a, b[$, alors :

- la fonction f est dérivable en c_1,
- la fonction f admet un extremum (minimum) en c_1.

On en conclut, en notant $c = c_1$: $f'(c) = 0$.

× si $c_1 = b$, alors on démontre en raisonnant de façon similaire au cas $c_1 = a$, qu'en notant $c = c_2$: $f'(c) = 0$.

□

Remarque

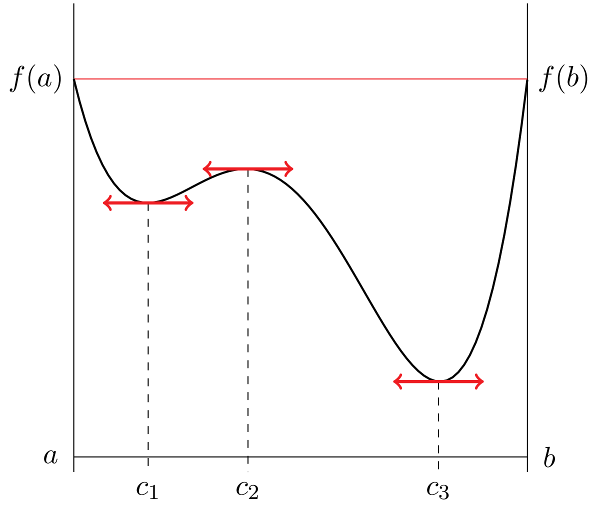
- L'hypothèse f dérivable sur $]a, b[$ (ouvert) est l'hypothèse minimale. Évidemment, le résultat reste vrai si f est dérivable sur $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$ puisque f est alors dérivable sur $]a, b[$.
- Par contre, l'hypothèse f continue sur $[a, b]$ (fermé) est fondamentale.
- Ces deux hypothèses de régularité peuvent être remplacées par l'hypothèse plus forte : f dérivable sur $[a, b]$.
(ces remarques sont aussi valables pour les énoncés qui suivent)

Autre formulation

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$ où I est un intervalle.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ dérivable sur un intervalle } I \\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Interprétation géométrique.



La courbe représentative de f possède (au moins) une tangente parallèle à l'axe des abscisses (et donc parallèle à la corde joignant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$).

Interprétation physique

Reprenons l'exemple de l'alpiniste.
Si son altitude au temps t_1 est celle au temps t_2 cela signifie :

× soit qu'il a stagné durant cette période. Sa vitesse instantanée de déplacement verticale a donc été nulle à tout moment sur cette période.

× soit qu'il est descendu vers un point plus bas puis est monté de nouveau. À ce point le plus bas, sa vitesse instantanée était nulle.

III.2. Théorème des accroissements finis

Théorème 13.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

• *f continue sur $[a, b]$* • *f dérivable sur $]a, b[$*	$\Rightarrow$	*il existe $c \in \,]a, b[$ tel que* $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Démonstration.
Il s'agit de comparer f à sa corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
Cette corde a pour équation $y = g(x)$ où g est définie par :

$$g : x \mapsto f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \, (x - a)$$

Considérons alors la fonction $h = f - g$. Elle vérifie :

× h est continue sur $[a, b]$ (car f et g le sont),

× h est dérivable sur $]a, b[$ (car f et g le sont),

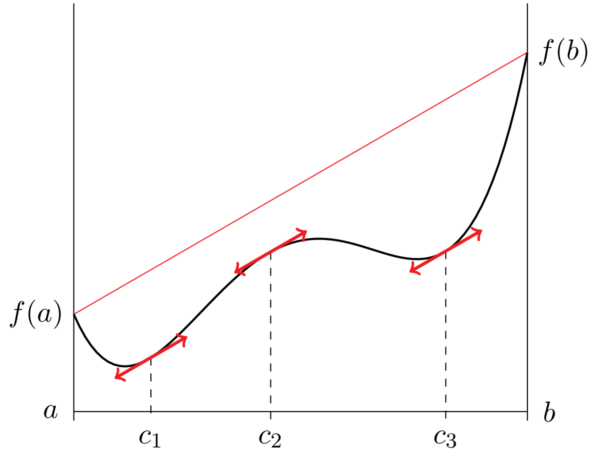
× $h(a) = f(a) - g(a) = 0 = f(b) - g(b) = h(b)$.

Ainsi, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

Or, pour tout $x \in]a, b[$, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Au point c, on a donc : $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Interprétation géométrique.



La courbe représentative de f possède (au moins) une tangente parallèle à sa corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Interprétation physique
Ce théorème compare taux d'accroissement et dérivée en un point.

- Reprenons l'exemple de la voiture : si elle a roulé en moyenne à 100 km/H entre deux instants a et b (elle a pu rouler à 50 km/H ou parfois à 130 km/H) elle a forcément eu, à un instant c une vitesse instantanée égale à 100 km/H.

☐ **Remarque**
Le théorème de accroissements finis peut être vu comme une généralisation du théorème de Rolle. En effet, si on applique le TAF à une fonction vérifiant de plus $f(a) = f(b)$, on aboutit à la conclusion : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ pour un $c \in \,]a, b[$, ce qui démontre que $f'(c) = 0$.

III.3. Inégalité des accroissements finis

III.3.a) Lipschitzianité

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $K \geqslant 0$.

On dit que f est K-**lipschitzienne** sur I si :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2,\ \left|f(x) - f(y)\right| \ \leqslant\ K\,|x-y|}$$

Remarque

La courbe représentative d'une fonction K-lipschitzienne possède donc des cordes de pentes toutes majorées par K en valeur absolue.

Exercice 1

Démontrer que :

a) la fonction $x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

b) la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est 1-lipschitzienne sur $[1,+\infty[$.

Proposition 2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $K \geqslant 0$.

$$\boxed{f \text{ est } K\text{-lipschitzienne sur } I \quad \Rightarrow \quad f \text{ est continue sur } I}$$

Démonstration.

À faire. ☐

III.3.b) Inégalité des accroissements finis

Théorème 14.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ \bullet\ \text{il existe } m \text{ et } M \text{ tels que} \\ \quad \forall u \in\ ]a,b[,\ m \leqslant f'(u) \leqslant M \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M}$$

Démonstration.

