CH VIII : Limites et continuité des fonctions réelles d'une variable réelle

Notations et définitions utiles

Définition *(notion d'intervalle)*

- Formellement, un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$) telle que :

$$\boxed{\forall (u,v) \in I^2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (u \leqslant x \leqslant v \ \Rightarrow\ x \in I)}$$

- De par cette définition, pour tout intervalle I non vide, on peut exhiber deux bornes telles que I est l'ensemble des éléments compris (au sens large ou strict) entre ses deux bornes. On peut distinguer deux cas.
  1) I est un intervalle à bornes finies $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$]a,b[, \quad [a,b[, \quad]a,b], \quad [a,b],$$

  2) I est un intervalle possédant au moins une borne infinie :

$$]-\infty,b[, \quad]-\infty,b], \quad]a,+\infty[, \quad [a,+\infty[, \quad]-\infty,+\infty[$$

- Les éléments a et b sont des réels appelés **bornes** (ou extrémités) **finies** de l'intervalle I.

Définition *(notion d'adhérence)*

- On appelle adhérence de l'intervalle I, et on note $\overline{I}$, l'intervalle I auquel on a rajouté ses bornes finies. Plus précisément, on a :
  1) si I à bornes finies $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: alors $\overline{I} = I \ \cup\ \{a,b\} = [a,b]$.
  ($\hookrightarrow$ vrai pour $I =]a,b[$, $I =]a,b]$, $I = [a,b[$, $I = [a,b]$)
  2) si I à borne(s) infinie(s) :
  - si $I =]-\infty,b[$ ou $I =]-\infty,b]$, alors $\overline{I} =]-\infty,b]$,
  - si $I =]a,+\infty[$ ou $I = [a,+\infty[$, alors $\overline{I} = [a,+\infty[$,
  - si $I =]-\infty,+\infty[$, alors $\overline{I} =]-\infty,+\infty[$.

Notations du chapitre

- On considérera des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: $\boxed{f : I \to \mathbb{R}}$
- Parmi les points considérés, on distinguera les cas suivants :
  - $x_0 \in I$: x_0 est un point de l'intervalle I,
  - $x_0 \in \overline{I}$: x_0 est un point adhérent à l'intervalle I *i.e.* un point de I ou une extrémité de I (même si cette extrémité n'est pas un élément de I).

Définition *(notion de voisinage d'un point)*

Voisinage d'un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (f est une fonction définie sur I).

- On appelle **voisinage** (fermé) de x_0 tout segment de la forme :
  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On appelle **voisinage épointé** (fermé) de x_0 tout ensemble de la forme $V \setminus \{x_0\}$ où V est un voisinage de x_0.
  Autrement dit, un voisinage épointé de x_0 est un ensemble de la forme : $[x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \ \cap\ [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Remarque
On ne considère ici que des voisinages centrés en x_0. En général, un voisinage (fermé) de x_0 est un segment $[x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2]$ avec $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Autrement dit, c'est un segment qui contient x_0 et non réduit à $\{x_0\}$.

Définition *(notion de voisinage de l'infini)*
Voisinage de $+\infty$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $+\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On appelle **voisinage** (fermé) de $+\infty$ tout intervalle de la forme : $[A, +\infty[$ où A est un réel tel que $A > 0$.
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [A, +\infty[$.

Voisinage de $-\infty$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $-\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On appelle **voisinage** (fermé) de $-\infty$ tout intervalle de la forme : $]-\infty, B]$ où B est un réel tel que $B > 0$.
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $-\infty$ s'il existe $B > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap]-\infty, B]$.

Remarque
- La notion de voisinage permet de formaliser l'idée de propriété vérifiée « à proximité » d'un point x_0 / « à proximité » de l'infini.
- La notion de convergence pour les suites est définie par une propriété vérifiée à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ *i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N} \cap [n_0, +\infty[$. Autrement dit, par une propriété vérifiée au voisinage de $+\infty$.

I. Notion de limite d'une fonction

I.1. Limite finie d'une fonction en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

I.1.a) Définition

Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet une **limite finie** au point x_0 s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

- On notera alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque
- Notons tout d'abord que :

$$\begin{array}{rl} & |x - x_0| \leqslant \alpha \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \leqslant x - x_0 \leqslant \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha \\ \text{et} & |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leqslant f(x) - \ell \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon \end{array}$$

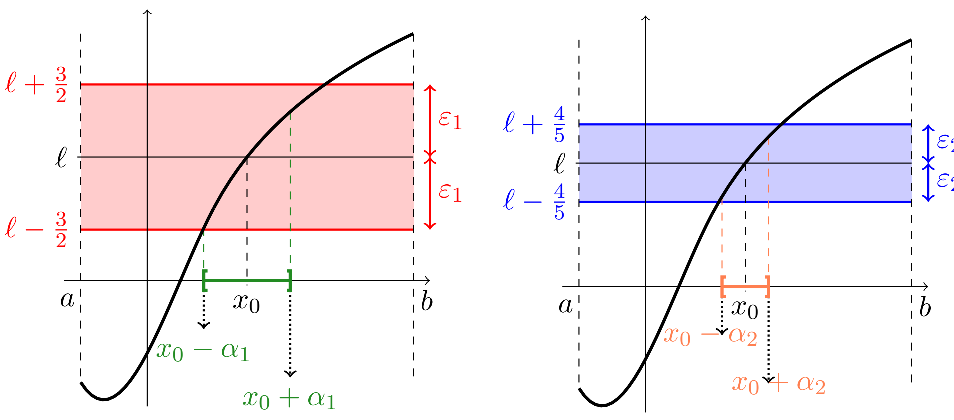
- L'idée derrière la propriété de limite est que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de ℓ ($f(x)$ est ε-proche de ℓ) dès que x est suffisamment proche de x_0 (x est α-proche de x_0).
- On peut adopter une présentation légèrement différente :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon}$$

