CH XV : Dénombrement

I. Les ensembles finis

I.1. Cardinal d'un ensemble fini

Afin de définir correctement la notion de cardinal, nous avons besoin de montrer quelques résultats au préalable.

Lemme 1.

Soit $m \geqslant 2$ et $a \in [\![1,m]\!]$.

Alors $[\![1,m]\!] \setminus \{a\}$ et $[\![1,m-1]\!]$ sont en bijection.
(si $m=1$, ce lemme revient à dire que $\varnothing$ est en bijection avec lui-même)

Démonstration.
Il suffit de considérer l'application :

$$h : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,m]\!] \setminus \{a\} & \to & [\![1,m-1]\!] \\ b & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} b & \text{si } b < a \\ b-1 & \text{si } b > a \end{array} \right. \end{array} \right.$$

□

Lemme 2.

Soient $[\![1,n]\!]$ et $[\![1,m]\!]$ deux intervalles entiers ($n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$).

S'il existe une injection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$, alors $n \leqslant m$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: $\forall m \in \mathbb{N}^*$, (il existe une injection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$) $\Rightarrow$ $(n \leqslant m)$.

- **Initialisation** : Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
  L'implication est vérifiée car son membre de droite est toujours vrai ($1 = n \leqslant m$).
  D'où $\mathscr{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall m \in \mathbb{N}^*$, (il existe une injection de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$) $\Rightarrow$ $(n+1 \leqslant m)$).
  Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons qu'il existe une injection f de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$.
  Alors : $m \geqslant 2$ (on pourrait le démontrer rapidement en raisonnant par l'absurde).
  Notons $a = f(n+1)$ et considérons l'application $g : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \to & [\![1,m]\!] \setminus \{a\} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$.
  Cette fonction est injective car c'est la restriction d'une fonction injective. D'après le lemme précédent, on en déduit qu'il existe une bijetion $h : [\![1,m]\!] \setminus \{a\} \to [\![1,m-1]\!]$.
  L'application $h \circ g : [\![1,n]\!] \to [\![1,m-1]\!]$ est injective donc, par principe de récurrence : $n \leqslant m-1$. Ainsi : $n+1 \leqslant m$.
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$. □

Proposition 1.

Soient $[\![1,n]\!]$ et $[\![1,m]\!]$ deux intervalles entiers.

S'il existe une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$, alors $m = n$.

Démonstration.
Une telle bijection f est notamment une injection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$ et sa réciproque f^{-1} est une injection de $[\![1,m]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$. D'après le lemme 2, on obtient : $n \leqslant m$ et $m \leqslant n$. D'où : $n = m$. □

On peut maintenant donner une définition rigoureuse d'ensemble fini et de cardinal.

Définition

Soit E un ensemble non vide.

- On dit que E est un **ensemble fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une application bijective $\varphi : E \to [\![1, n]\!]$.
- Si E est un ensemble fini, on appelle **cardinal de** E l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E et $[\![1, n]\!]$ sont en bijection. Cet entier est unique : si E est en bijection avec $[\![1, n_1]\!]$ et $[\![1, n_2]\!]$ alors $n_1 = n_2$.
- Si E est fini, on note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$ (ou encore $\#E$) son cardinal.
  (autrement dit, $\text{Card}(E) = n \Leftrightarrow$ *E est en bijection avec* $[\![1, n]\!]$*)*

Remarque

- L'unicité de n peut être démontrée via la proposition 1.
  En effet, s'il existe deux bijections $f : E \to [\![1, n]\!]$ et $g : E \to [\![1, p]\!]$ alors $f \circ g^{-1} : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ est bijective. On conclut donc que $p = n$.
- Une bijection entre un ensemble E et $[\![1, n]\!]$ n'est rien d'autre qu'une **numérotation** des éléments de E.

$$\begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \to & E \\ i & \mapsto & x_i \end{array}$$

  Autrement dit, si E est fini, on pourra l'écrire sous la forme $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Avec cette définition, l'ensemble vide n'est pas un ensemble fini !
- On étend donc la définition précédente. Par convention, l'ensemble vide est considéré comme fini et de cardinal 0.
  (en accord avec la définition précédente si on considère que $[\![1, 0]\!] = \varnothing$*)*

Proposition 2.

Soit A un ensemble fini.

Soit B un ensemble.

S'il existe une bijection de A sur B alors B est fini et $\text{Card}(B) = \text{Card}(A)$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A \textit{ ensemble fini} \\ \textit{Il existe } \varphi : A \to B \textit{ bijective} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bullet\ B \textit{ est fini} \\ \bullet\ \text{Card}(B) = \text{Card}(A) \end{array}}$$

Démonstration.
On note $n \in \mathbb{N}^*$ le cardinal de A, ensemble fini (on note $\text{Card}(A) = n$).
Ainsi, il existe $\psi : A \mapsto [\![1, n]\!]$ bijective.
L'application $\psi \circ \varphi^{-1} : B \mapsto [\![1, n]\!]$ est bijective. On en conclut que B est un ensemble fini et que $\text{Card}(B) = n = \text{Card}(A)$. □

I.2. Cardinal d'un sous-ensemble d'un ensemble fini

Lemme 3.

Soit A une partie de $[\![1, n]\!]$ ($A \subset [\![1, n]\!]$).

1) *Alors A est fini et* $\text{Card}(A) \leqslant n$.

2) *De plus :* $\big(\text{Card}(A) = n\big) \Leftrightarrow \big(A = [\![1, n]\!]\big)$

Démonstration.
Par récurrence sur n. □

Théorème 1.

Soit E un ensemble fini.

Soit A une partie de E ($A \subset E$).

1) *Alors A est fini et :* $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(E)$.