D'après le TAF, il existe $c \in]a,b[$, $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

On a alors : $m \leqslant f'(c) \leqslant M$, ce qui conclut cette démonstration. ☐

Interprétation physique

- Si la fonction f est C^1, alors f' est C^0 sur $[a,b]$.
  On peut alors choisir $m = \min\limits_{[a,b]} f'$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f'$.
- L'IAF stipule alors que la vitesse moyenne entre deux instants a et b est comprise entre la plus petite vitesse instantanée et la plus grande vitesse instantanée.

Formulation BIS

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $(x,y) \in I^2$ où I est un <u>intervalle</u>.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ dérivable sur un intervalle } I \\ \bullet\ \text{il existe } M \geqslant 0, \\ \quad \forall u \in I,\ |f'(u)| \leqslant M \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ \begin{array}{l} \forall (x,y) \in I^2, \\ |f(y)-f(x)| \ \leqslant\ M\,|y-x| \end{array}}$$

Formulation TER

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ dérivable sur un intervalle } I \\ |f'| \text{ majorée par } M \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f \text{ est } M\text{-lipschitzienne}$$

Exercice 2
Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big|\sin(x)\big| \leqslant |x|$$

Application à l'étude de suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème 15 *(le redémontrer dans chaque exercice)*.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I intervalle.

On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$

Supposons que f est dérivable sur I.

Supposons qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que : $\forall u \in I,\ |f'(u)| \leqslant M$.

Supposons que I est stable par f (i.e. $f(I) \subset I$).

Supposons que f admet un point fixe $\ell \in I$ (i.e. $f(\ell) = \ell$).

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \in I}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{|u_{n+1} - \ell| \leqslant M\ |u_n - \ell|}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{|u_n - \ell| \leqslant M^n\ |u_0 - \ell|}$

4) Si on sait de plus que $0 \leqslant M < 1$, alors (u_n) est convergente, de limite ℓ.

Démonstration.

1) Donnons l'idée de la récurrence : $u_0 \in I$ (initialisation). Si on sait que $u_n \in I$ pour un $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ car I est stable par f (hérédité).

2) D'après l'IAF, $|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant M\ |u_n - \ell|$.
Il suffit alors de remarquer que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ell) = \ell$.

3) Donnons l'idée de la récurrence : $M^0 = 1$ donc l'étape d'initialisation est directe. Supposons que $|u_n - \ell| \leqslant M^n\ |u_0 - \ell|$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Or, par la propriété précédente, on a :

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant M\ |u_n - \ell| \leqslant M \times M^n\ |u_0 - \ell| = M^{n+1}\ |u_0 - \ell|$$

4) Si $0 \leqslant M < 1$, alors $M^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit, par le théorème d'encadrement, que $u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui équivaut à $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. □

Exercice 3

On note (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{array}\right.$

On pose $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$.

1. Montrer que $[0,2]$ est stable par f et : $\forall x \in [0,2], |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. Déterminer les points fixes de f. Notons r l'unique point fixe dans $[0,2]$.

3. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{|u_n - r|}{2}$ puis $|u_n - r| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$

5. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

6. Déterminer un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$.

7. Écrire un programme **Python** donnant une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

III.4. Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 16. (Théorème de la limite de la dérivée)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.
Soit $a \in I$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ \lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$$

Démonstration.
À faire. □

Proposition 3.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.
*Soit $a \in I$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ (ℓ est **fini**).*

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ \lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f \text{ dérivable en } a \text{ et : } f'(a) = \ell$$

`MÉTHODO` **Démontrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$**

Pour montrer qu'une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tout entier, on démontre que :

× la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$,
× la fonction f est prolongeable par continuité en a (on note encore f le prolongement),
× la fonction f' admet une limite finie ℓ en a.

On applique ensuite le théorème de la limite de la dérivée pour conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

IV. Dérivation et sens de variation

IV.1. Caractérisation des fonctions monotones par le signe de la dérivée

Théorème 17.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (où I intervalle de $\mathbb{R}$).

a) *f est croissante sur I*	$\Leftrightarrow$	*f' est positive ou nulle sur I*
b) *f est décroissante sur I*	$\Leftrightarrow$	*f' est négative ou nulle sur I*
c) *f est constante sur I*	$\Leftrightarrow$	*f' est nulle sur I*

Démonstration.
Soit f une fonction dérivable sur I.

a) ($\Rightarrow$) Supposons f croissante sur I. Soit $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$:

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

En effet, la croissance de f signifie que $f(x)-f(x_0)$ est du signe de $x-x_0$.
f étant dérivable en x_0, on obtient, par passage à la limite dans l'inégalité :

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons $f' \geqslant 0$ sur I.
Soient x et y deux éléments de I tels que $x \leqslant y$.
En appliquant le TAF à la fonction f dérivable sur $[x,y]$, on obtient :

$$\exists c \in]x,y[, \ f(y)-f(x) = \underbrace{(y-x)}_{\geqslant 0} \ \underbrace{f'(c)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

Ainsi $f(y) \geqslant f(x)$.

b) Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction $g = -f$.

c) Il suffit de remarquer qu'une fonction constante est à la fois croissante et décroissante et que $f' = 0$ signifie que $f' \geqslant 0$ et $f' \leqslant 0$. □

Remarque

- L'hypothèse f dérivable sur I n'est pas l'hypothèse minimale.
  On peut énoncer le théorème avec l'hypothèse suivante :
  × f continue sur I,
  × f dérivable sur $\mathring{I}$.
  Sous cette hypothèse, on a alors : f croissante sur $I \Leftrightarrow f' \geqslant 0$ sur $\mathring{I}$.
- Cette remarque reste vraie pour les résultats issus de ce théorème.

