

CH XIII : Calcul différentiel et analyse asymptotique

I. Dérivabilité en un point

Dans la suite, on notera $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et on notera x_0 un point de I .

I.1. Définitions / taux d'accroissement

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

On appelle **taux d'accroissement** de f en x_0 la fonction :

$$\tau_{x_0}(f) : \begin{cases} I \setminus \{x_0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

Interprétation physique

Un taux d'accroissement peut être pensé comme une **vitesse moyenne** : la quantité $f(x) - f(x_0)$ représente un déplacement effectué sur un laps de temps $x - x_0$.

- La vitesse moyenne de déplacement d'une voiture entre deux moments t_1 et t_2 , est définie par un taux d'accroissement :

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{km(t_2) - km(t_1)}{t_2 - t_1}$$

où $km(t)$ désigne le nombre de kilomètres effectués à la date t .

Sauf à considérer que l'on peut effectuer des kilomètres négatifs (en marche arrière par exemple), cette vitesse moyenne est toujours positive.

- On peut aussi citer le taux d'accroissement d'une population :

$$\text{Accroissement démographique} = \frac{pop(t_2) - pop(t_1)}{t_2 - t_1}$$

où $pop(t)$ désigne la taille de la population à la date t .

Notez que l'on peut avoir un taux d'accroissement négatif : cela signifie que la population a diminué.

- On considère le déplacement d'un alpiniste en repérant son altitude. Sa vitesse moyenne de déplacement vertical est alors définie par :

$$\text{Vitesse moyenne verticale} = \frac{alt(t_2) - alt(t_1)}{t_2 - t_1}$$

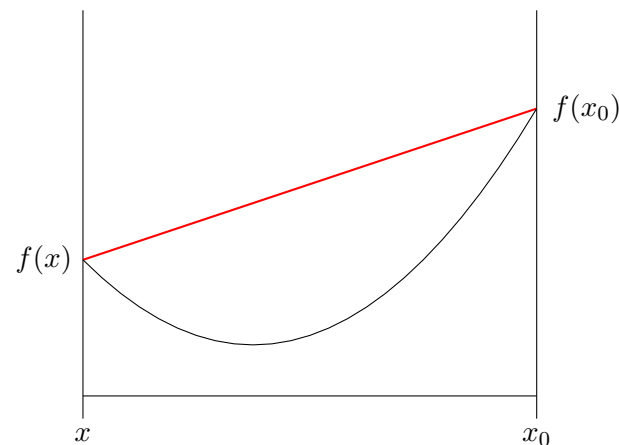
où $alt(t)$ désigne l'altitude de l'alpiniste à la date t .

Lorsque cette vitesse moyenne est négative, cela signifie qu'entre les temps t_1 et t_2 , l'alpiniste a globalement descendu.

Au contraire, si elle est positive c'est qu'il a globalement monté.

Interprétation graphique

Notons $M(x, f(x))$ et $M_0(x_0, f(x_0))$ points de la courbe représentative de f . Alors $\tau_{x_0}(f)(x)$ est la pente de la corde M_0M .



Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

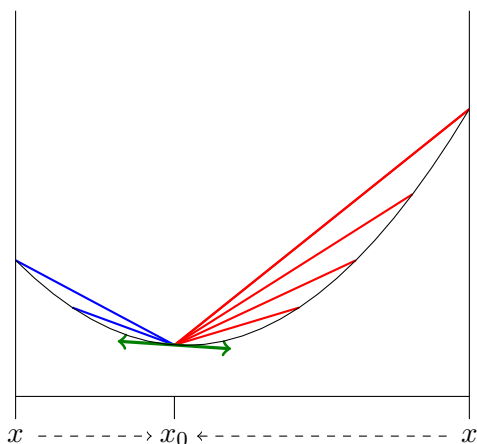
- On dit que f est **dérivable en** x_0 lorsque la fonction $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie en x_0 .
- Lorsque cette limite existe, elle est appelée **nombre dérivé de f en x_0** et est noté $f'(x_0)$. Autrement dit :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Interprétation physique

- Le taux d'accroissement s'interprétant comme une vitesse moyenne, sa limite en un point s'interprète comme une vitesse instantanée.
- Par exemple, si une voiture a effectué 200 km en 2H, c'est qu'elle a roulé en moyenne à 100 km/H. Mais elle a pu effectuer des pointes à 130 km/H.

Interprétation graphique



Remarque

- Si f est dérivable en x_0 , en effectuant le changement de variable $h = x - x_0$, on obtient :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(c'est une définition équivalente)

- Dire qu'une fonction f est dérivable en x_0 c'est dire que la fonction taux d'accroissement $\tau_{x_0}(f)$ est continue en x_0 (on peut alors prolonger cette fonction par continuité en posant $\tau_{x_0}(f)(x_0) = f'(x_0)$).

Exemple

- Si f est constante sur I , alors f est dérivable en tout point x_0 de I et $f'(x_0) = 0$. En effet, si $x_0 \in I$ et $x \neq x_0$, on a :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

- La fonction $x \mapsto x$ est dérivable pour tout x_0 de \mathbb{R} et $f'(x_0) = 1$. En effet, si $x_0 \in I$ et $x \neq x_0$, on a :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$$

- La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable pour tout x_0 de \mathbb{R} et $f'(x_0) = 2x_0$. En effet, si $x_0 \in I$ et $x \neq x_0$, on a :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 2x_0$$

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable pour tout x_0 de \mathbb{R}^{+*} et $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. En effet, si $x_0 \in I$ et $x \neq x_0$, on a :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

(mais elle n'est pas dérivable en 0)

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 lorsque $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie à gauche en x_0 . Cette limite est alors notée $f'_g(x_0)$.

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- On dit que f est **dérivable à droite** en x_0 lorsque $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie à droite en x_0 . Cette limite est alors notée $f'_d(x_0)$.

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Théorème 1.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.

(x_0 n'est pas une extrémité de I : c'est un point intérieur à I)

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Leftrightarrow f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \text{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

Démonstration.

La démonstration est une conséquence directe de l'énoncé analogue sur la continuité (cf CH10).

f est dérivable en x_0

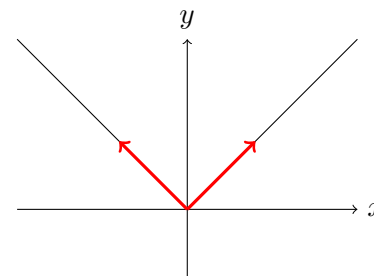
$$\Leftrightarrow \tau_{x_0}(f) \text{ est continue en } x_0$$

$$\Leftrightarrow \tau_{x_0}(f) \text{ est continue à gauche et à droite en } x_0, \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \tau_{x_0}(f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \tau_{x_0}(f)(x)$$

$$\Leftrightarrow f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \text{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0) \quad \square$$

Exemple

- Cet énoncé est adapté aux fonctions qui sont définies par cas.
- La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 car $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.



- La fonction $x \mapsto [x]$ n'est pas dérivable en les points $x_0 \in \mathbb{Z}$. Elle n'est déjà pas continue en ces points! (cf théorème ci-dessous)
- La fonction $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est dérivable ni à droite, ni à gauche en 0.

I.2. Propriétés des fonctions dérivables en un point**Théorème 2.**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ est continue en } x_0$$

Démonstration.

Supposons que f est dérivable en $x_0 \in I$ et soit $x \neq x_0$.

$$\text{Par définition, on a : } \tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\text{Ainsi : } f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \tau_{x_0}(f)(x).$$

On en déduit que f est continue en x_0 car somme de :

× $x \mapsto f(x_0)$ continue en x_0 car constante.

× $x \mapsto (x - x_0) \tau_{x_0}(f)(x)$ continue en x_0 car produit de :

(i) $x \mapsto x - x_0$ continue en x_0 car polynomiale,

(ii) $x \mapsto \tau_{x_0}(f)(x)$ continue en x_0 car f est dérivable en x_0 . □

Remarque

La réciproque est fautive. Contre-exemples à cette réciproque :

- La fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais pas dérivable en 0.
- Les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ($n > 1$) continues en 0 mais pas dérivables en 0.

Théorème 3.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.

(x_0 n'est pas une extrémité de I : c'est un point intérieur à I)

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est dérivable en } x_0 \\ f \text{ admet un extremum local en } x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Démonstration.

Supposons que f admet un maximum local en x_0 .

Par définition, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], f(x) \leq f(x_0)$.

- Pour tout $x \in]x_0, x_0 + \alpha]$, on a : $x - x_0 > 0$.

$$\text{On en déduit que : } \tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Comme f est dérivable en x_0 , $\tau_{x_0}(f)(x)$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow x_0$ qui est égale ici à $f'_d(x_0)$ (on a considéré seulement les $x > x_0$).

Par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient donc : $f'_d(x_0) \leq 0$.

- On démontre de même que : $f'_g(x_0) \geq 0$ ($x < x_0$ et toujours $f(x) \leq f(x_0)$).

Enfin, comme f est dérivable en x_0 , on obtient :

$$0 \leq f'_g(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0) \leq 0$$

On en déduit que $f'(x_0) = 0$. \square

Interprétation physique

Reprenons l'exemple de l'alpiniste. Son altitude maximale est atteinte au sommet de la montagne qu'il gravit. Une fois en haut, sa vitesse instantanée est nulle : il ne monte ni ne descend.

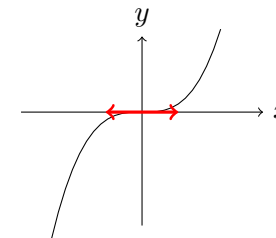
Remarque

- L'hypothèse x_0 point intérieur est importante.

Considérons par exemple la fonction $x \mapsto x$ sur $[0, 1]$. Cette fonction admet un minimum en 0 ($= 0$) mais $f'(0) = 1$.

- La réciproque est fautive.

Le contre exemple classique est la fonction $x \mapsto x^3$ qui est de dérivée nulle en 0 mais qui n'atteint pas de maximum (resp. minimum) en ce point.

**I.3. Développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point****I.3.a) DL_{x₀}() et approximation affine de f en x_0** **Définition DL_{x₀}()**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 .