2) *Lorsque E est fini, on a alors :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A \subset E \\ \text{Card}(A) = \text{Card}(E) \end{array}\right\} \Leftrightarrow A = E}$$

Démonstration.
L'ensemble E est fini. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et une bijection f de E sur $[\![1, n]\!]$.
Soit $A \subset E$.
On considère alors $g : A \to f(A)$ telle que : $\forall x \in A, g(x) = f(x)$.

- L'ensemble $f(A)$ est une partie de $[\![1, n]\!]$ donc, par le lemme 3, il est fini et $\text{Card}\left(f(A)\right) \leqslant n$.
- L'application g est une bijection de A sur $f(A)$, donc, d'après la proposition 2, $\text{Card}(A) = \text{Card}\left(f(A)\right)$.

Ainsi, $\text{Card}(A) = \text{Card}\left(f(A)\right) \leqslant n = \text{Card}(E)$.
(cas d'égalité : distinguer dans la preuve le cas $A = E$ et le cas $A \subsetneq E$) □

Méthodologie
Ce théorème fournit une méthode pour démontrer que deux ensembles **finis** sont égaux. Plus précisément : soit E est un ensemble fini.
Pour montrer que $A = E$, il suffit de démontrer :

- $A \subset E$,
- $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$.

I.3. Applications entre ensembles finis

Proposition 3.
Soient E et F deux ensembles finis.
Soit $f : E \to F$ une application.

1) *Alors $f(E)$ est fini et* $\text{Card}\left(f(E)\right) \leqslant \min\left(\text{Card}(E), \text{Card}(F)\right)$.
2) $\text{Card}\left(f(E)\right) = \text{Card}(E) \iff f$ *est injective*
3) $\text{Card}\left(f(E)\right) = \text{Card}(F) \iff f$ *est surjective*

Démonstration.
1) Cette inégalité se réécrit :

$$\text{Card}\left(f(E)\right) \leqslant \text{Card}(E) \quad \text{et} \quad \text{Card}\left(f(E)\right) \leqslant \text{Card}(F)$$

- L'ensemble $f(E)$ est une partie de F (fini) donc est fini et :

$$\text{Card}\left(f(E)\right) \leqslant \text{Card}(F)$$

- Comme f est une application, à tout élément x de E on associe seulement un élément y de F, qui est alors, par définition, dans $f(E)$.
  Ainsi : $\text{Card}\left(f(E)\right) \leqslant \text{Card}(E)$.

2) L'égalité $\Big(\text{Card}(E) = \text{Card}\left(f(E)\right)\Big)$ est équivalente qu'il y a autant d'éléments dans E que d'éléments dans $f(E)$. Autrement dit, tout élément de $f(E)$ n'est atteint qu'une fois par f, ce qui signifie que f est injective.

3) On sait :

$$\text{Card}(F) = \text{Card}\left(f(E)\right) \quad \Leftrightarrow \quad F = f(E) \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjective}$$

□

Proposition 4.

Soient E et F deux ensembles **finis**.

Soit $f : E \to F$ une application de E dans F.

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to F \\ \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective})$$

Démonstration.
On suppose $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$. D'après la proposition 3, on a :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Card}\big(f(E)\big) = \mathrm{Card}(E) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Card}\big(f(E)\big) = \mathrm{Card}(F) \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ surjective} \end{aligned}$$

□

Proposition 5.

Soit E un ensemble fini.

Soit F un ensemble fini.

1) *Il existe une injection de E dans F ssi* $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.

2) *Il existe une surjection de E sur F ssi* $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$.

3) *Il existe une bijection de E sur F ssi* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Démonstration.
C'est une application directe de la proposition 3. □

I.4. Ensemble (infini) dénombrable

Les ensembles qui ne sont pas finis sont dits infinis. Parmi ces ensembles, on peut distinguer ceux dont on peut numéroter les éléments.

Définition
Un ensemble E est (infini) **dénombrable** s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et E.

Exemple
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont infinis dénombrables : on peut numéroter leurs éléments.
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : on ne peut numéroter les éléments de $\mathbb{R}$.

Ceci signifie qu'il existe différentes « tailles » d'infinis. Ce chapitre étant consacré aux ensembles finis, nous ne développerons pas ces considérations.

Exercice
On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.
Démontrer que les applications suivantes sont bijectives.

a. $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \right.$

b. $g : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} -2n & \text{si } n \leqslant 0 \\ 2n+1 & \text{si } n > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$

Conclusion :
- *il y a « autant » d'entiers naturels pairs que d'entiers naturels !*
- *il y a « autant » d'entiers relatifs que d'entiers naturels !*

II. Dénombrement

Dénombrer un ensemble fini non vide E, c'est déterminer le cardinal de E. Autrement dit, c'est compter les éléments de l'ensemble E. On s'intéresse donc dans cette section à lister des méthodes permettant le calcul du cardinal en fonction de la forme de l'ensemble E.

II.1. Cardinal d'une union disjointe d'ensembles finis : principe additif

Proposition 6.

*Soient A et B **deux ensembles finis**.*

*Supposons $A \cap B = \varnothing$ (**ensembles disjoints**).*

1) $A \cup B$ *est fini.*

2) $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B$.

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ finis} \\ A \cap B = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bullet\ A \cup B \text{ fini} \\ \bullet\ \text{Card}(A \cup B) = \\ \quad \text{Card}(A) + \text{Card}(B) \end{array}$$

Démonstration.
A est fini, de cardinal noté n, et B est fini, de cardinal noté m.
Il suffit de construire une bijection entre $A \cup B$ et $[\![1, n+m]\!]$. □

Exemple
On considère un jeu de 32 cartes.
Combien y a-t-il de mains (ensembles de 5 cartes) contenant au moins 3 rois ?