Théorème 18.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (où I intervalle de $\mathbb{R}$).

a) *f' strictement positive sur I*	$\Rightarrow$	*f strictement croissante sur I*
b) *f' strictement négative sur I*	$\Rightarrow$	*f strictement décroissante sur I*

Démonstration.
Même démonstration que la précédente : soient $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$.
En appliquant le TAF à la fonction f dérivable sur $[x, y]$, on obtient :

$$\exists c \in \,]x, y[, \ f(y) - f(x) = \underbrace{(y - x)}_{>0} \ \underbrace{f'(c)}_{>0} > 0$$

□

Remarque

- Il n'y a pas équivalence ! Pour s'en convaincre, on peut considérer la fonction $f : x \mapsto x^3$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  Pourtant, $f' : x \mapsto 3x^2$ n'est pas strictement positive : $f'(0) = 0$.
- Si l'on reprend la démo précédente pour une fonction f strictement croissante, on obtient : $\tau_{x_0}(f)(x) > 0$. Mais cette inégalité stricte n'est pas respectée par passage à la limite : $f'(x_0) \geqslant 0$.
- Mais alors comment démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$?
  (i) Revenir à la définition : soit x, y tels que $x < y$. Alors :
  $y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + yx + x^2) = (y - x)((y + \frac{x}{2})^2 + \frac{3}{4}x^2) > 0$.
  (ii) Utiliser le théorème suivant, plus précis.

Théorème 19.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (où I intervalle de $\mathbb{R}$).

a)	*$f' \geqslant 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points*	$\Rightarrow$	*f strictement croissante sur I*
b)	*$f' \leqslant 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points*	$\Rightarrow$	*f strictement décroissante sur I*

Démonstration.

a) On note $a_1, a_2, \dots, a_n$ ces points où f' s'annule.
Ainsi, f' est strictement positive sur chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$.
Il reste à montrer que la stricte croissance est préservée même si l'on change d'intervalle, ce que l'on démontre de proche en proche.
Soient $i \in [\![1, n-2]\!]$ et $x \in]a_i, a_{i+1}[$, $y \in]a_{i+1}, a_{i+2}[$:

$$f(x) < \underbrace{\sup_{]a_i, a_{i+1}[} f = \lim_{x \to a_{i+1}^-} f(x)}_{\text{(théorème limite monotone)}} \underbrace{= f(a_{i+1})}_{\text{(continuité de } f\text{)}}$$

De même, on a :

$$f(y) < \underbrace{\inf_{]a_{i+1}, a_{i+2}[} f = \lim_{x \to a_{i+1}^+} f(x)}_{\text{(théorème limite monotone)}} \underbrace{= f(a_{i+1})}_{\text{(continuité de } f\text{)}}$$

On en déduit que $f(x) < f(a_{i+1}) < f(y)$.

□

Application : tableau de variations.

- Par le théorème 18 et théorème 19 les flèches d'un tableau de variations signifient la stricte monotonie de la fonction considérée.
- Lorsque l'on étudie une fonction f telle que $f' \geqslant 0$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, il n'y a pas lieu de faire apparaître deux flèches de même type consécutives.

  Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ a pour tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

- La présence de deux flèches consécutives de même type est à réserver au cas où la fonction f n'est pas définie au point considéré.

  On peut illustrer ce cas par la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ (de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
f	0 $\nearrow$		$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$		$\nearrow$ 0

IV.2. Extremum local d'une fonction dérivable

Théorème 20.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (où I intervalle de $\mathbb{R}$).

Soit $x_0 \in \mathring{I}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} f' \text{ s'annule en changeant} \\ \text{de signe en } x_0 \in \mathring{I} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} f \text{ admet un extremum} \\ \text{local en } x_0 \in \mathring{I} \end{array}}$$

Démonstration.
Supposons que f' s'annule en changeant de signe en x_0.
Il existe donc $\alpha > 0$ tel que (par exemple) :

× $f' \leqslant 0$ sur $[x_0 - \alpha, x_0[$.
  La fonction f est donc décroissante sur $[x_0 - \alpha, x_0[$.

× $f' \geqslant 0$ sur $]x_0, x_0 + \alpha]$.
  La fonction f est donc croissante sur $]x_0, x_0 + \alpha]$.

Ainsi, elle admet un minimum en x_0.

x	$x_0 - \alpha$		x_0		$x_0 + \alpha$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

□

Remarque

- Ce théorème peut être vu comme une réciproque du théorème 3 du début de chapitre (f admet un extremum local en $x_0 \in \mathring{I} \Rightarrow f'(x_0) = 0$).
- On rappelle que l'hypothèse x_0 point intérieur est importante.
  On peut considérer $x \mapsto x$ sur $[0, 1]$: cette fonction admet un minimum en 0 $(= 0)$ mais $f'(0) = 1$.

V. Fonctions convexes

V.1. Définition et premières caractérisations

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- La fonction f est dite **convexe** sur l'intervalle I si :

$$\left.\begin{array}{l}\forall (x_1,x_2)\in I^2\\ \forall (t_1,t_2)\in[0,1]^2\\ \text{tels que } t_1+t_2=1,\end{array}\right\}\quad f(t_1x_1+t_2x_2)\ \leqslant\ t_1f(x_1)+t_2f(x_2)$$

- De manière équivalente, f est **convexe** sur I si

$$\left.\begin{array}{l}\forall (x_1,x_2)\in I^2\\ \forall \lambda\in[0,1]\end{array}\right\}\quad f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ \leqslant\ \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

- La fonction f est dite **concave** sur l'intervalle I si $-f$ est convexe sur I. Autrement dit, f est concave sur I si :

$$\left.\begin{array}{l}\forall (x_1,x_2)\in I^2\\ \forall \lambda\in[0,1]\end{array}\right\}\quad f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ \geqslant\ \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

(permet de traduire les propriétés de convexité pour les fonctions concaves)

Remarque

- De manière générale, si $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ avec $v>u$, alors

$$\{\lambda u+(1-\lambda)v \mid \lambda\in[0,1]\}=[u,v]$$

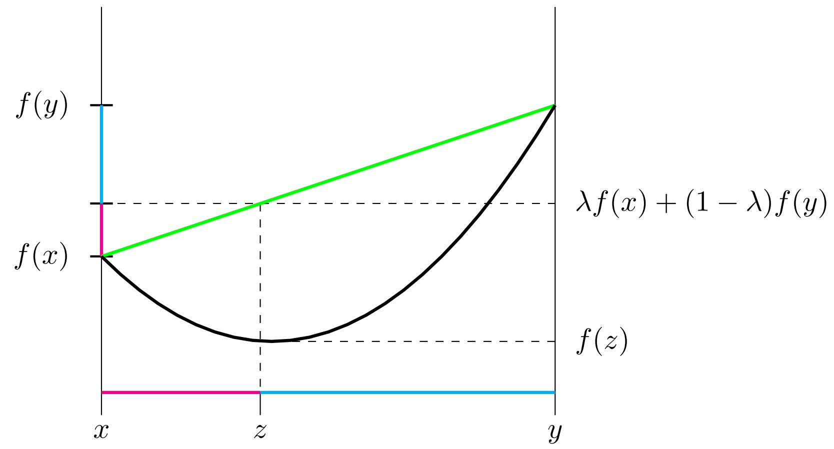
- Ceci se démontre facilement par double inclusion :

($\subseteq$) Si $z=\lambda u+(1-\lambda)v$ pour $\lambda\in[0,1]$, alors $z\geqslant \lambda u+(1-\lambda)u=u$ et $z\leqslant \lambda v+(1-\lambda)u=v$.