  Cette propriété signifie qu'on peut contrôler l'écart entre $f(x)$ et ℓ (le rendre plus petit que n'importe quel ε) à condition de prendre x dans un voisinage de x_0 adapté.
- Le voisinage adapté dépend du ε choisi au départ.
  Plus ε est petit, plus x devra être proche de x_0, donc plus α sera petit.
- Notez que le point x_0 peut être une extrémité de I. Cette extrémité n'est pas forcément un point de I (prendre par exemple $I = [-2, 5[$ et $x_0 = 5$).

I.1.b) Représentation graphique

Fonction $f : I \to \mathbb{R}$ possédant une limite en un point $x_0 \in I$ où x_0 n'est pas une extrémité de I



Dans ces deux figures, on a considéré :

- $I =]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
- $x_0 \in]a, b[$.

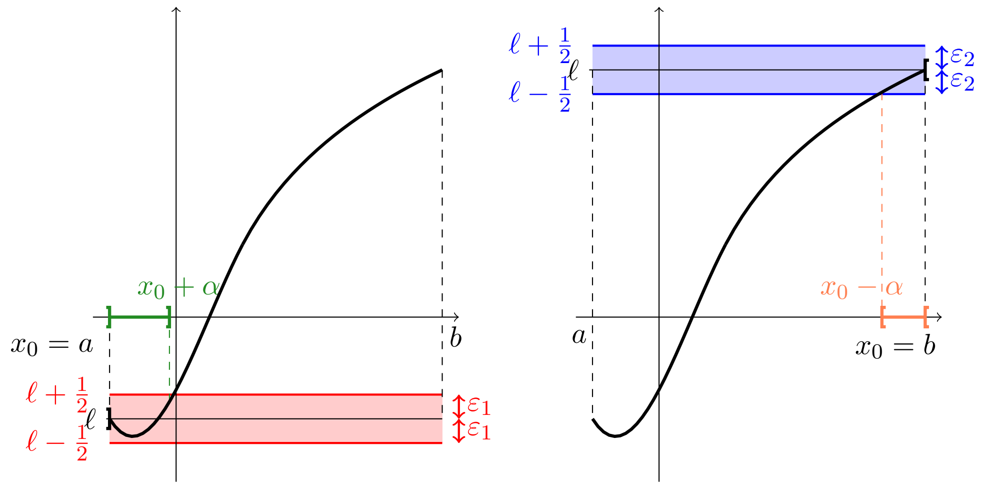
Quand x se rapproche de x_0, $f(x)$ doit se rapprocher de sa limite (si elle existe !) en x_0. Dans le cas présent, $f(x)$ semble se rapprocher de $f(x_0)$ quand x se rapproche de x_0 (résultat à venir).

1) Dans la première figure, on a choisi $\varepsilon_1 = \frac{3}{2}$. On doit alors être capable de trouver un $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout x dans $[x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1]$ (*i.e.* x suffisamment proche de x_0), les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande rouge.

2) Dans la seconde figure, on a choisi $\varepsilon_2 = \frac{4}{5} < \varepsilon_1$. La bande bleue est donc moins large que la rouge et il faut choisir un voisinage plus petit de x_0 pour assurer que les éléments de ce voisinage auront leur image dans la bande bleue.

Fonction $f : I \to \mathbb{R}$ possédant une limite en une extrémité de I

Ici, x_0 est une extrémité de I qui n'est pas forcément contenue dans I.



1) Dans la première figure, on a considéré :

- $I =]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$. En particulier, f n'est pas définie en a.
- $x_0 = a$. On a alors : $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] =]x_0, x_0 + \alpha]$.

La fonction f admet une limite en $x_0 = a$, notée ℓ sur le dessin.

Exemple

$f : x \mapsto x \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$ et admet une limite en 0. Plus précisément, on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

2) Dans la deuxième figure, on a considéré :

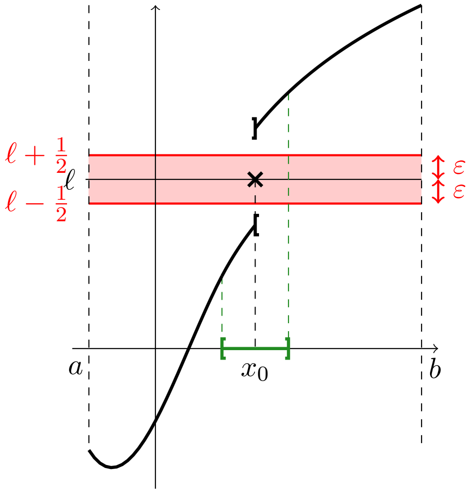
- $I =]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$. En particulier, f n'est pas définie en b.
- $x_0 = b$. On a alors : $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] = [x_0 - \alpha, x_0[$.