Démonstration.
Notons M_{3R} l'ensemble des mains contenant exactement 3 rois et M_{4R} l'ensemble des mains contenant exactement 4 rois. Ces deux ensembles sont disjoints et l'ensemble M recherché s'écrit : $M = M_{3R} \cup M_{4R}$. On a donc :

$$\text{Card}(M) = \text{Card}(M_{3R}) + \text{Card}(M_{4R})$$ □

($\text{Card}(M_{3R})$ *et* $\text{Card}(M_{4R})$ *sont à déterminer)*

On peut généraliser cette proposition au cas de l'union finie d'un nombre quelconque d'ensembles disjoints deux à deux.

Théorème 2.

*Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles **finis** et **deux à deux disjoints**.*
(i.e. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$)

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ *est fini.*

2) $\text{Card}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \text{Card}(A_i)$

$$\left.\begin{array}{l} A_1, \dots, A_n \text{ finis} \\ A_1, \dots, A_n \text{ deux à deux disjoints} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bullet\ \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \text{ est fini} \\ \bullet\ \text{Card}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \text{Card}\, A_i \end{array}$$

Démonstration.
La démonstration consiste à démontrer, par récurrence : $\forall n \geqslant 2,\ \mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: Toute famille $(A_1, \dots, A_n)$ d'ensembles finis et deux à deux disjoints vérifie ($\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ est fini) et ($\text{Card}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \text{Card}(A_i)$).
L'intialisation n'est autre que le résultat de la proposition 6.
L'étape d'hérédité est laissée en exercice. □

Exemple
On considère un jeu de 32 cartes.
Combien y a-t-il de mains (ensembles de 5 cartes) contenant au moins 2 rois ?

Démonstration.
Avec les notations précédentes, l'ensemble T dont on recherche le cardinal s'écrit : $T = M_{2R} \cup M_{3R} \cup M_{4R}$. Ces ensembles étant deux à deux disjoints, on a :

$$\text{Card}\, T = \text{Card}(M_{2R}) + \text{Card}(M_{3R}) + \text{Card}(M_{4R})$$

($\text{Card}(M_{2R})$*,* $\text{Card}(M_{3R})$ *et* $\text{Card}(M_{4R})$ *sont à déterminer)* □

Principe soustractif

Théorème 3.

Soit E un ensemble **fini**.

Soient A et B deux parties de E ($A \subset E$ et $B \subset E$).

1) $\boxed{\text{Card } \left(\overline{A}\right) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)}$

(on rappelle que, pour toute partie A de E, on a : $\overline{A} = E \setminus A$)

2) $\boxed{\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)}$

Démonstration.

1) Pour tout $A \subset E$, on a : $E = \overline{A} \cup A$. Comme E est fini, il en est de même des deux parties A et $\overline{A}$. On a donc : $\text{Card}(E) = \text{Card}(A) + \text{Card }\left(\overline{A}\right)$.

2) On remarque : $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Et on applique le principe additif. □

Exemple
On considère un jeu de 32 cartes.
Combien y a-t-il de mains (ensembles de 5 cartes) contenant au moins 1 roi ?
Autrement dit, combien y a-t-il de mains contenant au moins un roi ?

Démonstration.
Avec les notations précédentes, l'ensemble S dont on recherche le cardinal s'écrit : $S = M_{1R} \cup M_{2R} \cup M_{3R} \cup M_{4R}$. Comme précédemment, ces ensembles étant deux à deux disjoints, on a :

$$\text{Card}(S) = \text{Card}(M_{1R}) + \text{Card}(M_{2R}) + \text{Card}(M_{3R}) + \text{Card}(M_{4R})$$

Cependant, ici, on peut raisonner plus simplement. Au lieu de déterminer le cardinal des mains contenant au moins un roi, on détermine le cardinal de son complémentaire, à savoir l'ensemble des mains ne contenant aucun roi.
Si on note E l'ensemble contenant toutes les mains possibles, on a :

$$\text{Card}(E) = \binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times \cancel{30} \times 29 \times 28}{\cancel{5} \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2}} = 8 \times 31 \times 29 \times 28.$$

$$\text{Or : Card }\left(\overline{S}\right) = \binom{28}{5} = \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times \cancel{24}}{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2}} = 5 \times 28 \times 27 \times 26.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \text{Card}(S) &= \text{Card}(E) - \text{Card }\left(\overline{S}\right) \\ &= 8 \times 31 \times 29 \times 28 - 5 \times 28 \times 27 \times 26 \\ &= 28 \times (8 \times 31 \times 29 - 5 \times 27 \times 26) \\ &= 28 \times (7192 - 3510) = 28 \times 3682 = 103096 \end{aligned}$$

□

II.2. Cardinal d'une union quelconque d'ensembles finis : principe d'inclusion - exclusion

Proposition 7.

Soient A et B deux ensembles **finis**.

1) *$A \cap B$ est fini*

2) *$A \cup B$ est fini*

3) *Et* $\boxed{\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)}$

Démonstration.
On utilise le principe additif avec la partition : $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.
On a alors : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A \setminus B) + \text{Card}(B)$.
On conclut à l'aide du Théorème 3. □

Exercice
Généraliser cette proposition à trois ensembles finis A, B et C.

$$\begin{aligned} & \text{Card}(A \cup B \cup C) \\ = \ & \text{Card}\left((A \cup B) \cup C\right) \\ = \ & \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(C) - \text{Card}\left((A \cup B) \cap C\right) \\ = \ & \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(C) - \text{Card}\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right) \\ = \ & \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) \\ - \ & \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) \\ + \ & \text{Card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Exercice
On considère une classe de 36 élèves qui étudient tous au moins une langue parmi l'anglais, l'espagnol et l'allemand. On sait que :

- 22 élèves étudient l'anglais, 22 étudient l'allemand, 18 étudient l'espagnol
- 10 élèves étudient à la fois l'anglais et l'allemand, 9 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol, 11 à la fois l'anglais et l'espagnol

Combien d'élèves étudient les trois langues ?