($\supseteq$) Si $z\in[u,v]$, il suffit de poser $\lambda=\dfrac{z-v}{u-v}$.

Interprétation graphique.

- L'inégalité de convexité correspond donc à comparer l'image par f d'un point de $[x_1,x_2]$ avec un point de $[f(x_1),f(x_2)]$.
- Plus précisément, cette inégalité signifie que si A et B sont deux points de la courbe représentative de f alors l'arc de courbe joignant A à B est situé en dessous de la corde de f joignant A à B.



Application

La notion de convexité fournit naturellement des inégalités.
Par exemple, la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On en déduit que, sur $[1,\mathrm{e}]$, elle est située au dessus de sa corde. Ainsi :

$$\forall x\in[1,\mathrm{e}],\quad \ln(x)\geqslant\frac{x-1}{\mathrm{e}-1}$$

Exemple

- Les fonctions constantes sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions affines $x\mapsto ax+b$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x\mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4. *(théorème des 3 pentes)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

a) *f est convexe sur I si et seulement si :*

$$\left.\begin{array}{l}\forall (x,y) \in I^2 \text{ tels que } x < y\\ \forall z \in]x,y[\end{array}\right\} \quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

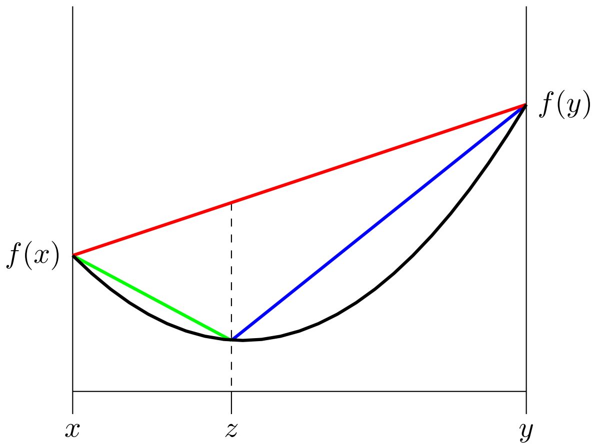
b) *f est convexe sur I si et seulement si :*

$$\left.\begin{array}{l}\forall (x,y) \in I^2 \text{ tels que } x < y\\ \forall z \in]x,y[\end{array}\right\} \quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

c) *f est convexe sur I si et seulement si :*

$$\left.\begin{array}{l}\forall (x,y) \in I^2 \text{ tels que } x < y\\ \forall z \in]x,y[\end{array}\right\} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

Interprétation graphique.
Pente verte $\leqslant$ pente bleue ; pente verte $\leqslant$ pente rouge ;
pente rouge $\leqslant$ pente bleue.



Démonstration.

b) Soit $z \in]x,y[$. Alors $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ pour un certain $\lambda \in [0,1]$.
On peut même être plus précis : $\lambda = \dfrac{y-z}{y-x}$ et donc $1-\lambda = \dfrac{z-x}{y-x}$.
On a alors : $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
autrement dit : $f(z) \leqslant \left(1 - \dfrac{z-x}{y-x}\right) f(x) + \dfrac{z-x}{y-x} f(y)$. Et ainsi :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Les autres inégalités s'en déduisent. □

Proposition 5.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si **pour tout** *$x_0 \in I$:*

$$\text{la fonction } \quad \tau_{x_0}(f) : \left|\begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{array}\right. \quad \text{est croissante}$$

Remarque
L'ensemble de ces caractérisations se traduit pour les fonctions concaves.

a) f est concave sur I si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{l}\forall (x,y) \in I^2 \text{ tels que } x < y\\ \forall z \in]x,y[\end{array}\right\} \quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

b) f est concave sur I si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{l}\forall (x,y) \in I^2 \text{ tels que } x < y\\ \forall z \in]x,y[\end{array}\right\} \quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

c) f est concave sur I si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{l}\forall (x,y) \in I^2 \text{ tels que } x < y\\ \forall z \in]x,y[\end{array}\right\} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

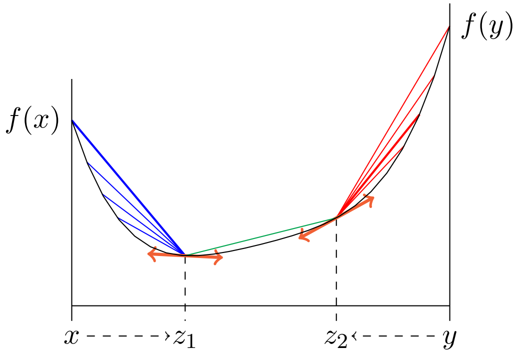
V.2. Convexité et dérivabilité

Théorème 21.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I \ \Leftrightarrow\ f' \text{ est croissante sur } I}$$

Démonstration.
($\Rightarrow$) Soit $(z_1, z_2) \in I^2$ tel que $z_1 \leqslant z_2$. Montrons que $f'(z_1) \leqslant f'(z_2)$.
La démonstration s'appuie sur le schéma suivant.