- On dit que f possède un **développement limité d'ordre 1 en x_0** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

ou encore :

$$f(x) = a + b(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$$

Remarque

- Si f admet un DL_{x₀}() alors on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - (a + b(x - x_0)) = 0$.
Ainsi, les courbes représentatives de f et de la droite d'équation $y = a + b(x - x_0)$ ont tendance à se confondre à proximité de x_0 .
- C'est pourquoi on dit que la droite d'équation $y = a + b(x - x_0)$ est une **approximation affine** de f en x_0 .
 \Leftrightarrow c'est la droite qui représente le mieux la fonction f au voisinage de x_0 .

Théorème 4.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Leftrightarrow f \text{ admet un développement limité d'ordre 1 en } x_0$$

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\begin{cases} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \end{cases}$

Ainsi, si f est dérivable en x_0 , il existe $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tq au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$$

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons f dérivable en x_0 .

$$\text{Notons } \varepsilon(x) = \begin{cases} \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c'est le ε donné par la formule finale)

On a alors $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ et de plus, pour tout $x \neq x_0$:

$$\varepsilon(x) = \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0)$$

$$\text{donc } \varepsilon(x) + f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{et } f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Cette formule est aussi valable pour $x = x_0$. Au final, on a bien :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

(\Leftarrow) Si f possède un développement limité d'ordre 1 alors :

× $a = f(x_0)$ (le développement est vérifié en x_0 !)

$$\times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b + \varepsilon(x)$$

On en conclut que $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow x_0$. \square

Remarque

D'après ce théorème, il y a unicité (lorsqu'il existe) du développement limité de f d'ordre 1 en x_0 .

I.3.b) Tangente de f en x_0 **Définition**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

• Si f est dérivable en x_0 , on appelle **tangente de f en x_0** la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'(x_0)$.

• Autrement dit, c'est la droite d'équation : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Remarque

Il arrive parfois que la fonction f possède une dérivée à gauche et à droite en x_0 sans pour autant être dérivable en x_0 . Plus précisément, c'est le cas lorsque $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$. On introduit alors les notions suivantes.

• La demi-tangente à gauche de f en x_0 est la droite d'équation : $y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$.

• La demi-tangente à droite de f en x_0 est la droite d'équation : $y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$.

Définition (Tangente de la forme $x = x_0$)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Supposons que :

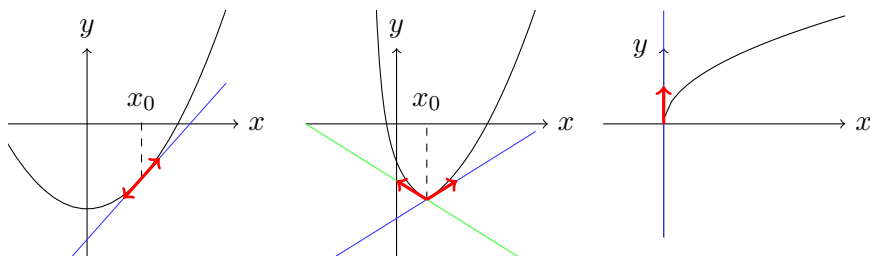
× f est continue en x_0

× $\lim_{x \rightarrow x_0} \tau_{x_0}(f)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) (f est donc non dérivable en x_0)

• On appelle **tangente verticale de f en x_0** la droite verticale passant par le point $(x_0, f(x_0))$.

• Autrement dit, c'est la droite d'équation $x = x_0$.

Représentation graphique



Tangente

Demi-tangentes

Tangente verticale

I.3.c) $DL_{x_0}()$ et négligeabilité / équivalence

Dans l'écriture du $DL_{x_0}()$ de f , on a introduit l'écriture $(x - x_0)\varepsilon(x)$ où la fonction ε est telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- La fonction $x \mapsto (x - x_0)\varepsilon(x)$ est négligeable devant $x \mapsto (x - x_0)$ en x_0 .
En effet :

$$\frac{\cancel{(x - x_0)}\varepsilon(x)}{\cancel{x - x_0}} = \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

- C'est une écriture générique d'une fonction négligeable devant $x \mapsto (x - x_0)$ en x_0 . Cette écriture étant un peu lourde, on utilisera généralement la notation $o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$.

Notation

Rappelons la notation introduite au CH8.

- $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$ si f est négligeable devant $x \mapsto x - x_0$ i.e. si :

$$\frac{f(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

- $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x))$ si f est négligeable devant la fonction g i.e. si :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

Ainsi, si f est dérivable en x_0 , son $DL_{x_0}()$ s'écrit sous la forme :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$$

Exemple

Avec cette notation, au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1 + x) = x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

$$e^x = 1 + x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

Remarque

- Il est à noter que le premier terme non nul de ces développements fournit un équivalent de la fonction considérée.

On retrouve ainsi : $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ (i.e. $\frac{\ln(1 + x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$).

(ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que $y = \ln(1 + x)$ peut-être confondue avec sa tangente $y = x$ à proximité de 0)

- D'autre part, on a aussi : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$.

(ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que $y = e^x$ peut-être confondue avec sa tangente $y = 1 + x$ à proximité de 0)

- Enfin, on peut aussi écrire que : $e^x - 1 = x + o_{x \rightarrow 0}(x)$.

On retrouve alors : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ (i.e. $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$).

(ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que $y = e^x - 1$ peut-être confondue avec sa tangente $y = x$ à proximité de 0)

II. Dérivabilité globale

II.1. Notion de fonction dérivable sur un ensemble

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- La fonction f est dite **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I . On appelle alors **fonction dérivée** et on note f' la fonction suivante.

$$f' : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$$

- Une fonction est dite dérivable sur une réunion finie d'intervalles D si elle est dérivable sur chacun des intervalles composant D .
(la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$: en effet, elle est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.)

II.2. Opérations sur les fonctions dérivables

II.2.a) Dérivabilité et opérations algébriques

Théorème 5.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supposons que f et g sont dérivables sur I .

Alors les fonctions $f + g$, λf , $f \times g$ sont dérivables sur I . De plus :

$$1) \quad (f + g)' = f' + g'$$

$$2) \quad (\lambda f)' = \lambda f'$$

$$3) \quad (f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

Démonstration.

Soient $x_0 \in I$ et $x \in I$ tel que $x \neq x_0$.

1) Dans le cas de la somme, on a :

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(f + g)(x) &= \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \tau_{x_0}(f)(x) + \tau_{x_0}(g)(x) \\ &\quad \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{0} \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{0} \end{array} \\ f'(x_0) & \quad g'(x_0) \end{array} \end{aligned}$$

2) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(\lambda f)(x) &= \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0} = \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lambda \tau_{x_0}(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda f'(x_0) \end{aligned}$$

3) Pour le cas du produit, on a :

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(f \times g)(x) &= \frac{(f \times g)(x) - (f \times g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0)) \times g(x) + (g(x) - g(x_0)) \times f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \tau_{x_0}(f)(x) \times g(x) + f(x_0) \times \tau_{x_0}(g)(x) \\ &\quad \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{0} \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{0} \end{array} \\ f'(x_0) \times g(x_0) & \quad f(x_0) \times g'(x_0) \end{array} \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 6.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Supposons que f et g sont dérivables sur I .

Supposons de plus que g ne s'annule pas sur I .

Alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I . De plus :

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

Démonstration.

Soient $x_0 \in I$ et $x \in I$ tel que $x \neq x_0$.

1) Pour le cas de l'inverse :

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(f)(x) &= \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \times \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\ &\quad \begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ -g'(x_0) & & \frac{1}{(g(x_0))^2} \end{array} \end{aligned}$$

2) Le cas du produit se déduit des cas du produit et de l'inverse. □

Théorème 7.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Supposons que f est dérivable sur I .

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\left\{ \begin{array}{l} f^k \text{ est dérivable sur } I \\ \boxed{(f^k)' = k f^{k-1} \times f'} \end{array} \right.$

Démonstration.

Par récurrence en écrivant $f^{k+1} = f \times f^k$.

Application

- Les fonctions constantes sont dérivables sur \mathbb{R} (de dérivée nulle).
- $x \mapsto x$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée la fonction constante $x \mapsto 1$.
- Par le théorème précédent (puissances), $x \mapsto x^k$ est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $x \mapsto k x^{k-1}$.
- Au final : toutes les fonctions polynomiales sont dérivables sur \mathbb{R} (car obtenues comme sommes et produits par un réel / par une fonction).
- Les fonctions rationnelles *i.e.* de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ sont dérivables sur tout intervalle I sur lequel Q ne s'annule pas.

II.2.b) Dérivabilité des fonctions composées

Théorème 8.

Soient $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $g(I) \subset J$.

Supposons g est dérivable sur I et que h est dérivable sur J .

Alors $h \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $\boxed{(h \circ g)' = (h' \circ g) \times g'}$

Démonstration.

Soient $x_0 \in I$ et $x \in I$ tel que $x \neq x_0$.

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(h \circ g)(x) &= \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \tau_{g(x_0)}(h)(g(x)) \times \tau_{x_0}(g)(x) \end{aligned}$$

On note alors $y_0 = g(x_0)$. En effectuant le changement de variable $y = g(x)$ ($x \rightarrow x_0 \Rightarrow y \rightarrow g(x_0) = y_0$), on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tau_{y_0}(h)(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} \tau_{y_0}(h)(y) = h'(y_0) = h'(g(x_0))$$

Dans cette démo, on a choisi x tel que $g(x) \neq g(x_0)$.

Pour trouver un tel x , il faut que g ne soit pas constante au voisinage de x_0 .

Si g est constante, on a $g' = 0$ et la formule est encore vérifiée ($h \circ g$ est aussi constante) □

Proposition 1.

Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Supposons que g est dérivable sur I .

a) La fonction e^g est dérivable sur I et $(e^g)' = e^g \times g'$

b) Si de plus g est strictement positive sur I , on a :

(i) \sqrt{g} est dérivable sur I et (ii) $\ln g$ est dérivable sur I et

$$(\sqrt{g})' = \frac{g'}{2\sqrt{g}}$$

$$(\ln g)' = \frac{g'}{g}$$

Exemple

Calcul de la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$.