Démonstration.
Ce genre d'exercice classique se résout à l'aide d'un diagramme en patates (aussi appelé diagramme de Venn).
Notons :

- Ang l'ensemble des élèves qui étudient l'anglais,
- Esp l'ensemble des élèves qui étudient l'espagnol,
- All l'ensemble des élèves qui étudient l'allemand,
- C l'ensemble des élèves de la classe,
- et enfin T l'ensemble des élèves qui étudient les trois langues.

On a donc :

× $C = Ang \cup All \cup Esp$ donc $\text{Card}(C) = 36$

× $\text{Card}(Ang) = 22$

× $\text{Card}(All) = 22$

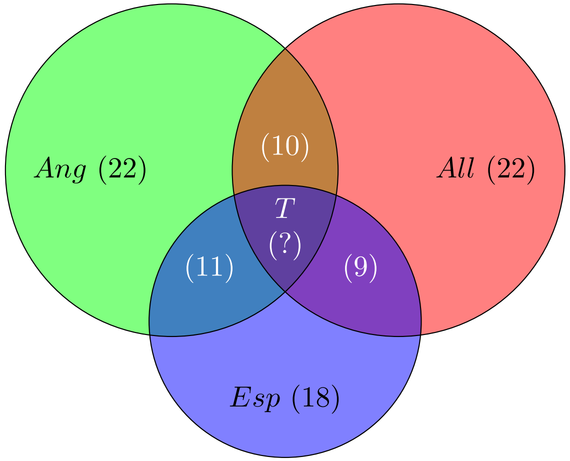
× $\text{Card}(Esp) = 18$

× $\text{Card}(Ang \cap All) = 10$

× $\text{Card}(All \cap Esp) = 9$

× $\text{Card}(Ang \cap Esp) = 11$

Ce que l'on peut résumer par le diagramme suivant.



Enfin, grâce à la formule du crible, on obtient :

$$\begin{aligned} & \text{Card}(Ang \cup All \cup Esp) \\ = \quad & \text{Card}\, Ang + \text{Card}\, All + \text{Card}\, Esp \\ - \quad & \text{Card}(Ang \cap All) - \text{Card}(Ang \cap Esp) - \text{Card}(All \cap Esp) \\ + \quad & \text{Card}(Ang \cap All \cap Esp) \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$36 = (22 + 22 + 18) - 10 - 11 - 9 + \text{Card}(T)$$

D'où :

$$36 = 12 + 11 + 9 + \text{Card}(T)$$

Enfin : $\text{Card}(T) = 4$. □

II.3. Cardinal d'un produit cartésien : principe multiplicatif

Théorème 4.

Soient A et B deux ensembles **finis**.

1) $A \times B$ *est fini*

2) $\boxed{\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)}$

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Généralisation au cas $A_1, \dots, A_r$ ensembles finis :

1) $A_1 \times \dots \times A_r$ *est fini*

2) $\boxed{\mathrm{Card}(A_1 \times \dots \times A_r) = \mathrm{Card}(A_1) \times \dots \times \mathrm{Card}(A_r)}$

Et ainsi, si E est fini (de cardinal n) et si $p \geqslant 1$, on a :

1) E^p *est fini*

2) $\boxed{\mathrm{Card}(E^p) = \big(\mathrm{Card}(E)\big)^p} = n^p$

Démonstration.
On note $A = \{x_1, \dots, x_p\}$ (en particulier $\mathrm{Card}\, A = p$) et $B = \{y_1, \dots, y_n\}$ ($\mathrm{Card}\, B = n$). On considère alors l'application f suivante :

$$f \ : \left|\begin{array}{ccccc} A & \times & B & \to & [\![1, p \times n]\!] \\ (x_i & , & y_j) & \mapsto & n(i-1)+j \end{array}\right.$$

Cette application étant bijective (f n'est rien d'autre qu'une numérotation des éléments de $A \times B$), on a :
$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}([\![1, np]\!]) = pn = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$.
La démonstration de la propriété générale se fait par récurrence. Plus précisément, on démontre par récurrence : $\forall r \geqslant 2,\ \mathscr{P}(r)$
où $\mathscr{P}(r)$: Toute famille $(A_1, \dots, A_r)$ d'ensembles finis vérifie ($A_1 \times \dots \times A_r$ est fini) et $\mathrm{Card}(A_1 \times \dots \times A_r) = \mathrm{Card}\, A_1 \times \dots \times \mathrm{Card}\, A_r$.
Enfin, lorsque $r = p$ et $E = A_1 = \dots = A_p$, on obtient la dernière égalité. □

Exercice
On considère un jeu de 32 cartes dans lequel on effectue un tirage de 5 cartes.

1) Combien y a-t-il de mains contenant un carré ?

Démonstration.
Un telle main est <u>entièrement déterminée</u> par :
- le choix de la hauteur du carré : 8 possibilités.
  (choix d'un élément dans l'ensemble à 8 élèments $H = \{7, 8, 9, 10, V, D, R, As\}$)
- le choix de la carte restante : 28 possibilités.
  (une carte choisie parmi les 28 cartes restantes)

Il y a donc 8×28 mains convenables. □

2) Combien y a-t-il de mains contenant exactement un pique ?