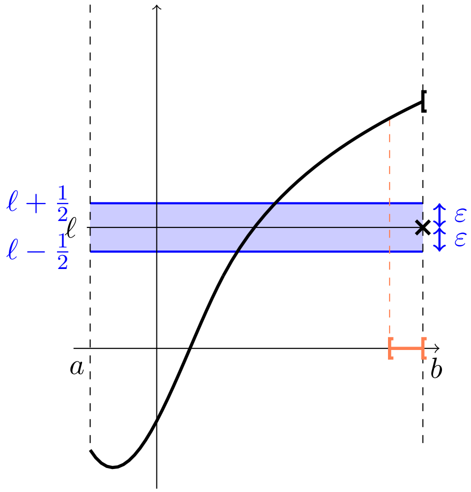
La fonction f admet une limite en $x_0 = b$, notée ℓ sur le dessin.

Exemple

$f : x \mapsto x \ln(-x)$ est définie sur $]-\infty, 0[$ et admet une limite en 0. Plus précisément, on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Fonction $f : I \to \mathbb{R}$ ne possédant pas de limite au point $x_0 \in I$





1) Dans la première figure, on considère une fonction $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ avec $x_0 \in]a,b[$ (f est définie en x_0, point de l'intervalle de définition).

Si la fonction admettait une limite finie ℓ en x_0, on aurait $\ell = f(x_0)$.
Si l'on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (bande rouge), on ne peut trouver de voisinage de x_0 dont tous les éléments ont leur image dans la bande rouge.
La fonction f n'admet donc pas de limite finie en x_0.

2) Dans la seconde figure, on considère une fonction $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ avec $x_0 = b \in]a,b]$ (f est définie en x_0, point de l'intervalle de définition).

Comme précédemment, on ne peut trouver de voisinage de x_0 dont tous les éléments ont leur image dans la bande bleue (correspondant à $\varepsilon = \frac{1}{2}$).
La fonction f n'admet donc pas de limite finie en x_0.

Remarque
Pour ces deux figures, l'absence de limite finie en x_0 provient du fait que la fonction présente un saut en x_0. Cela renvoie à l'approche (incorrecte mais bonne première approximation) de la continuité vue au lycée : une fonction est continue en x_0 si l'on peut tracer sa courbe sans lever le crayon.

I.1.c) Unicité de la limite d'une fonction en un point

Théorème 1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

- *Si f admet au point x_0 une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$, celle-ci est unique.*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \ell_1 = \ell_2}$$

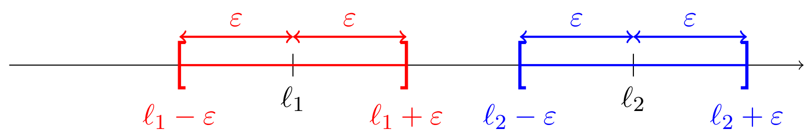
Démonstration.
Supposons par l'absurde qu'il existe ℓ_1 et ℓ_2 deux réels tels que :
× $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$
× $\texttt{NON}(\ell_1 = \ell_2)$ *i.e.* $\ell_1 \neq \ell_2$.

Quitte à renommer ℓ_1 et ℓ_2, supposons que $\ell_1 < \ell_2$. Soit $\varepsilon > 0$.

1) Comme $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que :
$\forall x \in I \ \cap \ [x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1], \ |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$.

2) Comme $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que :
$\forall x \in I \ \cap \ [x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2], \ |f(x) - \ell_2| < \varepsilon$.

Cette situation est résumée par la représentation graphique ci-après.



Notons $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$.
On a alors : $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset [x_0 - \alpha_i, x_0 + \alpha_i]$ (pour $i \in \{1, 2\}$).
Soit $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

- D'après ***1)***, $f(x)$ est situé dans l'intervalle rouge.
- D'après ***2)***, $f(x)$ est situé dans l'intervalle bleu.

Impossible ! On a donc démontré, par l'absurde, que $\ell_1 = \ell_2$. □

Remarque
La démonstration effectuée ici est similaire à celle du CH 6 « Suites réelles : convergence ». Le schéma de démonstration ainsi que le dessin associé sont les mêmes. La seule différence notable est la suivante.

- Ici, on considère une limite en x_0. Ainsi, les propriétés ***1)*** et ***2)*** sont vérifiées dans des voisinages de x_0.
- En ce qui concerne les suites, les propriétés de convergence sont vérifiées dans des voisinages de $+\infty$.

On retiendra cette technique de démonstration et le fait qu'elle s'adapte facilement aux types de voisinages considérés.

Théorème 2.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ définie au point } x_0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell = f(x_0)}$$

Démonstration.
Comme $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, on a :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ \cap \ [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Comme $x_0 \in I$, pour tout $\alpha > 0$, on a : $x_0 \in I \ \cap \ [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
On en déduit que : $\forall \varepsilon > 0,\ |f(x_0) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Ceci implique (démonstration simple par contraposée) que $f(x_0) = \ell$. □

Remarque

- Le Théorème 1 stipule l'unicité de la notion de limite en un point $x_0 \in \overline{I}$. Dans ce cas, x_0 n'est pas forcément un point de I et la fonction f n'est (éventuellement) pas définie en x_0.
- Le Théorème 2 précise le premier théorème dans le cas où la fonction est définie au point x_0. Le premier énoncé est évidemment toujours vérifié. On récupère de plus la valeur de cette limite : c'est $f(x_0)$.

I.2. Limite infinie en un point

Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

1) On dit que f admet la limite $+\infty$ au point x_0 si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow \ f(x) \geqslant B\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.