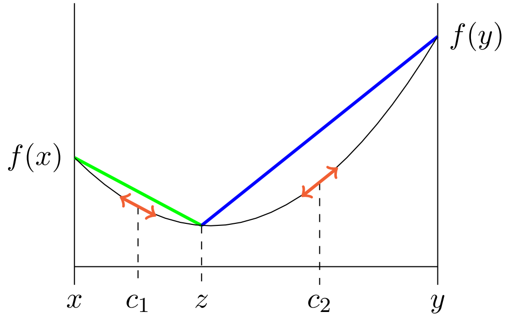


(ce schéma sous-entend que z_1 et z_2 ne sont pas des extrémités de I ; ce cas devrait être traité séparément)
Formalisons ce schéma. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < z_1$ et $y > z_2$.
D'après la proposition 4 (pentes bleues $\leqslant$ pente verte $\leqslant$ pentes rouges) :

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{f(x) - f(z_1)}{x - z_1} & \leqslant & \dfrac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} & \leqslant & \dfrac{f(y) - f(z_2)}{y - z_2} \\
\shortparallel & & & & \shortparallel \\
\tau_{z_1}(f)(x) & & & & \tau_{z_2}(f)(y) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle x \to z_1} & & & & \Big\downarrow {\scriptstyle y \to z_2} \\
f'_g(z_1) & & & & f'_d(z_2)
\end{array}$$

Or, comme f est dérivable, $f'_g(z_1) = f'(z_1)$ et $f'_d(z_2) = f'(z_2)$.

($\Leftarrow$) On va utiliser l'une des caractérisations de la proposition 4, à savoir le fait que f est convexe si toute « pente verte » est plus faible que la « pente bleue ». La démonstration s'appuie sur le schéma suivant.



Soit $(x, y) \in I^2$ et soit $z \in]x, y[$.

- Appliquons le TAF à f sur $]x, z[$: $\exists c_1 \in]x, z[,\ f'(c_1) = \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$.
  (f est dérivable sur I donc dérivable sur $[x, z]$)
- Appliquons le TAF à f sur $]z, y[$: $\exists c_2 \in]z, y[,\ f'(c_2) = \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$.
  (f est dérivable sur I donc dérivable sur $[z, y]$)

Comme $c_1 \in]x, z[$ et $c_2 \in]z, y[$ on a : $c_1 < c_2$.
Or par hypothèse, f' est croissante donc $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$.
On en conclut que : $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$. □

Théorème 22.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I.

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I \ \Leftrightarrow\ f'' \text{ est positive sur } I}$$

Démonstration.
Il suffit de se rappeler qu'une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ est croissante sur I si et seulement si g' est positive. On applique ce résultat à la fonction f'. □

Théorème 23.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I.

f est convexe sur I	$\Leftrightarrow$	*La courbe de f est située au-dessus de ses tangentes :* $\forall (a,x) \in I^2,\ f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a)$

Démonstration.

($\Rightarrow$) On reprend la démonstration du théorème 21 ($\Rightarrow$).

Soit $(a,x) \in I^2$ tel que $a \neq x$ (*le cas $x = a$ est trivial*).

- Si $x \geqslant a$, en prenant $z_1 = a$ et $z_2 = x$, l'inégalité de gauche fournit :

$$f'(a) \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Si $x \leqslant a$, en prenant $z_1 = x$ et $z_2 = a$, l'inégalité de droite fournit :

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant f'(a)$$

D'où l'inégalité souhaitée quelque soit $(a,x) \in I^2$.

($\Leftarrow$) Démontrons que f' est croissante.

Soit $(x,y) \in I^2$ avec $x < y$. Alors, par hypothèse, on a :

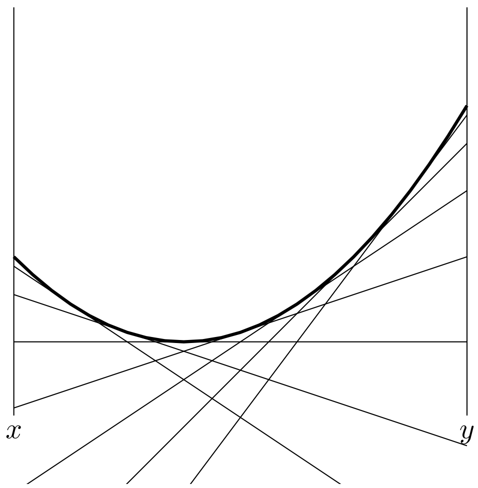
$$f(x) \geqslant f(y) + (x-y)f'(y) \quad \text{et} \quad f(y) \geqslant f(x) + (y-x)f'(x)$$

On en déduit que : $f'(x) \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y)$. □

Application

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$
- $\forall x \in]0, +\infty[,\ \ln x \leqslant x - 1$

Interprétation graphique.



Remarque

Encore une fois, il faut traduire ces propriétés dans le cas où la fonction f est concave. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On a alors :

f est concave sur I	$\Leftrightarrow$	f' est décroissante sur I
	$\Leftrightarrow$	f'' est négative sur I
	$\Leftrightarrow$	La courbe de f est située en dessous de ses tangentes : $\forall (a,x) \in I^2,\ f(x) \leqslant f(a) + (x-a)f'(a)$

V.3. Point d'inflexion

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in I$.

- Le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f si f change de convexité en ce point.
- Plus précisément, deux cas sont possibles.

$$\textit{1) } \exists \alpha > 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est concave sur } [x_0 - \alpha, x_0] \\ \textit{(la courbe de } f \textit{ est située en dessous de sa tangente en } x_0\textit{)} \\ f \text{ est convexe sur } [x_0, x_0 + \alpha] \\ \textit{(la courbe de } f \textit{ est située au-dessus de sa tangente en } x_0\textit{)} \end{array} \right.$$

$$\textit{2) } \exists \alpha > 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est convexe sur } [x_0 - \alpha, x_0] \\ \textit{(la courbe de } f \textit{ est située au-dessus de sa tangente en } x_0\textit{)} \\ f \text{ est concave sur } [x_0, x_0 + \alpha] \\ \textit{(la courbe de } f \textit{ est située en dessous de sa tangente en } x_0\textit{)} \end{array} \right.$$

- En un tel point $(x_0, f(x_0))$, la tangente de f en x_0 traverse la courbe de f.

Théorème 24.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I et soit $x_0 \in \mathring{I}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} (x_0, f(x_0)) \textit{ est un point} \\ \textit{d'inflexion de la courbe de } f \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f'' \textit{ s'annule et change} \\ \textit{de signe en } x_0 \end{array}}$$

Démonstration.
Dire que f'' s'annule en changeant de signe en x_0 signifie (par exemple) que :

$$\exists \alpha > 0, \quad \left\{ \begin{array}{ll} \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0], & f''(x) \geqslant 0 \\ \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha], & f''(x) \leqslant 0 \end{array} \right.$$

Cela signifie donc que f est convexe sur $[x_0 - \alpha, x_0]$ ($f'' \geqslant 0$ sur cet intervalle) et concave sur $[x_0, x_0 + \alpha]$ ($f'' \leqslant 0$ sur cet intervalle). □

Remarque
Ainsi, si $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion alors c'est un extremum local de la fonction f' (*cf* théorème 20).