Démonstration.
Un telle main est entièrement déterminée par :
- le choix de la hauteur du pique : 8 possibilités.
  (choix d'un élément dans l'ensemble H à 8 élèments)
- le choix des 4 cartes restantes.
  (4 cartes choisies parmi les 24 cartes qui ne sont pas du pique)

L'expression <u>entièrement déterminée</u> sous-tend la présence d'une bijection. Mettons-la à jour en notant :
- $M_{1\text{-}p}$ l'ensemble des mains contenant exactement 1 pique,
- $M^4_{s\text{-}p}$ l'ensemble des ensembles de 4 cartes qui ne pas de pique.
- $H = \{7, 8, 9, 10, V, D, R, As\}$ l'ensemble des hauteurs.

On a alors la bijection suivante.

$$\begin{array}{ccccc} M_{1\text{-}p} & \to & H & \times & M^4_{s\text{-}p} \\ m & \mapsto & (\ h & , & \tilde{m}\ ) \end{array}$$

où h est la hauteur du pique présent dans la main m et $\tilde{m}$ est l'ensemble des 4 autres cartes de la main m. Au final, on obtient :
$\mathrm{Card}(M_{1\text{-}p}) = \mathrm{Card}(H \times M^4_{s\text{-}p}) = \mathrm{Card}(H) \times \mathrm{Card}(M^4_{s\text{-}p}) = 8 \times \dbinom{24}{4}$. □

II.4. Notion de p-liste

II.4.a) Définition et nombre de p-listes

Définition

Soit E un ensemble **fini**.

- Une p-liste d'éléments de E est une suite de p éléments de E.
  Autrement dit, une p-liste est un élément de E^p.
  (c'est une redéfinition du terme p-uplet)
- Si $\text{Card}(E) = n$, il y a exactement n^p p-listes d'éléments de E.
  (car $\text{Card}(E^p) = \big(\text{Card}(E)\big)^p$*)*

Exemple classique : tirages `SUCCESSIFS` et `AVEC REMISE` de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
(avec ordre et avec répétition)

Exemple

On considère une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9. On procède au tirage successif de 3 boules de l'urne, avec remise. Les éléments suivants sont des 3-listes d'éléments de $[\![1, 9]\!]$.

$$(1, 1, 1) \quad (3, 1, 8) \quad (8, 1, 3) \quad (2, 1, 2) \quad (9, 2, 6) \quad (3, 2, 2) \quad (2, 2, 3) \dots$$

⚠ L'ordre dans lequel sont tirées les boules revêt ici une importance. Autrement dit, le tirage $(3, 2, 2)$ est un tirage différent du tirage $(2, 2, 3)$.

Combien y a-t-il de tirages en tout ?
Il y a 9 possibilités pour la première boule, 9 possibilités pour la deuxième (la première boule a été remise après tirage) et 9 possibilités pour la troisième.
Il y a donc $9 \times 9 \times 9 = 9^3 (= 729)$ tirages différents.

De manière générale, si l'urne contient n boules et qu'on effectue p tirages `SUCCESSIFS` et `AVEC REMISE`, il y a $n \times \ldots \times n = n^p$ tirages différents.

II.4.b) Lien entre nombre de p-listes et cardinal de l'ensemble des applications de E (fini) dans F (fini)

Proposition 8.

Soit E un ensemble fini de cardinal p.

Soit F un ensemble fini de cardinal n.

1) *L'ensemble $\mathcal{A}(E, F)$ des applications de E dans F est fini.*

2) $\boxed{\text{Card}\big(\mathcal{A}(E, F)\big) = \big(\text{Card}(F)\big)^{\text{Card}(E)}} = n^p$

Démonstration.
On a $E = \{x_1, \ldots, x_p\}$. Toute application $f : E \to F$ est complètement déterminée par le p-uplet $\big(f(x_1), \ldots, f(x_p)\big)$ d'éléments de F. En d'autres termes, l'application :

$$\left\{ \begin{array}{rcccccc} \mathcal{A}(E, F) & \to & F & \times & \ldots & \times & F \\ f & \mapsto & \big(f(x_1) & , & \ldots & , & f(x_p)\big) \end{array} \right.$$

est bijective. □

Remarque

Cette démonstration permet de comprendre pourquoi on utilise parfois la notation : $\mathcal{A}(E, F) = F^E$. Le théorème s'écrit alors :

$$\boxed{\text{Card}(F^E) = \big(\text{Card}(F)\big)^{\text{Card}(E)}}$$

Théorème 5.

Soit E fini de cardinal n.

1) *$\mathcal{P}(E)$ est fini*

2) $\boxed{\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n}$

Démonstration.
Considérer l'application : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{A}(E,\{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}\right.$
où $\mathbb{1}_A$ est l'application indicatrice de A. Par définition, il s'agit de :

$$\mathbb{1}_A \ : \ E \ \to \ \{0,1\}$$
$$x \ \mapsto \ \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{array}\right.$$

□

II.5. Notion de p-arrangement

II.5.a) Définition et nombre de p-arrangement

Définition

Soit E un ensemble **fini**.

- Une p-arrangement d'éléments de E est p-liste d'éléments **distincts** de E.
- Si $\text{Card}(E) = n$, il y a $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(p-1))$ p-arrangements d'éléments de E.
- Par la suite, on notera A_n^p le nombre de p-arrangements d'éléments de E (où E est un ensemble à n éléments).

Exemple classique : tirages `SUCCESSIFS` et `SANS REMISE` de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
(avec ordre et sans répétition)

Exemple
On considère l'urne à 9 boules précédente et on procède au tirage successif des 3 boules de l'urne, sans remise. Les éléments suivants sont des 3-arrangements d'éléments de $[\![1,9]\!]$.

$$\cancel{(1,1,1)} \quad (3,1,8) \quad (8,1,3) \quad \cancel{(2,1,2)} \quad (9,2,6) \quad \cancel{(3,2,2)} \quad \cancel{(2,2,3)} \ldots$$

> L'ordre dans lequel sont tirées les boules revêt encore une importance. Autrement dit, le tirage $(3,1,8)$ est un tirage différent du tirage $(8,1,3)$.