2) On dit que f admet la limite $-\infty$ au point x_0 si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow \ f(x) \leqslant -B\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque

- Cette notion signifie que l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut (*i.e.* plus grand que n'importe quel réel B fixé à l'avance) en choisissant x suffisamment proche de x_0.
- On peut adopter une présentation légèrement différente :
  1) $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \ \cap \ [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ f(x) \geqslant B$
  2) $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \ \cap \ [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ f(x) \leqslant B$
- L'élément $x_0 \in \overline{I}$ de la définition est forcément une extrémité de I qui n'est pas dans I : si f est définie en x_0, f ne peut pas tendre vers $+\infty$ en x_0 sinon $f(x_0)$ serait plus grand que n'importe quel $B > 0$ choisi à l'avance.
- Pour que les notations telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ soient valides, il faut vérifier qu'une telle limite, lorsqu'elle existe, est unique.
  C'est bien le cas !

Théorème 3.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

- *Si f admet une limite ℓ (éventuellement infinie) au point x_0, celle-ci est unique. Autrement dit :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}} \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \ell_1 = \ell_2}$$

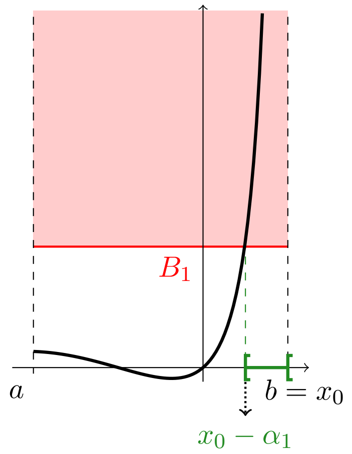
(où l'on a noté $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)

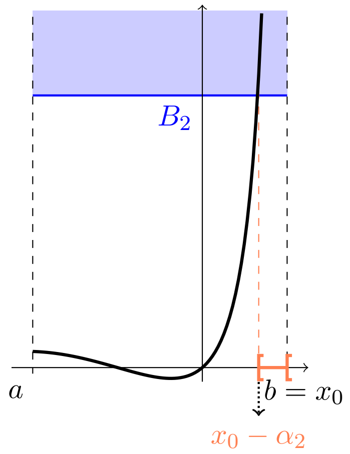
Démonstration.
Si f admet une limite (éventuellement infinie) en x_0, on peut trouver un voisinage de x_0 tel que :

× <u>soit</u> $f(x)$ est aussi proche que souhaité de ℓ (cas où $\ell \in \mathbb{R}$),
× <u>soit</u> $f(x)$ est aussi grand que souhaité (cas où $\ell = +\infty$),
× <u>soit</u> $f(x)$ est aussi grand dans les négatifs que souhaité (cas où $\ell = -\infty$).

et ces 3 cas sont disjoints. $\square$

Représentation graphique





Dans ces deux figures, on a considéré :

- $I =]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
- $x_0 \in]a, b[$.

Comme dit précédemment, x_0 est une extrémité de l'intervalle I qui n'est pas un point de I.

1) Dans la première figure, on a choisi $B_1 = 2$. On doit alors être capable de trouver un $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout x dans $[x_0 - \alpha_1, x_0[$ (*i.e.* x suffisamment proche de x_0), les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande rouge.

2) Dans la seconde figure, on a choisi $B_2 = 4,5 > B_1$. Il faut donc choisir un voisinage de x_0 plus petit pour assurer que les éléments de ce voisinage auront leur image dans la bande bleue.

I.3. Extension de la notion de limite en un point

I.3.a) Limite finie à gauche et limite finie à droite

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

Soient $x_0 \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

1) On dit que f (définie à gauche de x_0) admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme **limite finie à gauche** au point x_0 si $f_{|]-\infty, x_0[}$ admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme limite au point x_0.
(on considère f sur l'ensemble des points **strictement** *à gauche de x_0)*

Autrement dit, si la fonction f vérifie la propriété :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ \forall x \in I, \ (x_0 - \alpha \leqslant x < x_0 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} \ell$.

2) On dit que f (définie à droite de x_0) admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme **limite finie à droite** au point x_0 si la fonction $f_{|]x_0,+\infty[}$ admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme limite au point x_0.
(on considère f sur l'ensemble des points **strictement** *à droite de x_0)*
Autrement dit, si la fonction f vérifie la propriété :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 < x \leqslant x_0 + \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque

- Pour qu'une fonction admette une limite à gauche (resp. à droite) en x_0, il faut qu'elle soit définie à gauche (resp. à droite) de x_0.

  Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$.
  Elle n'admet pas de limite à gauche en 0 puisque n'est même pas définie à gauche de 0.
- On peut adopter une présentation légèrement différente :
  1) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I\ \cap\ [x_0 - \alpha, x_0[,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$
  2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap\ ]x_0, x_0 + \alpha],\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$
- Cette définition permet d'étendre la notion de limite au cas où f est définie sur une union d'intervalles (comme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$) et pas seulement sur un intervalle I.
- Il y a unicité de la limite à gauche (resp. à droite) lorsqu'elle existe.
  (déjà démontré ! La limite à gauche de f, lorsqu'elle existe, n'est rien d'autre que la limite de la fonction $f_{|]-\infty,x_0[}$)

I.3.b) Extension au cas des limites infinies à gauche et à droite

Définition

1) On dit que f admet la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) à gauche en x_0 si $f_{|]-\infty,x_0[}$ admet une $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite en x_0.
(exercice : écrire les propriétés mathématiques correspondantes)

2) On dit que f admet la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) à droite en x_0 si $f_{|]x_0,+\infty[}$ admet une $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite en x_0.
(exercice : écrire les propriétés mathématiques correspondantes)

Exemple

Quelles sont les limites gauche et droite de $g\ :\ \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}\right.$ en 0 ?