VI. Extension aux fonctions à valeurs complexes

La notion de dérivabilité s'étend sans problème aux fonctions à valeurs complexes, comme toutes les notions de dérivées successives et de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Les opérations sur les dérivées restent également valables.
On peut, comme d'habitude, caracériser la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.

Proposition 6.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Soit $a \in I$.

$$\boxed{f \textit{ dérivable en } a \quad \Leftrightarrow \quad \big(\mathrm{Re}\,(f) \textit{ dérivable en } a \ \texttt{ET} \ \mathrm{Im}\,(f) \textit{ dérivable en } a\big)}$$

Lorsque f est dérivable en a, on obtient :

$$\boxed{f'(a) \ = \ \big(\mathrm{Re}\,(f)\big)'(a) + i\,\big(\mathrm{Im}\,(f)\big)'(a)}$$

Proposition 7.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ où I est un intervalle.

$$\boxed{f \textit{ dérivable sur } I \quad \Leftrightarrow \quad \big(\mathrm{Re}\,(f) \textit{ dérivable sur } I \ \texttt{ET} \ \mathrm{Im}\,(f) \textit{ dérivable sur } I\big)}$$

Lorsque f est dérivable sur I, on obtient :

$$\boxed{f' : x \mapsto \big(\mathrm{Re}\,(f)\big)'(x) + i\,\big(\mathrm{Im}\,(f)\big)'(x)}$$

Exercice 4
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Déterminer, si elle existe, la dérivée de $f : t \mapsto \mathrm{e}^{i\,u(t)}$ sur I.

Exercice 5
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{3}\,x} \sin(x)$.

> De nombreux résultats ne sont plus valables dans le cas des fonctions à valeurs complexes :
> - le lien entre extremum local et annulation de la dérivée (la notion d'extremum n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$),
> - le théorème de Rolle,
> - le théorème des accroissements finis
> - la caractérisation de la monotonie par la dérivée (la notion de monotonie n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$.

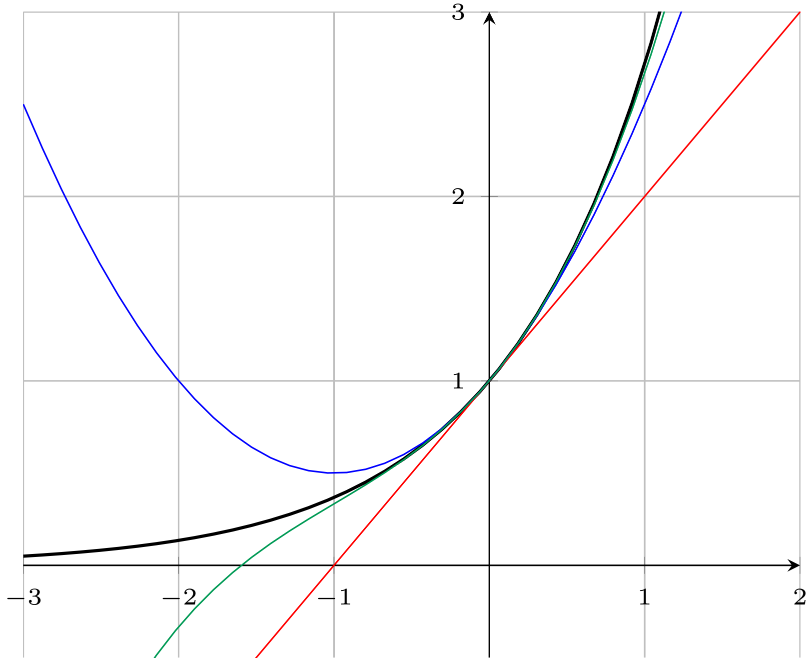
Exemple
On fournit ici un contre-exemple au théorème de Rolle dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.
On note $f : t \mapsto \mathrm{e}^{it}$. La fonction f est :
- continue sur $[0, 2\pi]$,
- dérivable sur $]0, 2\pi[$,
- telle que : $f(0) = f(2\pi)$.

Cependant : $\forall t \in [0, 2\pi],\ f'(t) \neq 0$.
D'un point de vue cinématique, un mobile peut se déplacer dans le plan et revenir à son point de départ sans que sa vitesse ne soit annulée.

Remarque
On peut néanmoins sauver les résultats suivants :
- l'inégalité des accroissements finis, version BIS (en remplaçant les valeurs absolues par les modules)
- la caractérisation du caractère constant d'une fonction sur un intervalle par la nullité de sa dérivée.

VII. Développements limités

On cherche dans cette section à étudier des fonctions au voisinage d'un point, généralement 0. L'étude de la continuité et de la dérivabilité nous donne déjà des renseignements sur l'allure de la courbe représentative d'une fonction : une tangente en un point donne par exemple localement la meilleure approximation affine. Pourquoi ne pas chercher la meilleure approximation quadratique (*i.e.* la parabole la plus « proche » localement de la courbe représentative) ? Et la meilleure approximation cubique, etc ? C'est justement l'objet de cette section : approcher localement une fonction par des polynômes de degré de plus en plus grand.



Meilleures approximations affine, quadratique et cubique
de la fonction exp au voisinage de 0

VII.1. Définitions

Définition

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (éventuellement non définie en x_0).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n **au voisinage de** x_0 (en abrégé $\mathrm{DL}_1(n)x_0$) s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\boxed{f(x) \ = \ a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^n\big)}$$

- La fonction polynomiale $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ est appelé **partie régulière** du développement limité.
- La fonction $x \mapsto f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ est appelé **reste** du développement limité.

Remarque

À l'aide du changement de variable $x = x_0 + h$, on peut écrire un développement limité sous la forme :

$$f(x_0 + h) \ = \ a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$$

En pratique, on se ramène à cette forme afin de ne manipuler que des développements limités au voisinage de 0.