Combien y a-t-il de tirages en tout ?
Il y a 9 possibilités pour la première boule, 8 possibilités pour la deuxième (la première boule n'étant pas remise après tirage) et 7 possibilités pour la troisième. Il y a donc $9 \times 8 \times 7 (= 504)$ tirages différents.

De manière générale, si l'urne contient n boules et qu'on effectue p tirages `SUCCESSIFS` et `SANS REMISE`, il y a $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(p-1))$ tirages différents.

Exercice
On considère une course de chevaux avec 15 partants. Le jeu du tiercé consiste à déterminer les 3 premiers chevaux de la course. Le quinté consiste à déterminer les 5 premiers chevaux de la course.

a. Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ?

Démonstration.
Il y a $A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = 2730$ tiercés différents dans l'ordre. □

b. Combien y a-t-il de quintés dans l'ordre ?

Démonstration.
Il y a $A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 = 360360$ quintés différents dans l'ordre. □

c. Combien y a-t-il de résultats possibles pour la course ?

Démonstration.
Par résultat de la course, on entend ordre d'arrivée de chaque cheval. Il y a $A_{15}^{15} = 15 \times 14 \times \ldots \times 2 \times 1 = 15! = 1307674368000$ résultats possibles. □

II.5.b) Lien entre nombre de p-arrangements et cardinal de l'ensemble des injections de E (fini) dans F (fini)

Proposition 9.

Soit E un ensemble fini de cardinal p.

Soit F un ensemble fini de cardinal n.

1) *L'ensemble $\mathcal{I}(E,F)$ des injections de E dans F est fini.*

2) *Le nombre d'injections de E dans F ($= \text{Card}(\mathcal{I}(E,F))$) est donné par :*

- 0 *si* $p > n$
- $\boxed{A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}} = n(n-1)\dots(n-(p-1))$ *sinon*

Démonstration.

1) *(Démonstration non formelle).*
Il existe une injection de E dans F seulement si $p \leqslant n$.
Ainsi : $A_n^p = 0$ si $p > n$.
Considérons maintenant $p \leqslant n$ et notons $E = \{x_1, \dots, x_p\}$.
Se donner une injection de E dans F c'est :

- se donner l'image de x_1 : $f(x_1) = y_1 \in F$
  (n choix possibles)
- se donner l'image de x_2 : $f(x_2) = y_2 \in F \setminus \{y_1\}$
  ((n-1) choix possibles)
- ...
- se donner l'image de x_p : $f(x_p) = y_p \in F \setminus \{y_1, \dots, y_{p-1}\}$
  ((n-(p-1)) choix possibles)

Ainsi, il y a : $n(n-1)\dots(n-(p-1))$ injections différentes de E dans F.

2) Il suffit de remarquer qu'un p-arrangement $(a_1, \dots, a_p)$ d'éléments de F deux à deux distincts n'est rien d'autre qu'une injection $f : [\![1,p]\!] \mapsto F$:

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [\![1,p]\!] & \to & F \\ & & i & \mapsto & a_i \end{array}$$

(le mot distinct doit faire penser à la définition d'injection) □

II.6. Notion de permutation

II.6.a) Définition et nombre de permutations

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

- Une **permutation** d'un ensemble E est une bijection de E sur lui-même.
- Si $\text{Card}(E) = n$, une permutation est un n-arrangement d'éléments de E.
- Si $\text{Card}(E) = n$, il y a exactement $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1 (= A_n^n)$ permutations de E.

Démonstration.
Il y a A_n^n n-arrangements de E autrement dit A_n^n permutations de E.
Or : $A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$ □

Exemple classique : tirages `SUCCESSIFS` et `SANS REMISE` de n boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
(avec ordre et sans répétition)

Exemple
On considère l'urne à 9 boules précédente et on procède au tirage successif des 9 boules de l'urne, sans remise. Les éléments suivants sont des permutations de l'ensemble $[\![1,9]\!]$.

$$(2,5,4,3,9,7,8,1,6) \quad (1,5,2,4,3,9,8,7,6) \quad (4,6,7,9,1,3,5,2,8)\dots$$

Combien y a-t-il de tirages en tout ?
Il y a 9 possibilités pour la première boule, 8 possibilités pour la deuxième (la première boule n'étant pas remise après tirage), 7 possibilités pour la troisième, ..., 2 possibilités pour la huitième et 1 possibilité pour la dernière.
Il y a donc $9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 2 \times 1 = 9! (= 362880)$ tirages différents.

De manière générale, si l'urne contient n boules et qu'on effectue n tirages `SUCCESSIFS` et `SANS REMISE`, il y a $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ tirages différents.

Exemple
On se propose de placer n personnes autour d'une table disposant de n chaises. À chaque personne est attribuée une seule chaise (et inversement chaque chaise reçoit une seule personne). Un placement de ces n personnes correspond donc à une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$. C'est une permutation de $[\![1,n]\!]$.

II.6.b) Lien entre nombre de permutations et cardinal de l'ensemble des applications bijectives de E (fini) dans F (fini)

Proposition 10.

Soit E un ensemble fini de cardinal p.

Soit F un ensemble fini de cardinal n.

1) L'ensemble $\mathcal{B}(E,F)$ des bijections de E dans F est fini.