• f est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[$.

En effet, la quantité $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ est définie dès que $g(x) = \frac{x+2}{x-1} \geq 0$.

Il suffit alors de noter que $g(x)$ a même signe que la quantité $(x+2)(x-1)$.

• f est dérivable sur $D = \mathcal{D}_f \setminus \{-2\}$. En effet, f est la composée de :

× $g : x \mapsto \frac{x+2}{x-1}$ dérivable (notamment) sur D .

De plus, $g(D) \subset]0, +\infty[$.

× $h : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$.

• On a alors, pour tout $x \in D =]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \times g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}} \times \frac{(x-1) - (x+2)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}} \times \frac{-3}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Application : dérivabilité de l'élevation à la puissance quelconque

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$ (par définition).

• Cette fonction est définie pour tout $x > 0$. Autrement dit : $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.

• La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car est la composée de :

× $g : x \mapsto a \ln x$ dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, $g(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.

× $h : x \mapsto e^x$ dérivable sur \mathbb{R} .

Pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = \frac{a}{x} x^a = x^{a-1}$.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, +\infty[, \quad (x^a)' = a x^{a-1}$$

II.2.c) Dérivabilité des fonctions réciproques**Théorème 9.**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (où I est un intervalle).

Supposons que f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Supposons que f est dérivable sur I .

Supposons que f' ne s'annule pas sur I .

Alors $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est dérivable sur $f(I)$, et : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Démonstration.

Soit $y_0 \in f(I)$. Il existe donc $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$.

Pour tout $y \in f(I)$ tel que $y \neq y_0$:

$$\tau_{y_0}(f^{-1})(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}$$

Comme la fonction f^{-1} est continue, en posant le changement de variable $x = f^{-1}(y)$ ($y \rightarrow y_0 \Rightarrow x \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$), on obtient :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

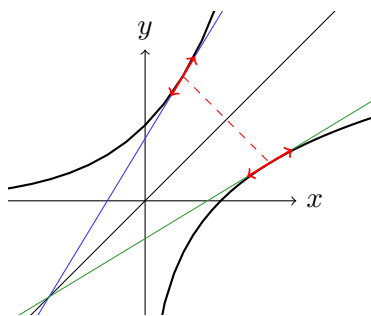
Et comme $f'(x_0) \neq 0$, $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$. \square

Remarque

- L'hypothèse de bijectivité est généralement obtenue par le théorème de la bijection. On rappelle que si f est continue et strictement croissante sur I , alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
- On peut retrouver la formule du théorème via l'égalité $f \circ f^{-1} = \text{id}$. En effet, en dérivant formellement cette égalité, on obtient :

$$(f' \circ f^{-1}) \times (f^{-1})' = 1$$

Interprétation géométrique



- La formule : $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ signifie que le coefficient directeur de la tangente en y_0 de f^{-1} est l'inverse de la tangente en x_0 de f .
- Les tangentes de f^{-1} en y_0 et de f en x_0 sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$.

II.3. Dérivées successives

II.3.a) Définition

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

\square Supposons que f est dérivable sur I .

- On dit que f est **n fois dérivable** sur I si :

× f est $n - 1$ fois dérivable sur I ,

× $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I .

On note alors : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f est **indéfiniment dérivable** sur I si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I .



Même si les notations sont proches, il ne faut pas confondre :

× f^n qui est la puissance $n^{\text{ème}}$ de la fonction f ,

× $f^{(n)}$ qui est la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction f .

Remarque

Détaillons cette définition pour bien la comprendre.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

- Si $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est elle-même dérivable sur I , on peut considérer la dérivée de f' , appelée **dérivée seconde** de f et notée $(f')' = f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, on peut définir la **dérivée $n^{\text{ème}}$** de f comme suit.

0) $f^{(0)} = f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

1) Si f est dérivable sur I , on note $f^{(1)} = f' : I \rightarrow \mathbb{R}$,

\vdots

n) Si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I , on note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple

- Les fonctions polynomiales sont indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} .
- La fonction exp est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} .
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .
- On en déduit que la fonction ln est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .
- La fonction $f : x \mapsto x \sqrt{|x|}$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Démonstrons-le.

La fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* car est la composée de :

× $g : x \mapsto |x|$ dérivable sur \mathbb{R}^* . De plus, $g(\mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

× $h : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .

On en déduit que f est dérivable sur \mathbb{R}^* .

De plus, la fonction f est dérivable en 0. En effet :

$$\tau_0(f)(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x \sqrt{|x|}}{x} = \sqrt{|x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Enfn, pour $x \neq 0$, on a :

× si $x \geq 0$: $f(x) = x \sqrt{x}$ et $f'(x) = \sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$.

× si $x < 0$: $f(x) = x \sqrt{-x}$. On en déduit :

$$f'(x) = \sqrt{-x} - x \frac{1}{2\sqrt{-x}} = \sqrt{-x} + \frac{\sqrt{-x} \cancel{\sqrt{-x}}}{2 \cancel{\sqrt{-x}}} \sqrt{x} = \frac{3}{2} \sqrt{-x}$$

On obtient alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{|x|}$.

- La fonction $f' : x \mapsto \frac{3}{2} \sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable en 0. En effet :

$$\begin{aligned} \tau_0(f')(x) &= \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x)}{x} = \frac{\frac{3}{2} \sqrt{|x|}}{x} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{|x|}}{\text{sgn}(x) \sqrt{|x|} \sqrt{|x|}} \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty \quad (+\infty \text{ à droite et } -\infty \text{ à gauche}) \end{aligned}$$

On en déduit que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

II.3.b) Caractère C^n et C^∞ **Définition**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f est de **classe C^n sur I** si
 - × f est n fois dérivable sur I ,
 - × $f^{(n)}$ est continue sur I .
- Ainsi, on dit que f est de classe C^0 sur I si f est continue sur I .
- Enfin, on dit que f est de classe C^∞ sur I si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I .

Remarque

- Si f est de classe C^n , on dit aussi que f est **n fois continûment dérivable**. Il est à noter que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f^{(k)}$ est continue :
 - × si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f^{(k)}$ est continue car dérivable.
 - × $f^{(n)}$ est continue par définition.
- Notez que f est C^∞ signifie qu'elle est indéfiniment dérivable (ces deux notions coïncident).

Exemple

- Les fonctions polynomiales sont C^∞ sur \mathbb{R} .
- La fonction exp est C^∞ sur \mathbb{R} .
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est C^∞ sur \mathbb{R}^{+*} .
- On en déduit que la fonction ln est C^∞ sur \mathbb{R}^{+*} .
- La fonction $f : x \mapsto x \sqrt{|x|}$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Sa dérivée $f' : x \mapsto \frac{3}{2} \sqrt{|x|}$ est continue sur \mathbb{R} . Donc f est C^1 sur \mathbb{R} .

Par contre, f' n'est pas dérivable sur \mathbb{R} (car non dérivable en 0).

Ainsi f n'est pas C^2 sur \mathbb{R} .

Mais on peut montrer qu'elle est C^∞ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

II.3.c) Opérations algébriques sur les fonctions de classe C^n

Théorème 10.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que f et g sont n fois dérivables (resp. C^n/C^∞) sur I .

- Les fonctions $f + g$, λf , $f \times g$ sont n fois dérivables (resp. C^n/C^∞) sur I .
- Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors le quotient $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable (resp. C^n/C^∞) sur I .

De plus, si f et g sont n fois dérivables, on a les formules suivantes :

$$\mathbf{a)} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad (f + g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$$

$$\mathbf{b)} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad (\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$$

$$\mathbf{c)} \quad \text{Formule de Leibniz :} \quad (f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \times g^{(k)}$$

Démonstration.

Chacune de ces formules se démontre par récurrence (on prouve au passage le caractère dérivable). On laisse **a)** et **b)** en exercice.

Soient f et g deux fonctions C^∞ sur \mathbb{R} . Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : (f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

1) Initialisation :

$$(f \times g)^{(0)} = f \times g \text{ et } \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = f \times g.$$

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.

2) Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$(i.e. (f \times g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}).$$

Tout d'abord, remarquons que : $(f \times g)^{(n+1)} = ((f \times g)^{(n)})'$.
Or, par hypothèse de récurrence ($\mathcal{P}(n)$), on sait que :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} & (f \times g)^{(n+1)} \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} \times g^{(n-k)})' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + f^{(k)} \times g^{(n-k+1)}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-(k-1))} \right) + \binom{n}{n} f^{(n+1)} \times g^{(0)} \\ &+ \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + \binom{n}{0} f^{(0)} \times g^{(n+1)} \\ &= f^{(0)} g^{(n+1)} + \left(\sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + f^{(n+1)} g^{(0)} \\ &= f^{(0)} \times g^{(n+1)} + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + f^{(n+1)} \times g^{(0)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \end{aligned}$$

L'avant dernière ligne est obtenue grâce à la formule du triangle de Pascal.

La dernière est obtenue en remarquant que :

$$f^{(0)}g^{(n+1)} = \binom{n+1}{0} f^{(0)}g^{(n+1)} \text{ et } f^{(n+1)}g^{(0)} = \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}g^{(0)}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Ainsi, par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

Exemple

Déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $h : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$.

- Notons $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto e^x$.
- f est polynomiale donc C^∞ sur \mathbb{R} . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ et $f^{(3)}(x) = 0$ (d'où : $\forall k \geq 3, f^{(k)} = 0$).
- La fonction g est elle aussi C^∞ sur \mathbb{R} et pour tout $n \in \mathbb{N}, g^{(n)} = g$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On a alors :

$$\begin{aligned} (f \times g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} f^{(k)} \times g + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g \\ &= \binom{n}{0} f^{(0)} \times g + \binom{n}{1} f^{(1)} \times g + \binom{n}{2} f^{(2)} \times g \\ &= f \times g + n f' \times g + \frac{n(n-1)}{2} f'' \times g \\ &= (f + n f' + \frac{n(n-1)}{2} f'') \times g \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\times h^{(0)}(x) = h(x) = (x^2 + 1)e^x.$$

$$\times h^{(1)}(x) = h'(x) = (2x + (x^2 + 1))e^x = (x+1)^2 e^x.$$

$$\times \text{ pour tout } n \geq 2 : h^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1) + 1)e^x.$$

Théorème 11.