Exercice 6

Démontrer que le $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est :

$$\frac{1}{1-x} \ = \ \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Remarque

Supposons que f admette un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ de la forme :

$$f(x) \ = \ a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^n\big)$$

Si $m \leqslant n$, alors on a également :

$$f(x) \ = \ a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_m (x - x_0)^m + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^m\big)$$

Autrement dit, on peut « oublier » les termes de degré compris entre $m + 1$ et n, et ainsi obtenir un $\mathrm{DL}_1(m)x_0$. Cette opération s'appelle **troncature à l'ordre** m.

Proposition 8.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage (éventuellement épointé) de x_0.

Si f admet un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$, alors celui-ci est unique.

Démonstration.
À faire. □

VII.2. DL et équivalent

Proposition 9.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage (éventuellement épointé) de x_0.

Supposons que f admette un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ de la forme :

$$f(x) \ = \ a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^n\big)$$

On note, s'il existe, p le plus petit entier naturel tel que : $a_p \neq 0$.

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} a_p (x - x_0)^p}$$

En particulier, f est du signe de $a_p (x - x_0)^p$ au voisinage de x_0.

VII.3. DL et parité

Proposition 10.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage (éventuellement épointé) de x_0.

Supposons que f possède un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$.

f paire	$\Rightarrow$	*la partie régulière du $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ ne contient que des monômes de degré pair*

f impaire	$\Rightarrow$	*la partie régulière du $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ ne contient que des monômes de degré impair*

VII.4. DL et régularité

Proposition 11.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0. En particulier, f est définie en x_0.

$$\boxed{f \text{ continue en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ possède un } \mathrm{DL}_1(0)x_0}$$

Lorsque c'est le cas : $\boxed{f(x) = f(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(1)}$

Proposition 12.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0. En particulier, f est définie en x_0.

$$\boxed{f \text{ dérivable en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ possède un } \mathrm{DL}_1(1)x_0}$$

Lorsque c'est le cas : $\boxed{f(x) = f(x_0)f'(x_0)\,(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)}$

⚠ Si $n \geqslant 2$, une fonction peut admettre un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ sans pour autant être 2 fois dérivable en x_0.
C'est le cas par exemple de la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x + x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

VII.5. DL et primitives

Proposition 13.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que f' possède un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$:

$$f'(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^n\big)$$

Alors f possède un $\mathrm{DL}_1(n+1)x_0$ donné par :

$$\boxed{f(x) \;=\; f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_k\,\frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1} + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^{n+1}\big)}$$

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer :

1 le $\mathrm{DL}_1(n)0$ de $x \mapsto \ln(1+x)$,

2 le $\mathrm{DL}_1(2n+1)0$ de $x \mapsto \arctan(x)$.

VII.6. Formule de Taylor-Young

Théorème 25. (Formule de Taylor-Young)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. *Soit* $x_0 \in I$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f \text{ possède un } \mathrm{DL}_1(n)x_0}$$

Lorsque c'est le cas :

$$\boxed{f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \underset{x \to x_0}{o}\big((x-x_0)^n\big)}$$

Démonstration.
Récurrence à faire. □

Remarque

- Ce résultat est avant tout un résultat d'existence de $\mathrm{DL}_1(n)x_0$. En pratique, on calcule très rarement les dérivées successives pour déterminer un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$.
- Pour résumer, on a le tableau suivant :

Continuité	$\Leftrightarrow$	Existence d'un $\mathrm{DL}_1(0)$
Dérivabilité	$\Leftrightarrow$	Existence d'un $\mathrm{DL}_1(1)$
Classe $\mathcal{C}^n$	$\Rightarrow$	Existence d'un $\mathrm{DL}_1(n)$

Exercice 8
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer :

1. le $\mathrm{DL}_1(n)0$ de exp,

2. le $\mathrm{DL}_1(2n)0$ de ch,

3. le $\mathrm{DL}_1(2n+1)0$ de sin,

4. le $\mathrm{DL}_1(3)0$ de tan.

VII.7. DL et dérivation

Proposition 14.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. *Soit* $x_0 \in I$.

Supposons : $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Alors f *admet un* $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ *et* f' *admet une* $\mathrm{DL}_1(n-1)x_0$ *et :*

$$\boxed{f'(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \underset{x \to x_0}{o}\big((x-x_0)^{n-1}\big)}$$

- On ne peut pas toujours dériver un développement limité.
- Cependant, on peut dériver un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ de f, si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Exercice 9
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un $\mathrm{DL}_1(n)0$ de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

VII.8. DL classiques

cf poly

VII.9. Opérations sur les DL

VII.9.a) Remarque préliminaire

Remarque
On demandera souvent de déterminer le DL d'une fonction à un certain ordre. Une des difficultés majeures est de prévoir les ordres auxquels il faut développer chaque élément de l'expression dont on veut un DL :

- si on effectue de DL trop poussés, on obtiendra un DL final à un ordre supérieur à celui attendu. On toujours effectuer une troncature, mais beaucoup de calculs (souvent fastidieux) auront été faits pour rien,
- si on ne pousse pas assez loin les DL intermédiaires, on n'obtiendra pas la précision souhaitée, et il faut recommencer **tous** les calculs.

Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que f admette le $\text{DL}_1(n)x_0$ suivant :

$$f(x) \;=\; a_0 + a_1\,(x-x_0) + \cdots + a_n\,(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^n\big)$$

On note p le plus petit entier tel que : $a_p \neq 0$ (s'il existe).
On appelle **forme normalisée** du $\text{DL}_1(n)x_0$ de f l'écriture :

$$\boxed{f(x) \;=\; (x-x_0)^p\left(a_p + a_{p+1}\,(x-x_0) + \cdots + a_n\,(x-x_0)^{n-p} + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^{n-p}\big)\right)}$$

On appelle $a_p\,(x-x_0)^p$ la partie principale du $\text{DL}_1(n)x_0$ de f.