2) Le nombre de bijections de E dans F ($= \text{Card}\left(\mathcal{B}(E,F)\right)$) est donné par :

- 0 *si $p \neq n$*
- $\boxed{A_n^n = n!}$ *sinon*

Démonstration.
Rappelons tout d'abord qu'il existe une bijection de E (fini) dans F (fini) si et seulement si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ (Proposition 5). Ainsi, $\text{Card}\left(\mathcal{B}(E,F)\right) = 0$ si $\text{Card}(E) \neq \text{Card}(F)$.

Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, il suffit de reprendre la démonstration précédente. En effet, d'après la Proposition 4, lorsque E et F sont finis et de même cardinal, une application f est injective ssi elle est bijective. Ainsi, dans ce cas, $\mathcal{B}(E,F) = \mathcal{I}(E,F)$. On a alors :

$$\text{Card}\left(\mathcal{B}(E,F)\right) \;=\; \text{Card}\left(\mathcal{I}(E,F)\right) \;=\; A_n^n \;=\; n!$$

□

II.7. Notion de p-combinaison

II.7.a) Définition et nombre de p-combinaisons

Définition

Soit E un ensemble fini.

- On appelle **p-combinaison** d'éléments de E toute partie à p éléments de E.
- On note $\binom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons d'éléments d'un ensemble E possédant n éléments *i.e.* le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.
- $\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-(p-1))}{p!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$

(le symbole $\binom{n}{p}$ est lu « p parmi n »)

Démonstration.
Considérons une partie à p éléments de E.
Ordonner ces éléments correspond à se donner un p-arrangement de ceux-ci.
Or, il y a A_p^p p-arrangements d'un ensemble à p éléments.
Ainsi, chaque p-combinaison d'éléments de E donne lieu à $p!$ p-arrangements différents. Autrement dit, il y $p!$ fois plus de p-arrangements que de p-combinaisons. On en conclut que :

$$p! \times \binom{n}{p} \;=\; A_n^p$$

□

Exemple classique : tirage `SIMULTANÉ` (`SANS` remise) de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
(sans ordre et sans répétition)

Exemple

On considère l'urne à 9 boules précédente et on procède au tirage simultané de 3 boules de l'urne. Les éléments suivants sont des 3-combinaisons d'éléments de $[\![1,9]\!]$.

$$\{1,3,8\} \quad \{2,7,5\} \quad \{4,1,2\} \quad \{1,2,3\} \quad \{4,5,6\} \quad \{1,7,9\} \quad \{2,7,8\} \dots$$

> Il n'y a pas d'ordre associé à ce tirage : les boules sont tirées en même temps. Notez que les ensembles $\{2,7,5\}$ et $\{2,5,7\}$ sont égaux.
> *(deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments)*

Combien y a-t-il de tirages en tout ?

Une 3-combinaison peut-être vue comme un 3-arrangement dans lequel l'ordre ne serait pas pris en compte. Comparons le nombre de 3-arrangements au nombre de 3-combinaisons. Si l'on dispose d'une 3-combinaison $\{1,3,8\}$, on peut produire à l'aide de ses éléments, les 3-arrangements suivants :

$$(1,3,8) \quad (1,8,3) \quad (3,1,8) \quad (3,8,1) \quad (8,1,3) \quad (8,3,1)$$

On a ainsi produit six 3-arrangements différents. Chacun de ces 3-arrangements correspond à une manière d'ordonner les éléments 1, 3, 8. Autrement dit, on considère toutes les permutations de l'ensemble $\{1,3,8\}$. Il y en a $3! = 6$.
Au final, à chaque 3-combinaison correspond $3!$ (*i.e.* six) 3-arrangements. Il y a donc $3!$ fois moins de 3-combinaisons que de 3-arrangements :

$$\binom{9}{3} = \frac{A_9^3}{3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

De manière générale, si l'urne contient n boules et qu'on effectue le tirage `SIMULTANÉ` de p boules, il y a $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ tirages différents.

II.7.b) Lien entre nombre de p-combinaisons et cardinal de l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$

Proposition 11.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) *L'ensemble $\mathcal{SC}\big([\![1,p]\!],[\![1,n]\!]\big)$ des applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est fini.*
2) *Le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ ($=$ Card $\big(\mathcal{SC}([\![1,p]\!],[\![1,n]\!])\big)$) est donné par :*
   - 0 *si $p > n$*
   - $\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}} = \frac{n(n-1)\dots(n-(p-1))}{p!}$ *sinon*

Démonstration.

Rappelons tout d'abord qu'une application strictement croissante d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ vers un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est injective. Or, si $p > n$ il n'existe pas d'injection de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Ainsi, $\text{Card}(\mathcal{C}([\![1,p]\!],[\![1,n]\!])) = 0$ si $p > n$.

Supposons alors $p \leqslant n$. Une application f de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est entièrement déterminée par la valeur de ses images $f(1),\dots,f(p)$.
Afin de se donner une application strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ on peut procéder comme suit.

- on choisit p valeurs différentes $y_1,\dots,y_p$ dans $[\![1,n]\!]$ afin de constituer l'ensemble $\text{Im}(f)$
- on range ces valeurs dans l'ordre croissant et on prend pour $f(i)$ la $i^{\text{ème}}$ plus petite valeur de l'ensemble $\{y_1,\dots,y_p\}$

(par exemple, dans le cas où $p = 3$ et $n = 9$, si on a $y_1 = 3$, $y_2 = 9$ et $y_3 = 7$, on peut définir une seule application $f : [\![1,3]\!] \to [\![1,9]\!]$ strictement croissante. Elle est définie par $f(1) = 3$, $f(2) = 7$ et $f(3) = 9$)

Ainsi, une application strictement croissante $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ est entièrement déterminer par le choix des p valeurs différentes dans $[\![1,n]\!]$. Il y a donc $\binom{n}{p}$ telles applications. □

Remarque
Si E est un ensemble fini à n éléments, il est possible d'obtenir une p-combinaison d'éléments de E *i.e.* une parties à p éléments de E par le procédé aléatoire suivant.