Soient $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $g(I) \subset J$.

Supposons que h est n fois dérivable (resp. C^n/C^∞) sur J .

Supposons que g est n fois dérivable (resp. C^n/C^∞) sur I .

□ Alors $h \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est n fois dérivable (resp. C^n/C^∞) sur I .

Démonstration.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : \left. \begin{array}{l} h : J \rightarrow \mathbb{R} \text{ est } C^n \text{ sur } J \\ g : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ est } C^n \text{ sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow h \circ g \text{ est } C^n \text{ sur } I.$

1) Initialisation :

Soient $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^0 sur J et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^0 sur I .

- $h \circ g$ est continue sur I car c'est la composée de :
 - × $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I et telle que $g(I) \subset J$,
 - × $h : J \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur J .

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.

2) Hérité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Soient $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} sur J et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} sur I .

- La fonction $h \circ g$ est dérivable sur I comme composée.
- De plus : $(h \circ g)' = (h' \circ g) \times g'$.
- Comme h est C^{n+1} sur J , alors h' est C^n sur J .
De plus, g C^n sur I (car C^{n+1} sur I).
On applique alors l'hypothèse de récurrence à h' et g .
On en déduit donc que : $h' \circ g$ est de classe C^n sur I .

Ainsi, $(h \circ g)'$ est C^n sur I par produit de fonctions C^n sur I .

Donc $h \circ g$ est C^{n+1} sur I . D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$. □

II.3.d) Dérivées $k^{\text{ème}}$ de fonctions classiques

Proposition 2.

1) Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto (x - a)^n$. Alors f est C^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \boxed{((x - a)^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n - k)!} (x - a)^{n - k}}$$

(on en déduit la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $x \mapsto x^n$ en prenant $a = 0$)

2) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x - a}$. Alors g est C^∞ sur $] -\infty, a[\cup]a, +\infty[$ et :

$$\forall k \geq 0, \quad \boxed{\left(\frac{1}{x - a}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(x - a)^{k+1}}$$

3) La fonction $x \mapsto \ln x$ est C^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall k \geq 1, \quad \boxed{(\ln x)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1} (k - 1)!}{x^k}}$$

(quelle est la dérivée de $x \mapsto \ln |x|$?)

4) La fonction $x \mapsto e^x$ est C^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall k \geq 0, \quad \boxed{(e^x)^{(k)} = e^x}$$

5) Soit $a > 0$. La fonction $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ est C^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall k \geq 0, \quad \boxed{(a^x)^{(k)} = (\ln a)^k a^x}$$

Démonstration.

Par récurrence!

On peut retrouver ces formules en généralisant depuis les petites valeurs.

3) Conséquence directe de 2).

4) Dérivée de exp peut s'obtenir comme dérivée de la réciproque de ln. \square

III. Les théorèmes de la dérivabilité sur un intervalle

III.1. Théorème de Rolle

Théorème 12.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ continue sur } [a, b] \\ \bullet f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ \bullet f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Démonstration.

- Tout d'abord, on sait qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi, $f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \min_{[a, b]} f = f(c_1)$ et $M = \max_{[a, b]} f = f(c_2)$

avec $c_1 \in [a, b]$ et $c_2 \in [a, b]$.

- Le but est alors de démontrer que l'un de ces deux extrema est atteint sur $]a, b[$. Si c'est le cas, on conclut par le théorème 3 que $f'(c) = 0$.

- On distingue alors deux cas :

1) Si $m = M$ alors pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M = m$.

Donc f est constante sur $[a, b]$.

Ainsi $f' = 0$ sur $]a, b[$ et tout $c \in]a, b[$ est tel que $f'(c) = 0$.

2) Si $m \neq M$, trois cas se présentent :

× soit $c_1 = a$: on démontre dans ce cas que $c_2 \in]a, b[$.

Comme $c_1 = a$, on a $m = f(c_1) = f(a)$. Rappelons que $M = f(c_2)$.

$c_2 \neq a$ (sinon $f(c_2) = f(a)$ et alors $M = f(a) = m$),

$c_2 \neq b$ (sinon $f(c_2) = f(b)$ et alors $M = f(b) = f(a) = m$).

Ainsi, $c_2 \in]a, b[$. Enfin, comme f est dérivable en $c_2 \in]a, b[$ et y atteint son maximum, on a $f'(c_2) = 0$.

- × soit $c_1 \in]a, b[$: comme f est dérivable en $c_1 \in]a, b[$ et y atteint son minimum, on a $f'(c_1) = 0$.
 - × soit $c_1 = b$: on démontre, comme dans le premier cas que $c_2 \in]a, b[$. Comme $c_1 = b$, on a $m = f(c_1) = f(b)$. Rappelons que $M = f(c_2)$.
 $c_2 \neq a$ (sinon $f(c_2) = f(a)$ et alors $M = f(a) = f(b) = m$),
 $c_2 \neq b$ (sinon $f(c_2) = f(b)$ et alors $M = f(b) = m$).
- Ainsi, $c_2 \in]a, b[$. Enfin, comme f est dérivable en $c_2 \in]a, b[$ et y atteint son maximum, on a $f'(c_2) = 0$.

□

Remarque

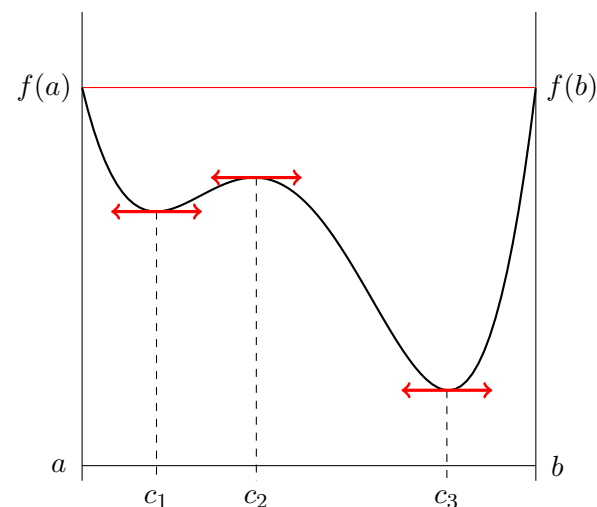
- L'hypothèse f dérivable sur $]a, b[$ (ouvert) est l'hypothèse minimale. Évidemment, le résultat reste vrai si f est dérivable sur $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$ puisque f est alors dérivable sur $]a, b[$.
- Par contre, l'hypothèse f continue sur $[a, b]$ (fermé) est fondamentale.
- Ces deux hypothèses de régularité peuvent être remplacées par l'hypothèse plus forte : f dérivable sur $[a, b]$.
(ces remarques sont aussi valables pour les énoncés qui suivent)

Autre formulation

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$ où I est un intervalle.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ dérivable sur un intervalle } I \\ \bullet f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Interprétation géométrique.



La courbe représentative de f possède (au moins) une tangente parallèle à l'axe des abscisses (et donc parallèle à la corde joignant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$).

Interprétation physique

Reprenons l'exemple de l'alpiniste.

Si son altitude au temps t_1 est celle au temps t_2 cela signifie :

- × soit qu'il a stagné durant cette période. Sa vitesse instantanée de déplacement verticale a donc été nulle à tout moment sur cette période.
- × soit qu'il est descendu vers un point plus bas puis est monté de nouveau. À ce point le plus bas, sa vitesse instantanée était nulle.

III.2. Théorème des accroissements finis

Théorème 13.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

<ul style="list-style-type: none"> • f continue sur $[a, b]$ • f dérivable sur $]a, b[$ 	<p>il existe $c \in]a, b[$ tel que</p> $\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------

Démonstration.

Il s'agit de comparer f à sa corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Cette corde a pour équation $y = g(x)$ où g est définie par :

$$g : x \mapsto f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Considérons alors la fonction $h = f - g$. Elle vérifie :

× h est continue sur $[a, b]$ (car f et g le sont),

× h est dérivable sur $]a, b[$ (car f et g le sont),

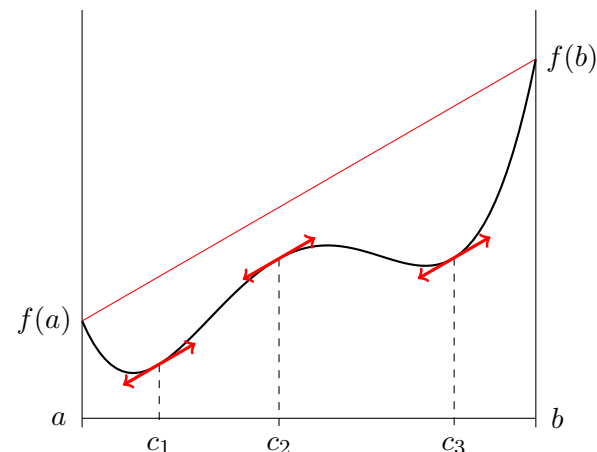
× $h(a) = f(a) - g(a) = 0 = f(b) - g(b) = h(b)$.

Ainsi, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

Or, pour tout $x \in]a, b[$, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Au point c , on a donc : $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Interprétation géométrique.



La courbe représentative de f possède (au moins) une tangente parallèle à sa corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Interprétation physique

Ce théorème compare taux d'accroissement et dérivée en un point.

- Reprenons l'exemple de la voiture : si elle a roulé en moyenne à 100 km/H entre deux instants a et b (elle a pu rouler à 50 km/H ou parfois à 130 km/H) elle a forcément eu, à un instant c une vitesse instantanée égale à 100 km/H.

□ Remarque

Le théorème de accroissements finis peut être vu comme une généralisation du théorème de Rolle. En effet, si on applique le TAF à une fonction vérifiant de plus $f(a) = f(b)$, on aboutit à la conclusion : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ pour un $c \in]a, b[$, ce qui démontre que $f'(c) = 0$.