I.4. Limites en l'infini

Définition *(limite en $+\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et I un intervalle d'extrémité supérieure $+\infty$.

1) On dit que f admet la limite ℓ en $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2) On dit que f admet la limite $+\infty$ en $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall B \in \mathbb{R},\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A\ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3) On dit que f admet la limite $-\infty$ en $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A\ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

La notion de limite en $-\infty$ est analogue à celle de limite en $+\infty$.

Définition *(limite en $-\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et I un intervalle d'extrémité inférieure $-\infty$.

1) On dit que f admet la limite ℓ en $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2) On dit que f admet la limite $+\infty$ en $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3) On dit que f admet la limite $-\infty$ en $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque

- Comme précédemment, si une fonction admet une limite (éventuellement infinie) en $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors celle-ci est unique. La démonstration est analogue à la précédente. La principale différence réside dans le fait que les éléments x sont choisis dans des voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$).
- Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ c'est donc dire que l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que souhaité (plus grand que n'importe quel réel A) pour x suffisamment grand dans les négatifs.

II. Limite des opérations sur les fonctions

II.0. Notations de cette section

Dans tout ce qui suit :

× on considère des fonctions f et g définies sur un intervalle I,

× on considère un « point » x_0 de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et des limites finies $\ell, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.

× il est supposé que f et g possèdent une limite (finie ou non) au point x_0.

Cette notation concise (à l'aide de $\overline{\mathbb{R}}$) permet de faire apparaître les résultats sous forme de tableaux envisageant tous les cas.

On parlera de *forme indéterminée* (et on notera F.I.) quand on ne peut déterminer, de manière générale, la limite d'une opération sur les fonctions. Dans ce cas, il faudra faire une étude au cas par cas.

II.1. Limite d'une somme $f + g$

	Somme : $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$		
$\lim\limits_{x_0} g$ \ $\lim\limits_{x_0} f$	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Ce cas amène donc à considérer une F.I. : $\boxed{+\infty - \infty}$

II.2. Limite d'un produit $f \times g$

$\lim_{x_0} g$ \ $\lim_{x_0} f$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
Produit : $\lim_{x \to x_0} (f \times g)(x)$					
$\ell_2 > 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Ce cas amène donc à considérer une F.I. : $\boxed{0 \times \infty}$

Cas des limites infinies : les résultats sont donnés par la règle des signes.

II.3. Limite de l'inverse $\dfrac{1}{f}$

$\lim_{x_0} f$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
Inverse : $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f}(x)$				
Si $f > 0$ sur V_{x_0}	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	0	
Si $f < 0$ sur V_{x_0}	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$		0

*(**Note** : V_{x_0} est un voisinage épointé de x_0 sur lequel f ne s'annule pas. Ceci permet de considérer l'inverse $\frac{1}{f}$)*

II.4. Limite d'un quotient

$\lim_{x_0} g$ \ $\lim_{x_0} f$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
Quotient : $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}(x)$					
$\ell_2 > 0$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$ et $g > 0$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = 0$ et $g < 0$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	F.I.	F.I.
$-\infty$	0	0	0	F.I.	F.I.

Ce cas amène donc à considérer deux F.I. : $\boxed{\dfrac{0}{0} \quad , \quad \dfrac{\infty}{\infty}}$

Application à la continuité en un point

Propriété

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Supposons que f et g sont continues en un point $x_0 \in I$.

Alors les fonctions :

- × somme $f + g$,
- × produit $f \times g$,
- × quotient $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de x_0),

sont des fonctions continues en x_0.

II.5. Limite et composition

II.5.a) Limite de la composée $g \circ f$

Théorème 4.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.
(permet de considérer la fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$)

Soit $x_0 \in \overline{I}$. Supposons que :

× *f admet la limite (éventuellement infinie) x_1 en x_0,*

× *g admet la limite (éventuellement infinie) ℓ en x_1.*

Alors la fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ admet la limite ℓ en x_0.

On peut résumer cette situation comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_1 \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to x_1} g(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g\circ f\ (x) \ = \ \lim_{x\to x_1} g(x) \ = \ \ell}$$

Remarque

- Les éléments x_1 et ℓ sont éventuellement infinis. D'ailleurs, on peut aussi adapter cet énoncé aux cas $x_0 = +\infty$ (I est alors d'extrémité $+\infty$) et $x_0 = -\infty$ (I est alors d'extrémité $-\infty$).
- L'idée derrière ce théorème est de pouvoir écrire l'égalité suivante :

$$\lim_{x\to x_0} g\circ f\ (x) \ = \ \text{« } g(\lim_{x\to x_0} f(x)) \text{ »}$$

  On ne peut cependant pas toujours enlever les « » puisque rien ne dit que g est définie en $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (cet élément peut notamment être infini).
- Dans le cas où f est continue en $x_0 \in \overline{I}$ (*i.e.* admet une limite finie en x_0) et g continue en $x_1 \in \overline{J}$ (*i.e.* admet une limite finie en x_0), ce théorème permet d'affirmer que la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.

Exemple

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{3x^3+5(\ln x)^5}{-x^3-\ln x}} = \lim\limits_{x\to-3} e^x = e^{-3}$

II.5.b) Application : calcul de limites par changement de variable

On s'intéresse à la fonction $h : x \mapsto x \ln x$ (définie sur $]0, +\infty[$). Plus précisément, on souhaite déterminer la limite de h en 0.