Remarque
On peut également écrire la forme normalisée du $\text{DL}_1(n)x_0$ de f de la manière suivante :

$$\boxed{f(x_0+h) \;=\; h^p\left(a_p + a_{p+1}\,h + \cdots + a_n\,h^{n-p} + \underset{h\to 0}{o}(h^{n-p})\right)}$$

Exemple
Si l'on souhaite obtenir un $\text{DL}_1(4)0$ de $x \mapsto \big(\cos(x)-1\big)\ln(1+x)$, on remarque :

$$\begin{aligned}\cos(x)-1 &= -\frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\\ \ln(1+x) &= x + \underset{x\to 0}{o}(x)\end{aligned}$$

Ainsi :

- la partie principale du $\text{DL}_1(2)0$ de $x \mapsto \cos(x)-1$ est d'ordre 2 (il s'agit de : $-\frac{1}{2}\,x^2$),
- la partie principale du $\text{DL}_1(1)0$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ est d'ordre 1 (il s'agit de : x),

La partie principale du DL de $x \mapsto \big(\cos(x)-1\big)\ln(1+x)$ est donc d'ordre 3. Pour en obtenir un DL à l'ordre $4 = 3+1$, il suffit alors de pousser le DL de $x \mapsto \cos(x)-1$ à l'ordre $2+1=3$ et celui de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre $1+1=2$.

$$\begin{aligned}\big(\cos(x)-1\big)\ln(1+x) &= \left(-\frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\\ &= x^3\left(-\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)\\ &= x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)\\ &= -\frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\end{aligned}$$

VII.9.b) Combinaison linéaire

Proposition 15.

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que f et g admettent un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \,(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right) \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{n} b_k \,(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right) \end{aligned}$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Alors $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ admet un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ et :

$$\boxed{(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda\, a_k + \mu\, b_k)\,(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)}$$

VII.9.c) Produit

Proposition 16.

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que f et g admettent un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \,(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right) \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{n} b_k \,(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right) \end{aligned}$$

Alors $f \times g$ admet une $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ et :

$$\boxed{(f \times g)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}\right)(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)}$$

Exemple

Déterminons un $\mathrm{DL}_1(3)0$ de $x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$.

- On connaît tout d'abord les $\mathrm{DL}_1()0$ suivants :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^x \sin(x) \\ =\; & \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\ =\; & x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ =\; & x\left(1 + x + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ =\; & x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu un $\mathrm{DL}_1(3)$ comme produit d'un $\mathrm{DL}_1(3)$ et d'un $\mathrm{DL}_1(2)$. Comme détaillé en Section VII.9.a) ce phénomène apparaît dès que l'ordre de l'une des parties principales est non nul.
Avant de calculer le $\mathrm{DL}_1()$ d'un produit, on prendra donc soin de calculer les ordres auxquels il faudra effectuer le $\mathrm{DL}_1()$ de chaque terme.

Exercice 10

Déterminer un $\mathrm{DL}_1(2)0$ de $x \mapsto \mathrm{e}^x \cos(x)$.

VII.9.d) Inverse et quotient

Proposition 17.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que f admette un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$.

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^n\big)$$

Supposons : $a_0 \neq 0$.

Alors :

a) *la fonction f ne s'annule pas au voisinage de x_0,*

b) *la fonction $\dfrac{1}{f}$ admet un $\mathrm{DL}_1(n)x_0$.*

Exercice 11

Déterminer un $\mathrm{DL}_1(4)0$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$.

Remarque

Pour obtenir le $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ d'un quotient $\dfrac{f}{g}$:

1) on commence par déterminer le $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ de $\dfrac{1}{g}$,

2) on effectue ensuite le **produit** de ce DL par le $\mathrm{DL}_1(n)x_0$ de f.

Exercice 12

Déterminer un $\mathrm{DL}_1(5)0$ de tan.

VII.10. DL et propriétés locales

VII.10.a) Position relative d'une courbe et de sa tangente

MÉTHODO **Position relative d'une courbe et sa tangente**

Pour déterminer la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point x_0, il suffit de calculer la partie principale de :

$$f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)\big)$$

Supposons qu'il existe $\alpha \neq 0$ et $p \in [\![2, +\infty[\![$ tels que :

$$f(x) \ = \ f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \alpha\,(x-x_0)^p + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^p\big)$$

Alors :

$$f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)\big) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha\,(x-x_0)^p$$

Deux cas se présentent.

- si p est pair, deux nouveaux cas se présentent :
  - × si $\alpha > 0$, alors la courbe représentative de f est située au-dessus de sa tangente au voisinage de x_0.
  - × si $\alpha < 0$, alors la courbe représentative de f est située au-dessus de sa tangente au voisinage de x_0.
- si p impair, la courbe représentative de f traverse sa tangente en x_0. Cette courbe admet un point d'inflexion en x_0.

Exercice 13

On note f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.

VII.10.b) Extrema locaux

Proposition 18.

Soit I un intervalle. Soit $x_0 \in \mathring{I}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Supposons que f est :

× *deux fois dérivable sur I,*

× *telle que : $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$.*

Alors f admet un extremum local en x_0. Plus précisément :

$f''(x_0) < 0$	$\Leftrightarrow$	*f admet un maximum local en x_0*
$f''(x_0) > 0$	$\Leftrightarrow$	*f admet un minimum local en x_0*

⚠ On prendra bien garde au fait que ce résultat est valable seulement si x_0 est un **point critique** de f (*i.e.* si : $f'(x_0) = 0$).

VII.10.c) Asymptotes

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{I}$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \alpha\, x + \beta$.

On dit que la droite $\mathcal{D}$ est **asymptote** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en x_0 si :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - (\alpha\, x + \beta)\big) = 0}$$

Remarque

- La droite $\mathcal{D}$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$ si la distance entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ tend vers 0 en x_0.
- Cela revient à dire que f admet un développement **asymptotique** en x_0 de la forme :
$$f(x) \ = \ \alpha\, x + \beta + \underset{x \to x_0}{o}(1)$$
Ce développement asymptotique peut éventuellement s'obtenir grâce à des développements limités.

Exercice 14

On note f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (x+1)\, \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

Déterminer une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

`MÉTHODO` **Recherche d'asymptote**

Pour trouver quelle droite $\mathcal{D}$ est asymptote à une courbe $\mathcal{C}_f$ en x_0, on cherche deux réels α et β tels que :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \big(f(x) - \alpha\, x\big) = \beta}$$

`MÉTHODO` **Position relative d'une courbe et son asymptote**

Pour connaître la position relative d'une courbe $\mathcal{C}_f$ et d'une droite $\mathcal{D}$, il suffit d'étudier le signe de la fonction :

$$d : x \mapsto f(x) - (\alpha\, x + \beta)$$

L'utilisation de développements limités peut être utile pour prolonger le développement asymptotique et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$ au voisinage de x_0.