III.3. Inégalité des accroissements finis

III.3.a) Lipschitzianité

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $K \geq 0$.

On dit que f est K -lipschitzienne sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K |x - y|$$

Remarque

La courbe représentative d'une fonction K -lipschitzienne possède donc des cordes de pentes toutes majorées par K en valeur absolue.

Exercice 1

Démontrer que :

a) la fonction $x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur \mathbb{R} .

b) la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est 1-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

Proposition 3.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $K \geq 0$.

$$f \text{ est } K\text{-lipschitzienne sur } I \Rightarrow f \text{ est continue sur } I$$

Démonstration.

À faire.

III.3.b) Inégalité des accroissements finis

Théorème 14.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ continue sur } [a, b] \\ \bullet f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ \bullet \text{ il existe } m \text{ et } M \text{ tels que} \\ \quad \forall u \in]a, b[, m \leq f'(u) \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

Démonstration.

D'après le TAF, il existe $c \in]a, b[$, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a alors : $m \leq f'(c) \leq M$, ce qui conclut cette démonstration. \square

Interprétation physique

- Si la fonction f est C^1 , alors f' est C^0 sur $[a, b]$.
On peut alors choisir $m = \min_{[a, b]} f'$ et $M = \max_{[a, b]} f'$.
- L'IAF stipule alors que la vitesse moyenne entre deux instants a et b est comprise entre la plus petite vitesse instantanée et la plus grande vitesse instantanée.

Formulation BIS

\square Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x, y) \in I^2$ où I est un intervalle.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ dérivable sur un intervalle } I \\ \bullet \text{ il existe } M \geq 0, \\ \quad \forall u \in I, |f'(u)| \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2, \\ |f(y) - f(x)| \leq M |y - x| \end{array}$$

Formulation TER

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ dérivable sur un intervalle } I \\ |f'| \text{ majorée par } M \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ est } M\text{-lipschitzienne}$$

Exercice 2

Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|\sin(x)| \leq |x|$$

Application à l'étude de suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème 15 (le redémontrer dans chaque exercice).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I intervalle.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Supposons que f est dérivable sur I .

Supposons qu'il existe $M \geq 0$ tel que : $\forall u \in I, |f'(u)| \leq M$.

Supposons que I est stable par f (i.e. $f(I) \subset I$).

Supposons que f admet un point fixe $\ell \in I$ (i.e. $f(\ell) = \ell$).

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n \in I}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{|u_{n+1} - \ell| \leq M |u_n - \ell|}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|}$

4) Si on sait de plus que $0 \leq M < 1$, alors (u_n) est convergente, de limite ℓ .

Démonstration.

1) Donnons l'idée de la récurrence : $u_0 \in I$ (initialisation). Si on sait que $u_n \in I$ pour un $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ car I est stable par f (hérédité).

2) D'après l'IAF, $|f(u_n) - f(\ell)| \leq M |u_n - \ell|$.
Il suffit alors de remarquer que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ell) = \ell$.

3) Donnons l'idée de la récurrence : $M^0 = 1$ donc l'étape d'initialisation est directe. Supposons que $|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Or, par la propriété précédente, on a :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq M |u_n - \ell| \leq M \times M^n |u_0 - \ell| = M^{n+1} |u_0 - \ell|$$

4) Si $0 \leq M < 1$, alors $M^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. On en déduit, par le théorème d'encadrement, que $u_n - \ell \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui équivaut à $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. \square

Exercice 3

On note (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

On pose $f : x \mapsto \sqrt{x + 1}$.

1. Montrer que $[0, 2]$ est stable par f et : $\forall x \in [0, 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2. Déterminer les points fixes de f . Notons r l'unique point fixe dans $[0, 2]$.

3. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$.

4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leq \frac{|u_n - r|}{2}$ puis $|u_n - r| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

5. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

6. Déterminer un entier N tel que $|u_N - r| \leq 10^{-9}$.

7. Écrire un programme **Python** donnant une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

III.4. Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 16. (Théorème de la limite de la dérivée)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

Soit $a \in I$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

Démonstration.

À faire.

Proposition 4.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

Soit $a \in I$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ (ℓ est **fini**).

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ dérivable en } a \text{ et : } f'(a) = \ell$$

MÉTHODO

Démontrer qu'une fonction est de classe \mathcal{C}^1

Pour montrer qu'une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I tout entier, on démontre que :

- × la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $I \setminus \{a\}$,
- × la fonction f est prolongeable par continuité en a (on note encore f le prolongement),
- × la fonction f' admet une limite finie ℓ en a .

On applique ensuite le théorème de la limite de la dérivée pour conclure que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

IV. Dérivation et sens de variation

IV.1. Caractérisation des fonctions monotones par le signe de la dérivée

Théorème 17.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (où I intervalle de \mathbb{R}).

- $$\begin{array}{ll} \text{a) } f \text{ est croissante sur } I & \Leftrightarrow f' \text{ est positive ou nulle sur } I \\ \text{b) } f \text{ est décroissante sur } I & \Leftrightarrow f' \text{ est négative ou nulle sur } I \\ \text{c) } f \text{ est constante sur } I & \Leftrightarrow f' \text{ est nulle sur } I \end{array}$$

□ Démonstration.

Soit f une fonction dérivable sur I .

a) (\Rightarrow) Supposons f croissante sur I . Soit $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$:

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

En effet, la croissance de f signifie que $f(x) - f(x_0)$ est du signe de $x - x_0$. f étant dérivable en x_0 , on obtient, par passage à la limite dans l'inégalité :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

(\Leftarrow) Réciproquement, supposons $f' \geq 0$ sur I .

Soient x et y deux éléments de I tels que $x \leq y$.

En appliquant le TAF à la fonction f dérivable sur $[x, y]$, on obtient :

$$\exists c \in]x, y[, f(y) - f(x) = \underbrace{(y - x)}_{\geq 0} \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \geq 0$$

Ainsi $f(y) \geq f(x)$.

b) Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction $g = -f$.

c) Il suffit de remarquer qu'une fonction constante est à la fois croissante et décroissante et que $f' = 0$ signifie que $f' \geq 0$ et $f' \leq 0$. □

Remarque

- L'hypothèse f dérivable sur I n'est pas l'hypothèse minimale.

On peut énoncer le théorème avec l'hypothèse suivante :

- \times f continue sur I ,
- \times f dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

Sous cette hypothèse, on a alors : f croissante sur $I \Leftrightarrow f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.

- Cette remarque reste vraie pour les résultats issus de ce théorème.

Théorème 18.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (où I intervalle de \mathbb{R}).

- a) f' strictement positive sur $I \Rightarrow f$ strictement croissante sur I
 b) f' strictement négative sur $I \Rightarrow f$ strictement décroissante sur I

Démonstration.

Même démonstration que la précédente : soient $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$.

En appliquant le TAF à la fonction f dérivable sur $[x, y]$, on obtient :

$$\exists c \in]x, y[, f(y) - f(x) = \underbrace{(y-x)}_{>0} \underbrace{f'(c)}_{>0} > 0 \quad \square$$

Remarque

- Il n'y a pas équivalence ! Pour s'en convaincre, on peut considérer la fonction $f : x \mapsto x^3$ qui est strictement positive sur \mathbb{R} .

Pourtant, $f' : x \mapsto 3x^2$ n'est pas strictement positive : $f'(0) = 0$.

- Si l'on reprend la démo précédente pour une fonction f strictement croissante, on obtient : $\tau_{x_0}(f)(x) > 0$. Mais cette inégalité stricte n'est pas respectée par passage à la limite : $f'(x_0) \geq 0$.

- Mais alors comment démontrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R} ?

(i) Revenir à la définition : soit x, y tels que $x < y$. Alors :

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2) = (y-x)\left(\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\right) > 0.$$

(ii) Utiliser le théorème suivant, plus précis.

Théorème 19.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (où I intervalle de \mathbb{R}).

- a) $f' \geq 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points $\Rightarrow f$ strictement croissante sur I
 b) $f' \leq 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points $\Rightarrow f$ strictement décroissante sur I

Démonstration.

- a) On note a_1, a_2, \dots, a_n ces points où f' s'annule.

Ainsi, f' est strictement positive sur chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$.

Il reste à montrer que la stricte croissance est préservée même si l'on change d'intervalle, ce que l'on démontre de proche en proche.

Soient $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ et $x \in]a_i, a_{i+1}[$, $y \in]a_{i+1}, a_{i+2}[$:

$$\begin{array}{ccc} f(x) < \sup_{]a_i, a_{i+1}[} f = \lim_{x \rightarrow a_{i+1}^-} f(x) = f(a_{i+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{(théorème limite monotone)} & & \text{(continuité de } f) \end{array}$$

De même, on a :

$$\begin{array}{ccc} f(y) < \inf_{]a_{i+1}, a_{i+2}[} f = \lim_{x \rightarrow a_{i+1}^+} f(x) = f(a_{i+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{(théorème limite monotone)} & & \text{(continuité de } f) \end{array}$$

On en déduit que $f(x) < f(a_{i+1}) < f(y)$. □

Application : tableau de variations.

- Par le théorème 18 et théorème 19 les flèches d'un tableau de variations signifient la stricte monotonie de la fonction considérée.
- Lorsque l'on étudie une fonction f telle que $f' \geq 0$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, il n'y a pas lieu de faire apparaître deux flèches de même type consécutives.

Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ a pour tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f	$-\infty$		$+\infty$

- La présence de deux flèches consécutives de même type est à réserver au cas où la fonction f n'est pas définie au point considéré.

On peut illustrer ce cas par la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{x}$ (de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x^2}$).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	
f	0	$+\infty$	$-\infty$

IV.2. Extremum local d'une fonction dérivable

Théorème 20.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (où I intervalle de \mathbb{R}).

Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.

f' s'annule en changeant de signe en $x_0 \in \overset{\circ}{I}$	\Rightarrow	f admet un extremum local en $x_0 \in \overset{\circ}{I}$
------------------------------------------------------------------------	---------------	----------------------------------------------------------------

Démonstration.

Supposons que f' s'annule en changeant de signe en x_0 .