- On a : $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

  $\hookrightarrow$ on est donc amené à résoudre une F.I.
- On remarque que : $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{\cancel{\ln(1)} - \ln x}{\frac{1}{x}} = -x\ln x = -h(x)$

  $\hookrightarrow$ on a donc $h(x) = -\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$
- La fonction h apparaît comme composée de la fonction $g : x \mapsto -\dfrac{\ln x}{x}$ et de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.
- On applique alors le théorème de composition à cette nouvelle écriture :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} \ = \ \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} \ = \ 0$$

On a donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x \ = \ 0.$

Remarque

Grâce à cette technique de changement de variable, on est passé d'un calcul de limite en 0^+ à un calcul de limite en $+\infty$. En déplaçant le problème, on a levé la F.I. et ce grâce à nos connaissances sur le comportement des fonctions en $+\infty$ (*cf* paragraphe sur les croissances comparées plus loin).

Un point sur la rédaction

Exercice
Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ \ln x$. On pourra effectuer un changement de variable.

On rédige alors comme suit.

- On pose $X = \frac{1}{x}$.
- Ainsi, si $x \to 0^+$, alors $X \to +\infty$ ($x \to 0^+ \ \Rightarrow \ X \to +\infty$).
- On a alors :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \to +\infty} \ - \ \frac{\ln(X)}{X} = 0$$

(on a remplacé chaque occurrence de x par $\frac{1}{X}$ dans l'expression $h(x) = x \ \ln x$, ce qui correspond au changement de variable $X = \frac{1}{x}$)

Remarque
En résumé, le théorème de composition des limites s'utilise :

1) **de manière directe** comme dans la section Exemple précédente. La fonction apparaît sous forme d'une composée et l'application du théorème fournit la valeur de la limite recherchée.

2) **de manière indirecte** lorsque le calcul d'une limite amène à une F.I. L'utilisation d'un **changement de variable** (le plus souvent mentionné dans l'énoncé) doit permettre de lever la F.I.

II.5.c) Limite d'une suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$

Théorème 5.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

Soit (u_n) une suite d'éléments de I.

Supposons que :

× *(u_n) admet la limite x_0 quand $n \to +\infty$,*

× *f admet la limite ℓ (éventuellement infinie) en x_0.*

Alors la suite $(f(u_n))$ admet la limite ℓ en x_0.

On peut résumer cette situation comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0 \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f(u_n) \ = \ \lim_{x \to x_0} f(x) \ = \ \ell}$$

Démonstration. (partielle)
On se restreint au cas où x_0 et ℓ sont des limites finis.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet la limite ℓ en x_0, on sait qu'il existe $\alpha > 0$ tq :

$$\forall x \in I, (|x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

Or $u_n \in I$. On peut donc appliquer la propriété précédente en $x = u_n$:

$$(|u_n - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

Il suffit maintenant de constater que comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0$, il existe un certain rang n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0, \ |u_n - x_0| \leqslant \alpha$.
On a donc : $\forall n \geqslant n_0, \ |f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. $\square$

Remarque

- On peut adapter cet énoncé aux cas $x_0 = +\infty$ (I est alors d'extrémité $+\infty$) et $x_0 = -\infty$ (I est alors d'extrémité $-\infty$).
- L'idée derrière ce théorème est de pouvoir écrire l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \;=\; « f(\lim_{n\to+\infty} u_n) »$$

  On ne peut cependant pas toujours enlever les « » puisque rien ne dit que f est définie en $\lim\limits_{x\to x_0} u_n$ (cet élément peut notamment être infini).
- Dans le cas où (u_n) est convergente (*i.e.* si x_0 est fini) et f est continue en $x_0 \in \overline{I}$ (*i.e.* si ℓ est finie), ce théorème permet d'affirmer que la suite $(f(u_n))$ est convergente.

  Ce résultat est notamment utile pour les suites définies par une relation de récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Ce théorème peut aussi être utilisé de manière négative pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en x_0.

  Plus précisément, si (u_n) et (v_n) sont deux suites, on a le résultat suivant :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \;=\; x_0 \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad f \text{ n'a pas de limite en } x_0}$$

  (démonstration aisée par l'absurde)

Exercice
Démontrer que $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 1.

On considère les suites (u_n) et (v_n) de terme général $u_n = 1-\frac{1}{n}$ et $v_n = 1+\frac{1}{n}$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \;=\; 1 \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
- $f(u_n) = \lfloor 1 - \frac{1}{n} \rfloor = 0 \to 0$ et $f(v_n) = \lfloor 1 + \frac{1}{n} \rfloor = 1 \to 1$

Le résultat précédent nous permet d'affirmer que f n'a pas de limite (finie ou infinie) en 1. En particulier, f n'est pas continue en 1.

II.6. Lever une F.I.

Tout d'abord résumons les F.I. rencontrées lors de l'étude des différentes opérations algébriques :

$$\boxed{\infty - \infty \quad , \quad 0 \times \infty \quad , \quad \frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

Afin de lever un F.I., on pourra penser à utiliser l'une des méthodes (plus généralement une combinaison des méthodes) suivantes.

a) Factoriser par le terme dominant (*i.e.* celui ayant la plus forte croissance).

b) Penser à la quantité conjuguée.

c) Pour les fonctions puissances : retour à la définition à l'aide des fonctions exp et ln.

d) Faire apparaître une limite connue par changement de variable.

e) Penser aux croissances comparées.

f) Utilisation du taux d'accroissement.

g) Utilisation d'inégalités.