- Pour chaque élément x_i de E, on effetue un tirage aléatoire (on peut penser à un lancer de pièce) :
  - × en cas de succès (le lancer donne pile), x_i est choisi dans la combinaison.
  - × en cas d'échec (le lancer donne face), x_i n'est pas choisi dans la combinaison.

  On effectue en tout n tirages successifs. Si l'on obtient p succès lors de cette expérience, c'est que l'on a sélectionné p éléments dans E. Autrement dit, obtenir exactement p succès c'est obtenir une p-combinaison.

II.8. Propriétés des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

a) $\boxed{\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}$

b) Si $k < 0$ ou si $k > n$, on convient que $\binom{n}{k} = 0$.

c) Quelques cas simples :

- $\binom{n}{0} = 1$: la seule partie à 0 élément d'un ensemble à n éléments est l'ensemble vide.
- $\binom{n}{n} = 1$: la seule partie à n éléments d'un ensemble E à n éléments est l'ensemble E.
- $\binom{n}{1} = n$: il y a n parties à un élément d'un ensemble E à n éléments (ce sont les singletons $\{x_i\}$).
- $\binom{n}{n-1} = n$: il y a n parties à $n-1$ éléments d'un ensemble E à n éléments (ce sont les ensembles $E \setminus \{x_i\}$).

d) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$

e) <u>Formule du triangle de Pascal</u> :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

Cette formule s'écrit souvent sous la forme d'un triangle :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	...						

f) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$

g) Formule de Vandermonde :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \forall p \in [\![0,a+b]\!], \quad \boxed{\sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k} = \binom{a+b}{p}}$$

Démonstration.

d) Il y a deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

× Méthode théorique.
Soit E est un ensemble à n éléments.
Notons P_k l'ensemble des parties à k éléments de E.

L'application $\varphi \; : \left| \begin{array}{ccc} P_k & \to & P_{n-k} \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array} \right.$ est une bijection.

Il y a donc autant de parties à k éléments de E que de parties à $n-k$ éléments de E (les complémentaires des précédents).

e) Ici aussi, il y a deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-\cancel{1})-(k-\cancel{1}))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{k\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\,((n-1)-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} = \frac{(n-k)\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

En sommant ces deux éléments, on obtient :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(k+(n-k))\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

× Méthode théorique.
Soit E est un ensemble à n éléments. Soit $a \in E$. Notons alors P_k^a l'ensemble des parties de E à k éléments contenant a et $P_k^{\bar{a}}$ l'ensemble des parties de E à k éléments contenant a ne contenant pas a.
Tout $A \in P_k$ vérifie : $(A \in P_k^a)$ OU $(A \in P_k^{\bar{a}})$.
Autrement dit : $P_k = P_k^a \cup P_k^{\bar{a}}$ (union disjointe).
On en déduit que : $\text{Card}(P_k) = \text{Card}(P_k^a) + \text{Card}(P_k^{\bar{a}})$.
On conclut en remarquant tout d'abord que : $\text{Card}(P_k) = \binom{n}{k}$

puis que : $\text{Card}(P_k^a) = \binom{n-1}{k-1}$ $\left(\begin{array}{l}\text{on choisit } k-1 \text{ éléments} \\ \text{dans } E \setminus \{a\} \text{ et on ajoute } a\end{array}\right)$

et enfin : $\text{Card}(P_k^{\bar{a}}) = \binom{n-1}{k}$ (on choisit k éléments dans $E \setminus \{a\}$)

f) Encore deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$n\binom{n-1}{k-1} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = k\binom{n}{k}$$

× Méthode théorique.
On s'intéresse au nombre de couples formés d'un ensemble $A \in P_k$ et d'un élément a pris dans A. Il y en a : $\operatorname{Card} P_k \times \operatorname{Card} A = \binom{n}{k} \times k$.
On aurait pu raisonner différement : choisir d'abord un élément $a \in E$ puis former l'ensemble A en choisissant $k-1$ éléments autres que a et en ajoutant a. Au final, on obtient : $\operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} P_k^a = n\binom{n-1}{k-1}$

g) Encore et toujours deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de remarquer que : $(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b$ et d'appliquer la formule du binôme (*cf* Théorème 6).

× Méthode théorique.
Si E est un ensemble à $a+b$ éléments, on peut l'écrire comme union disjointe de F (à a éléments) et de G (à b éléments). Pour choisir une partie à p éléments de E on peut choisir une partie à k éléments de F et la compléter par une partie à $p-k$ éléments de G. Plus précisément, l'ensemble P_k est en bijection avec :

$$\bigcup_{k=0}^{p} (T_k \times R_{p-k})$$

où T_k est l'ensemble des parties à k éléments de F
et R_k est l'ensemble des parties à $p-k$ éléments de G.

□

II.8.a) Formule du binôme

Théorème 6.

Soient x et y des réels.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k}$$

Démonstration.
Preuve déjà effectuée dans un chapitre antérieur (par récurrence) □

Remarque
On rencontrera cette formule sous différentes formes (différentes valeurs pour x et y). On a notamment :

- $(x+y)^n = (y+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
- $(x-y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{n-k} y^k$
- $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
- $(1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
  Si E est un ensemble à n éléments, on a :
  $$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k \text{ (union disjointe)} \quad \text{et donc} \quad \operatorname{Card} E = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card}(P_k)$$
  On obtient ainsi une nouvelle démonstration de : $\operatorname{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
- $(1-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Exercice

Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{k}}{k+1}x^k$