Il existe donc $\alpha > 0$ tel que (par exemple) :

- × $f' \leq 0$ sur $[x_0 - \alpha, x_0]$.
La fonction f est donc décroissante sur $[x_0 - \alpha, x_0]$.
- × $f' \geq 0$ sur $]x_0, x_0 + \alpha]$.
La fonction f est donc croissante sur $]x_0, x_0 + \alpha]$.

Ainsi, elle admet un minimum en x_0 .

x	$x_0 - \alpha$	x_0	$x_0 + \alpha$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
f		$f(x_0)$	

□

Remarque

- Ce théorème peut être vu comme une réciproque du théorème 3 du début de chapitre (f admet un extremum local en $x_0 \in \overset{\circ}{I} \Rightarrow f'(x_0) = 0$).
- On rappelle que l'hypothèse x_0 point intérieur est importante.
On peut considérer $x \mapsto x$ sur $[0, 1]$: cette fonction admet un minimum en $0 (= 0)$ mais $f'(0) = 1$.

V. Fonctions convexes

V.1. Définition et premières caractérisations

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- La fonction f est dite **convexe** sur l'intervalle I si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x_1, x_2) \in I^2 \\ \forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2 \\ \text{tels que } t_1 + t_2 = 1, \end{array} \right\} f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2)$$

- De manière équivalente, f est **convexe** sur I si

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x_1, x_2) \in I^2 \\ \forall \lambda \in [0, 1] \end{array} \right\} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

- La fonction f est dite **concave** sur l'intervalle I si $-f$ est convexe sur I . Autrement dit, f est concave sur I si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x_1, x_2) \in I^2 \\ \forall \lambda \in [0, 1] \end{array} \right\} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

(permet de traduire les propriétés de convexité pour les fonctions concaves)

Remarque

- De manière générale, si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ avec $v > u$, alors

$$\{\lambda u + (1 - \lambda)v \mid \lambda \in [0, 1]\} = [u, v]$$

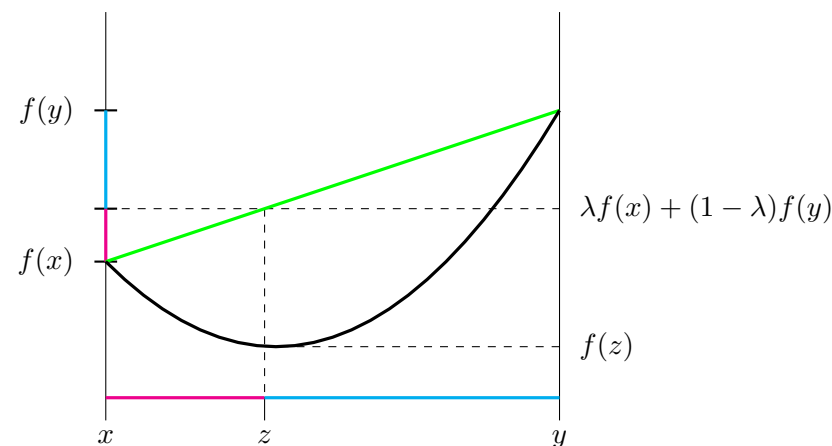
- Ceci se démontre facilement par double inclusion :

(\subseteq) Si $z = \lambda u + (1 - \lambda)v$ pour $\lambda \in [0, 1]$, alors $z \geq \lambda u + (1 - \lambda)u = u$ et $z \leq \lambda v + (1 - \lambda)u = v$.

(\supseteq) Si $z \in [u, v]$, il suffit de poser $\lambda = \frac{z - v}{u - v}$.

Interprétation graphique.

- L'inégalité de convexité correspond donc à comparer l'image par f d'un point de $[x_1, x_2]$ avec un point de $[f(x_1), f(x_2)]$.
- Plus précisément, cette inégalité signifie que si A et B sont deux points de la courbe représentative de f alors l'arc de courbe joignant A à B est situé en dessous de la corde de f joignant A à B .



Application

La notion de convexité fournit naturellement des inégalités.

Par exemple, la fonction \ln est concave sur \mathbb{R}^{+*} .

On en déduit que, sur $[1, e]$, elle est située au dessus de sa corde. Ainsi :

$$\forall x \in [1, e], \quad \ln(x) \geq \frac{x - 1}{e - 1}$$

Exemple

- Les fonctions constantes sont convexes sur \mathbb{R} .
- Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ sont convexes sur \mathbb{R} .
- La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbb{R} .

Proposition 5. (théorème des 3 pentes)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

a) f est convexe sur I si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y \\ \forall z \in]x, y[\end{array} \right\} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

b) f est convexe sur I si et seulement si :

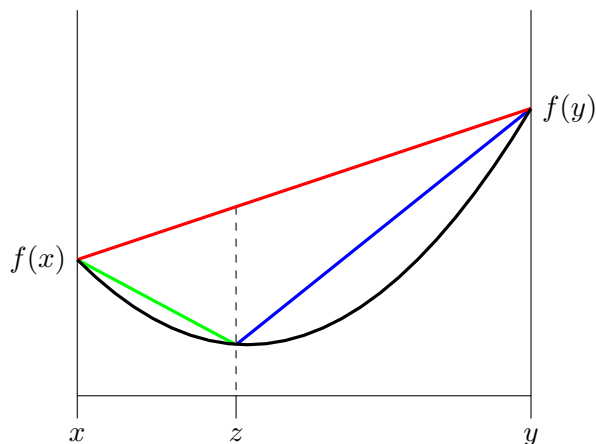
$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y \\ \forall z \in]x, y[\end{array} \right\} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

c) f est convexe sur I si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y \\ \forall z \in]x, y[\end{array} \right\} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Interprétation graphique.

Pente verte \leq pente bleue ; pente verte \leq pente rouge ;
pente rouge \leq pente bleue.



Démonstration.

b) Soit $z \in]x, y[$. Alors $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ pour un certain $\lambda \in [0, 1]$.

On peut même être plus précis : $\lambda = \frac{y - z}{y - x}$ et donc $1 - \lambda = \frac{z - x}{y - x}$.

On a alors : $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

autrement dit : $f(z) \leq \left(1 - \frac{z - x}{y - x}\right) f(x) + \frac{z - x}{y - x} f(y)$. Et ainsi :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Les autres inégalités s'en déduisent. \square

Proposition 6.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si **pour tout** $x_0 \in I$:

$$\text{la fonction } \tau_{x_0}(f) : \begin{array}{l} I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \text{ est croissante}$$

Remarque

L'ensemble de ces caractérisations se traduit pour les fonctions concaves.

a) f est concave sur I si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y \\ \forall z \in]x, y[\end{array} \right\} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

b) f est concave sur I si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y \\ \forall z \in]x, y[\end{array} \right\} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

c) f est concave sur I si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y \\ \forall z \in]x, y[\end{array} \right\} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

V.2. Convexité et dérivabilité

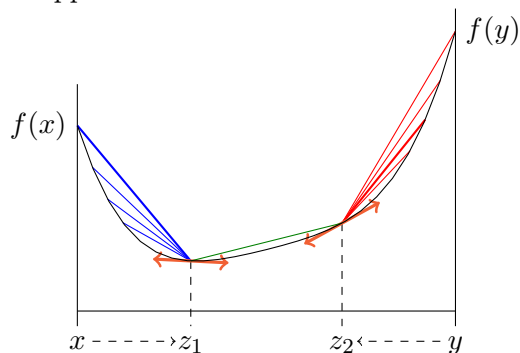
Théorème 21.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I .

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow f' \text{ est croissante sur } I$$

Démonstration.

(\Rightarrow) Soit $(z_1, z_2) \in I^2$ tel que $z_1 \leq z_2$. Montrons que $f'(z_1) \leq f'(z_2)$. La démonstration s'appuie sur le schéma suivant.



(ce schéma sous-entend que z_1 et z_2 ne sont pas des extrémités de I ; ce cas devrait être traité séparément)

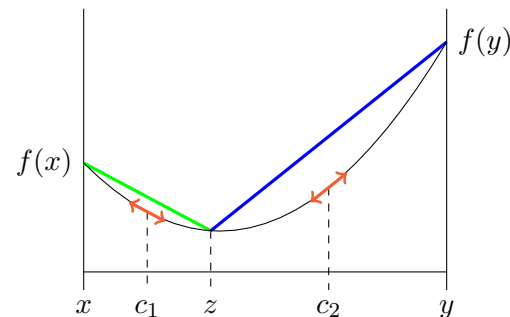
Formalisons ce schéma. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < z_1$ et $y > z_2$.

D'après la proposition 5 (pentes bleues \leq pente verte \leq pentes rouges) :

$$\begin{array}{ccc} \frac{f(x) - f(z_1)}{x - z_1} & \leq & \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \leq \frac{f(y) - f(z_2)}{y - z_2} \\ \parallel & & \parallel \\ \tau_{z_1}(f)(x) & & \tau_{z_2}(f)(y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f'_g(z_1) & & f'_d(z_2) \end{array}$$

Or, comme f est dérivable, $f'_g(z_1) = f'(z_1)$ et $f'_d(z_2) = f'(z_2)$.

(\Leftarrow) On va utiliser l'une des caractérisations de la proposition 5, à savoir le fait que f est convexe si toute « pente verte » est plus faible que la « pente bleue ». La démonstration s'appuie sur le schéma suivant.



Soit $(x, y) \in I^2$ et soit $z \in]x, y[$.

- Appliquons le TAF à f sur $]x, z[$: $\exists c_1 \in]x, z[$, $f'(c_1) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$.
(f est dérivable sur I donc dérivable sur $]x, z[$)
- Appliquons le TAF à f sur $]z, y[$: $\exists c_2 \in]z, y[$, $f'(c_2) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$.
(f est dérivable sur I donc dérivable sur $]z, y[$)

Comme $c_1 \in]x, z[$ et $c_2 \in]z, y[$ on a : $c_1 < c_2$.

Or par hypothèse, f' est croissante donc $f'(c_1) \leq f'(c_2)$.

On en conclut que : $\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$. □

Théorème 22.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I .

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow f'' \text{ est positive sur } I$$

Démonstration.