II.6.a) Factoriser par le terme dominant

Exemple

1) Dans le cas de fonctions rationnelles :

- Limite de $f(x) = \dfrac{-5x^2 + 37x - 4}{8x^2 - 2}$ en $+\infty$.
- Limite de $g(x) = \dfrac{x^7 - 1}{52x^6 + 3x^2 - 2x}$ en $-\infty$.

Définition
Une fonction f est appelée **fonction rationnelle** si elle le quotient de deux fonctions polynômes.

Propriété
Une fonction rationnelle a même limite, en $+\infty$ et $-\infty$, que le rapport de ses monômes de plus haut degré.

2) Dans le cas général :

- Limite de $f(x) = \dfrac{x^2 e^x - x e^{2x}}{x^3(\ln x) + x(\ln x)^3}$ en $+\infty$.
- Limite de $g(x) = \dfrac{x e^x + x^2 + e^{x^3}}{x^3 + 5}$ en $-\infty$.
- Limite de $h(x) = \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ en $+\infty$.

II.6.b) Penser à la quantité conjuguée

On utilise généralement cette technique lorsque l'on a à faire avec une fonction s'écrivant comme différence de deux racines comparables.

Exemple
- Limite de $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}$ en $+\infty$.
- Limite de $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$.

II.6.c) Fonctions puissances

Lorsque l'on est confronté à une fonction avec puissance en x, on revient à la définition avec les fonctions exponentielle et logarithme.

Exemple
- Limite de $f(x) = x^x$ en 0^+.
- Limite de $g(x) = \dfrac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$ en $+\infty$.

II.6.d) Changements de variable

Faire un changement de variable permet de modifier le « point » où l'on cherche la limite.

Exemple
- Limite de $f(x) = x^2\, e^{\frac{1}{x}}$ en 0^+ *(on pourra poser $X = \frac{1}{x}$)*
- Limite de $g(x) = \ln x \times \ln(\ln x)$ en 1 *(on pourra poser $X = \ln x$)*

II.6.e) Croissances comparées

Cette technique est souvent combinée à celle de mise en facteur du terme dominant.

Exemple
- Limite de $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{9x^3}$ en $+\infty$.
- Limite de $g(x) = \dfrac{e^{2x-1}}{(\ln x)^4}$ en $+\infty$.

II.6.f) Utilisation du taux d'accroissement

Théorème 6.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$ alors, **par définition**, *on a :*

a) $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$

b) $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)}$ *(formulation équivalente)*

On a notamment :

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1}$

Exemple
- Limite de $f(x) = \left(1 + x^3\right)^{1/x}$ en 0.
- Limite de $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$.

III. Compatibilité de la notion de limite avec la relation d'ordre

III.1. Démontrer des inégalités sur les limites finies

Théorème 7. *(« Passage à la limite » dans les inégalités)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.

On suppose que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0.
(i.e. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$)

On a alors :

a) *Si dans un voisinage de x_0 on a $f \geqslant u$ alors on a : $\ell \geqslant u$.*

b) *Si dans un voisinage de x_0 on a $f \leqslant v$ alors on a : $\ell \leqslant v$.*

c) *Si dans un voisinage de x_0 on a $u \leqslant f \leqslant v$ alors on a : $u \leqslant \ell \leqslant v$.*

On peut résumer cet énoncé comme suit.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ u \leqslant f \leqslant v \text{ au voisinage de } x_0 \\ \bullet\ \ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u \leqslant \ell \leqslant v$$

Remarque

- On rappelle (*cf* début du chapitre) qu'une propriété relative à une fonction f, définie sur I, est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
- Ainsi, lorsque l'on suppose « $f \geqslant u$ dans un voisinage de x_0 », cela signifie qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \ f(x) \geqslant u$$

Démonstration.

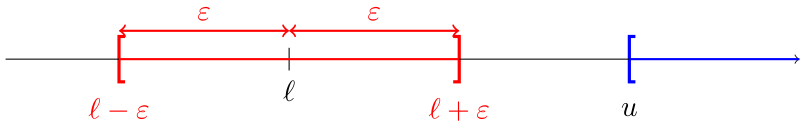
Supposons que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0.

a) On procède par l'absurde.
On suppose donc :

× qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que : $\forall x \in I \cap [x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1], \ f(x) \geqslant u$,

× et que $\ell < u$.

L'idée de la démonstration est contenue dans le dessin suivant :



Pour que ce dessin soit valide, il faut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < u$.
On choisit alors $\varepsilon = \dfrac{u - \ell}{2}$.
Comme $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2], \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Ce qui revient à dire que, sur cet ensemble : $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$.
Notons $\alpha = \min\,(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap [x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2]$. Alors :

× $f(x)$ est dans l'intervalle rouge,

× $f(x)$ est dans l'intervalle bleu.

Impossible !

b) Si $f \leqslant v$, alors $-f \geqslant -v$ et donc, par le point ***a)*** précédent, $-\ell \geqslant -v$.
On en déduit que $\ell \leqslant v$.

c) Combinaison des points ***a)*** et ***b)***. □

Ce théorème ne permet pas de démontrer qu'une fonction admet une limite mais permet de comparer des limites **existantes**.
On ne peut « passer à la limite » dans une égalité que si les objets qu'on considère possèdent une limite.