Il suffit de se rappeler qu'une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante sur I si et seulement si g' est positive. On applique ce résultat à la fonction f' . □

Théorème 23.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I .

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow \text{La courbe de } f \text{ est située au-dessus de ses tangentes : } \\ \forall (a, x) \in I^2, f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$$

Démonstration.

(\Rightarrow) On reprend la démonstration du théorème 21 (\Rightarrow).

Soit $(a, x) \in I^2$ tel que $a \neq x$ (le cas $x = a$ est trivial).

- Si $x \geq a$, en prenant $z_1 = a$ et $z_2 = x$, l'inégalité de gauche fournit :

$$f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Si $x \leq a$, en prenant $z_1 = x$ et $z_2 = a$, l'inégalité de droite fournit :

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq f'(a)$$

D'où l'inégalité souhaitée quelque soit $(a, x) \in I^2$.

(\Leftarrow) Démontrons que f' est croissante.

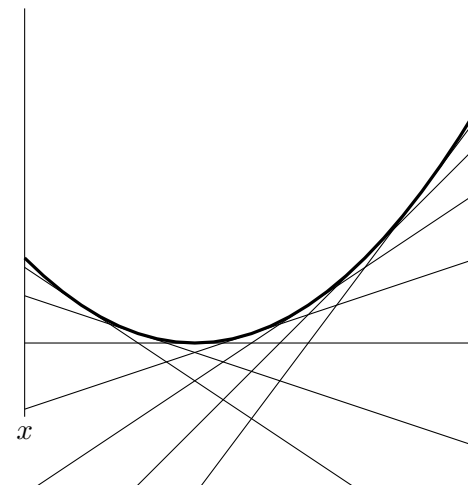
Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$. Alors, par hypothèse, on a :

$$f(x) \geq f(y) + (x - y)f'(y) \quad \text{et} \quad f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x)$$

On en déduit que : $f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$. □

Application

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$
- $\forall x \in]0, +\infty[, \ln x \leq x - 1$

Interprétation graphique.**Remarque**

Encore une fois, il faut traduire ces propriétés dans le cas où la fonction f est concave. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On a alors :

$$f \text{ est concave sur } I \Leftrightarrow f' \text{ est décroissante sur } I \\ \Leftrightarrow f'' \text{ est négative sur } I$$

La courbe de f est située en dessous de ses tangentes :
 $\forall (a, x) \in I^2, f(x) \leq f(a) + (x - a)f'(a)$

V.3. Point d'inflexion

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in I$.

- Le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f si f change de convexité en ce point.
- Plus précisément, deux cas sont possibles.

$$1) \exists \alpha > 0, \begin{cases} \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0], f \text{ est concave} \\ \text{(la courbe de } f \text{ est située en dessous de sa tangente en } x_0) \\ \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha], f \text{ est convexe} \\ \text{(la courbe de } f \text{ est située au-dessus de sa tangente en } x_0) \end{cases}$$

$$2) \exists \alpha > 0, \begin{cases} \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0], f \text{ est convexe} \\ \text{(la courbe de } f \text{ est située au-dessus de sa tangente en } x_0) \\ \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha], f \text{ est concave} \\ \text{(la courbe de } f \text{ est située en dessous de sa tangente en } x_0) \end{cases}$$

- En un tel point $(x_0, f(x_0))$, la tangente de f en x_0 traverse la courbe de f .

Théorème 24.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I et soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.

$$(x_0, f(x_0)) \text{ est un point d'inflexion de la courbe de } f \Leftrightarrow f'' \text{ s'annule et change de signe en } x_0$$

Démonstration.

Dire que f'' s'annule en changeant de signe en x_0 signifie (par exemple) que :

$$\exists \alpha > 0, \begin{cases} \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0], f''(x) \geq 0 \\ \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha], f''(x) \leq 0 \end{cases}$$

Cela signifie donc que f est convexe sur $[x_0 - \alpha, x_0]$ ($f'' \geq 0$ sur cet intervalle) et concave sur $[x_0, x_0 + \alpha]$ ($f'' \leq 0$ sur cet intervalle). \square

Remarque

Ainsi, si $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion alors c'est un extremum local de la fonction f' (cf théorème 20).

VI. Extension aux fonctions à valeurs complexes

La notion de dérivabilité s'étend sans problème aux fonctions à valeurs complexes, comme toutes les notions de dérivées successives et de fonctions de classe C^n . Les opérations sur les dérivées restent également valables.

On peut, comme d'habitude, caractériser la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.

Proposition 7.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. Soit $a \in I$.

$$f \text{ dérivable en } a \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(f) \text{ dérivable en } a \text{ ET } \operatorname{Im}(f) \text{ dérivable en } a)$$

Lorsque f est dérivable en a , on obtient :

$$f'(a) = (\operatorname{Re}(f))'(a) + i (\operatorname{Im}(f))'(a)$$

Proposition 8.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ où I est un intervalle.

$$f \text{ dérivable sur } I \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(f) \text{ dérivable sur } I \text{ ET } \operatorname{Im}(f) \text{ dérivable sur } I)$$

Lorsque f est dérivable sur I , on obtient :

$$f' : x \mapsto (\operatorname{Re}(f))'(x) + i (\operatorname{Im}(f))'(x)$$

Exercice 4

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Déterminer, si elle existe, la dérivée de $f : t \mapsto e^{iu(t)}$ sur I .

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{3}x} \sin(x)$.



De nombreux résultats ne sont plus valables dans le cas des fonctions à valeurs complexes :

- × le lien entre extremum local et annulation de la dérivée (la notion d'extremum n'a pas de sens dans \mathbb{C}),
- × le théorème de Rolle,
- × le théorème des accroissements finis
- × la caractérisation de la monotonie par la dérivée (la notion de monotonie n'a pas de sens dans \mathbb{C}).

Exemple

On fournit ici un contre-exemple au théorème de Rolle dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.

On note $f : t \mapsto e^{it}$. La fonction f est :

- × continue sur $[0, 2\pi]$,
- × dérivable sur $]0, 2\pi[$,
- × telle que : $f(0) = f(2\pi)$.

Cependant : $\forall t \in [0, 2\pi], f'(t) \neq 0$.

D'un point de vue cinématique, un mobile peut se déplacer dans le plan et revenir à son point de départ sans que sa vitesse ne soit annulée.

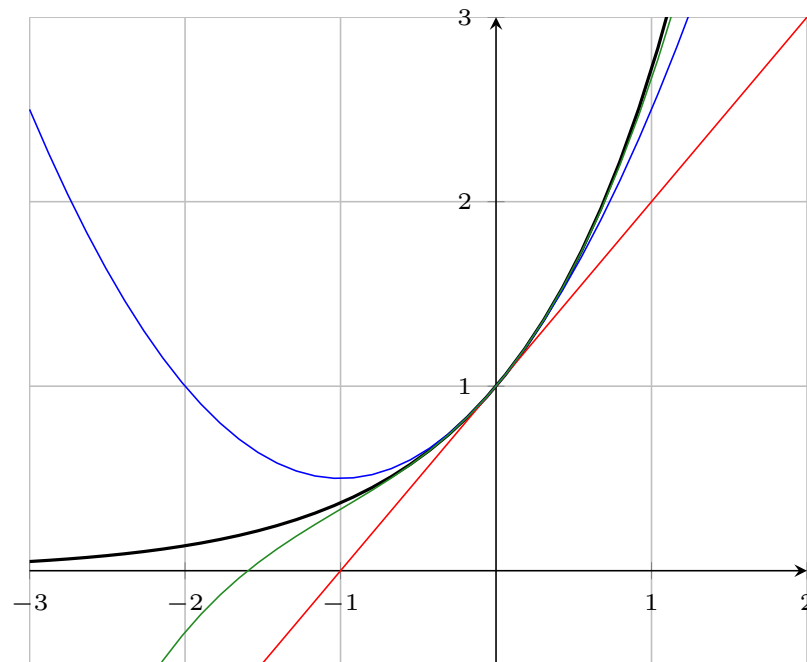
Remarque

On peut néanmoins sauver les résultats suivants :

- × l'inégalité des accroissements finis, version BIS (en remplaçant les valeurs absolues par les modules)
- × la caractérisation du caractère constant d'une fonction sur un intervalle par la nullité de sa dérivée.

VII. Développements limités

On cherche dans cette section à étudier des fonctions au voisinage d'un point, généralement 0. L'étude de la continuité et de la dérivabilité nous donne déjà des renseignements sur l'allure de la courbe représentative d'une fonction : une tangente en un point donne par exemple localement la meilleure approximation affine. Pourquoi ne pas chercher la meilleure approximation quadratique (*i.e.* la parabole la plus « proche » localement de la courbe représentative) ? Et la meilleure approximation cubique, etc ? C'est justement l'objet de cette section : approcher localement une fonction par des polynômes de degré de plus en plus grand.



Meilleures approximations affine, quadratique et cubique de la fonction \exp au voisinage de 0

VII.1. Définitions

Définition

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (éventuellement non définie en x_0).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0** (en abrégé $DL_n(x_0)$) s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

- La fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$ est appelé **partie régulière** du développement limité.
- La fonction $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$ est appelé **reste** du développement limité.

Remarque

À l'aide du changement de variable $x = x_0 + h$, on peut écrire un développement limité sous la forme :

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

En pratique, on se ramène à cette forme afin de ne manipuler que des développements limités au voisinage de 0.

Exercice 6

Démontrer que le $DL_n(x_0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Remarque

Supposons que f admette un $DL_n(x_0)$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Si $m \leq n$, alors on a également :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_m(x - x_0)^m + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^m)$$

Autrement dit, on peut « oublier » les termes de degré compris entre $m+1$ et n , et ainsi obtenir un $DL_m(x_0)$. Cette opération s'appelle **troncature à l'ordre m** .

Proposition 9.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage (éventuellement épointé) de x_0 .

Si f admet un $DL_n(x_0)$, alors celui-ci est unique.

Démonstration.

À faire. □

VII.2. DL et équivalent

Proposition 10.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage (éventuellement épointé) de x_0 .

Supposons que f admette un $DL_n(x_0)$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

On note, s'il existe, p le plus petit entier naturel tel que : $a_p \neq 0$.

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_p (x - x_0)^p$$

En particulier, f est du signe de $a_p (x - x_0)^p$ au voisinage de x_0 .

VII.3. DL et parité

Proposition 11.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage (éventuellement époincé) de x_0 .

Supposons que f possède un $DL_n(x_0)$.

f paire \Rightarrow la partie régulière du $DL_n(x_0)$ ne contient que des monômes de degré pair

f impaire \Rightarrow la partie régulière du $DL_n(x_0)$ ne contient que des monômes de degré impair

VII.4. DL et régularité

Proposition 12.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . En particulier, f est définie en x_0 .

f continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ possède un $DL_0(x_0)$

Lorsque c'est le cas : $f(x) = f(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)$

Proposition 13.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . En particulier, f est définie en x_0 .

f dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ possède un $DL_1(x_0)$

Lorsque c'est le cas : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$



Si $n \geq 2$, une fonction peut admettre un $DL_n(x_0)$ sans pour autant être 2 fois dérivable en x_0 .

C'est le cas par exemple de la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

VII.5. DL et primitives

Proposition 14.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que f' possède un $DL_n(x_0)$:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Alors f possède un $DL_{n+1}(x_0)$ donné par :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n+1})$$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer :

1 le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$,

2 le $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \arctan(x)$.

VII.6. Formule de Taylor-Young

Théorème 25. (Formule de Taylor-Young)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \Rightarrow f \text{ possède un DL}_n(x_0)$$

Lorsque c'est le cas :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Démonstration.

Récurrence à faire.

Remarque

- Ce résultat est avant tout un résultat d'existence de $\text{DL}_n(x_0)$. En pratique, on calcule très rarement les dérivées successives pour déterminer un $\text{DL}_n(x_0)$.
- Pour résumer, on a le tableau suivant :

Continuité	\Leftrightarrow	Existence d'un $\text{DL}_0()$
Dérivabilité	\Leftrightarrow	Existence d'un $\text{DL}_1()$
Classe \mathcal{C}^n	\Rightarrow	Existence d'un $\text{DL}_n()$

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer :

1. le $\text{DL}_n(0)$ de \exp ,
2. le $\text{DL}_{2n}(0)$ de ch ,
3. le $\text{DL}_{2n+1}(0)$ de \sin ,
4. le $\text{DL}_3(0)$ de \tan .

VII.7. DL et dérivation

Proposition 15.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

□ Supposons : $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Alors f admet un $\text{DL}_n(x_0)$ et f' admet un $\text{DL}_{n-1}(x_0)$ et :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n-1})$$



- On ne peut pas toujours dériver un développement limité.
- Cependant, on peut dériver un $\text{DL}_n(x_0)$ de f , si f est de classe \mathcal{C}^{n+1} .

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un $\text{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$.

VII.8. DL classiques

cf poly

VII.9. Opérations sur les DL

VII.9.a) Remarque préliminaire

Remarque

On demandera souvent de déterminer le DL d'une fonction à un certain ordre. Une des difficultés majeures est de prévoir les ordres auxquels il faut développer chaque élément de l'expression dont on veut un DL :

- × si on effectue de DL trop poussés, on obtiendra un DL final à un ordre supérieur à celui attendu. On toujours effectuer une troncature, mais beaucoup de calculs (souvent fastidieux) auront été faits pour rien,
- × si on ne pousse pas assez loin les DL intermédiaires, on n'obtiendra pas la précision souhaitée, et il faut recommencer **tous** les calculs.

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que f admette le $DL_n(x_0)$ suivant :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

On note p le plus petit entier tel que : $a_p \neq 0$ (s'il existe).

On appelle **forme normalisée** du $DL_n(x_0)$ de f l'écriture :

$$f(x) = (x - x_0)^p \left(a_p + a_{p+1}(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^{n-p} + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n-p}) \right)$$

On appelle $a_p(x - x_0)^p$ la partie principale du $DL_n(x_0)$ de f .

Remarque

On peut également écrire la forme normalisée du $DL_n(x_0)$ de f de la manière suivante :

$$f(x_0 + h) = h^p \left(a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p} + o_{h \rightarrow 0}(h^{n-p}) \right)$$

Exemple

Si l'on souhaite obtenir un $DL_4(0)$ de $x \mapsto (\cos(x) - 1) \ln(1 + x)$, on remarque :

$$\cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\ln(1 + x) = x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

Ainsi :

- × la partie principale du $DL_2(0)$ de $x \mapsto \cos(x) - 1$ est d'ordre 2 (il s'agit de : $-\frac{1}{2}x^2$),
- × la partie principale du $DL_1(0)$ de $x \mapsto \ln(1 + x)$ est d'ordre 1 (il s'agit de : x),

La partie principale du DL de $x \mapsto (\cos(x) - 1) \ln(1 + x)$ est donc d'ordre 3. Pour en obtenir un DL à l'ordre 4 = 3 + 1, il suffit alors de pousser le DL de $x \mapsto \cos(x) - 1$ à l'ordre 2 + 1 = 3 et celui de $x \mapsto \ln(1 + x)$ à l'ordre 1 + 1 = 2.

$$\begin{aligned} (\cos(x) - 1) \ln(1 + x) &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right) \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\ &= x^3 \left(-\frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x) \right) \left(1 - \frac{1}{2}x + o_{x \rightarrow 0}(x) \right) \\ &= x^3 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + o_{x \rightarrow 0}(x) \right) \\ &= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \end{aligned}$$

VII.9.b) Combinaison linéaire

Proposition 16.

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que f et g admettent un $DL_n(x_0)$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ admet un $DL_n(x_0)$ et :

$$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + \mu b_k) (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

VII.9.c) Produit

Proposition 17.

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que f et g admettent un $DL_n(x_0)$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Alors $f \times g$ admet une $DL_n(x_0)$ et :

$$(f \times g)(x) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Exemple

Déterminons un $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x \sin(x)$.

• On connaît tout d'abord les $DL(0)$ suivants :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

• On en déduit :

$$\begin{aligned} e^x \sin(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right) \\ &= x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \left(1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\ &= x \left(1 + x + \frac{x^2}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu un $DL_3(0)$ comme produit d'un $DL_3(0)$ et d'un $DL_2(0)$. Comme détaillé en Section VII.9.a) ce phénomène apparaît dès que l'ordre de l'une des parties principales est non nul.

Avant de calculer le $DL(0)$ d'un produit, on prendra donc soin de calculer les ordres auxquels il faudra effectuer le $DL(0)$ de chaque terme.

Exercice 10

Déterminer un $DL_2(0)$ de $x \mapsto e^x \cos(x)$.

VII.9.d) Inverse et quotient

Proposition 18.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que f admette un $DL_n(x_0)$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Supposons : $a_0 \neq 0$.

Alors :

a) la fonction f ne s'annule pas au voisinage de x_0 ,

b) la fonction $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n(x_0)$.

Exercice 11

Déterminer un $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

Remarque

Pour obtenir le $DL_n(x_0)$ d'un quotient $\frac{f}{g}$:

1) on commence par déterminer le $DL_n(x_0)$ de $\frac{1}{g}$,

2) on effectue ensuite le **produit** de ce DL par le $DL_n(x_0)$ de f .

Exercice 12

Déterminer un $DL_0(5)$ de \tan .

VII.10. DL et propriétés locales

VII.10.a) Position relative d'une courbe et de sa tangente

MÉTHODO**Position relative d'une courbe et sa tangente**

Pour déterminer la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point x_0 , il suffit de calculer la partie principale de :

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$$

Supposons qu'il existe $\alpha \neq 0$ et $p \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ tels que :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0)^p + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^p)$$

Alors :

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \alpha(x - x_0)^p$$

Deux cas se présentent.

- si p est pair, deux nouveaux cas se présentent :
 - × si $\alpha > 0$, alors la courbe représentative de f est située au-dessus de sa tangente au voisinage de x_0 .
 - × si $\alpha < 0$, alors la courbe représentative de f est située au-dessous de sa tangente au voisinage de x_0 .
- si p est impair, la courbe représentative de f traverse sa tangente en x_0 . Cette courbe admet un point d'inflexion en x_0 .

Exercice 13

On note f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .
2. Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.

VII.10.b) Extrema locaux

Proposition 19.

Soit I un intervalle. Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Supposons que f est :

× deux fois dérivable sur I ,

× telle que : $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$.

Alors f admet un extremum local en x_0 . Plus précisément :

$$f''(x_0) < 0 \Leftrightarrow f \text{ admet un maximum local en } x_0$$

$$f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f \text{ admet un minimum local en } x_0$$



On prendra bien garde au fait que ce résultat est valable seulement si x_0 est un **point critique** de f (i.e. si : $f'(x_0) = 0$).

VII.10.c) Asymptotes

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \bar{I}$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On note \mathcal{D} la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$.

On dit que la droite \mathcal{D} est **asymptote** à la courbe \mathcal{C}_f en x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$$

Remarque

- La droite \mathcal{D} est donc asymptote à \mathcal{C}_f si la distance entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{D} tend vers 0 en x_0 .
- Cela revient à dire que f admet un développement **asymptotique** en x_0 de la forme :

$$f(x) = \alpha x + \beta + o_{x \rightarrow x_0}(1)$$

Ce développement asymptotique peut éventuellement s'obtenir grâce à des développements limités.

Exercice 14

On note f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+1) \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

MÉTHODO**Recherche d'asymptote**

Pour trouver quelle droite \mathcal{D} est asymptote à une courbe \mathcal{C}_f en x_0 , on cherche deux réels α et β tels que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \alpha x) = \beta$$

MÉTHODO**Position relative d'une courbe et son asymptote**

Pour connaître la position relative d'une courbe \mathcal{C}_f et d'une droite \mathcal{D} , il suffit d'étudier le signe de la fonction :

$$d : x \mapsto f(x) - (\alpha x + \beta)$$

L'utilisation de développements limités peut être utile pour prolonger le développement asymptotique et en déduire la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{D} au voisinage de x_0 .