Remarque

- Cet énoncé reste vrai lorsque $x_0 = +\infty$ (I est alors d'extrémité $+\infty$) et $x_0 = -\infty$ (I est alors d'extrémité $-\infty$).
- Ce théorème peut être utilisé lorsque la fonction f vérifie une inégalité stricte. Cependant, la conclusion reste une inégalité large.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\bullet \ \ u < f < v \text{ au voisinage de } x_0 \\ \bullet \ \ \ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \ u \leqslant \ell \leqslant v}$$

(par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges)

Théorème 8. *(Théorème de comparaison des limites)*

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

Supposons que :

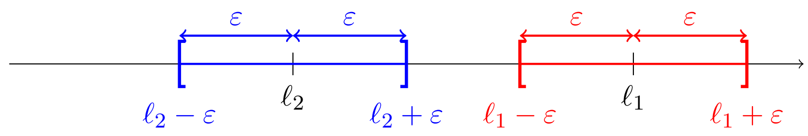
× *f admet une limite finie $\ell_1 \in \mathbb{R}$ en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$,*

× *g admet une limite finie $\ell_2 \in \mathbb{R}$ en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$.*

Si dans un voisinage de x_0 on a $f \leqslant g$ alors on a : $\ell_1 \leqslant \ell_2$.
On peut résumer cet énoncé comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\bullet \ \ f \leqslant g \textit{ au voisinage de } x_0 \\ \bullet \ \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \\ \bullet \ \ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2\end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell_1 \leqslant \ell_2}$$

Démonstration.
On suppose que f et g admettent des limites finies en x_0.
Comme pour le théorème précédent, on raisonne alors par l'absurde en supposant que $f \leqslant g$ sur un voisinage V de x_0 et que $\ell_1 > \ell_2$.
On s'appuie alors sur le dessin suivant.



On choisit $\varepsilon = \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{3}$ (permet de valider ce dessin).

- Comme $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$, il existe $V^1_{x_0}$ (un voisinage de x_0 tel que, pour tout $x \in V^1_{x_0}$, l'intervalle rouge contient $f(x)$).
- Comme $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$, il existe $V^2_{x_0}$ (un voisinage de x_0 tel que, pour tout $x \in V^2_{x_0}$, l'intervalle bleu contient $f(x)$).

On en déduit que, sur le plus petit de ces deux voisinages (*i.e.* sur $V^1_{x_0} \cap V^2_{x_0}$) on a $f > g$. Mais alors sur $V \cap V^1_{x_0} \cap V^2_{x_0}$ on a : $f > g$ et $f \leqslant g$.
Impossible ! □

⚠ Ce théorème ne permet pas de démontrer qu'une fonction admet une limite mais permet de comparer des limites **existantes**.

Remarque

Les remarques du théorème précédent s'appliquent à cet énoncé.

- Cet énoncé reste vrai lorsque $x_0 = +\infty$ (I est alors d'extrémité $+\infty$) et $x_0 = -\infty$ (I est alors d'extrémité $-\infty$).
- Ce théorème peut être utilisé lorsque f est comparé à g par une inégalité stricte. Cependant, la conclusion reste une inégalité large.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\bullet \ \ f < g \text{ au voisinage de } x_0 \\ \bullet \ \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \\ \bullet \ \ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2\end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell_1 \leqslant \ell_2}$$

(par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges)

III.2. Existence d'une limite par encadrement

III.2.a) Cas des limites finies

Théorème 9. *(Théorème d'encadrement)*

Soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ *et soit* $\ell \in \mathbb{R}$.

Supposons que :

- × $f \leqslant g \leqslant h$ *au voisinage de* x_0,
- × f *admet la limite finie* ℓ *en* x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$,
- × h *admet la limite finie* ℓ *en* x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$.

Alors la fonction g *admet une limite finie en* x_0. *De plus,* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

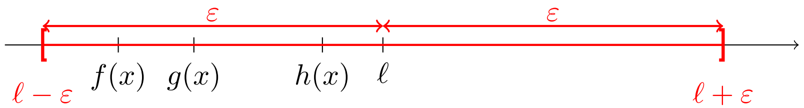
On peut résumer ce théorème comme suit.

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} f(x) & \leqslant & g(x) & \leqslant & h(x) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle x\to x_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to x_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to x_0} \\ \ell & \leqslant & \ell & \leqslant & \ell \end{array}}$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.

- Comme $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$, il existe un voisinage $V_{x_0}^1$ tel que : $f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.
- Comme $h(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$, il existe un voisinage $V_{x_0}^2$ tel que : $f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

On en déduit que pour tout x dans le plus petit de ces deux voisinages :
$\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + \varepsilon$ et donc $g(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.



□

Remarque
Les remarques précédentes s'appliquent encore.

- Cet énoncé reste vrai lorsque $x_0 = +\infty$ (I est alors d'extrémité $+\infty$) et $x_0 = -\infty$ (I est alors d'extrémité $-\infty$).
- Ce théorème peut être utilisé avec une hypothèse énonçant une inégalité stricte. La conclusion reste la même.

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} f(x) & < & g(x) & < & h(x) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle x\to x_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to x_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to x_0} \\ \ell & \leqslant & \ell & \leqslant & \ell \end{array}}$$

- Attention, on ne peut parler de passage à la limite pour cet énoncé puisqu'on **démontre** que g admet une limite en x_0 et qu'on ne le sait pas initialement.
- Ce théorème d'encadrement fait partie des techniques pouvant être utilisées pour lever une F.I. : ***g)*** Utilisation d'inégalités.

Exemple

- Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{2x + \lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor}$ en $+\infty$.
- Déterminer la limite de $g(x) = \dfrac{3}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$ en 0.

Corollaire 1.

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$ (ou $x_0 = +\infty$, ou $x_0 = -\infty$ ...).

Supposons que :

× $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

× *il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que : $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$.*

On a alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Démonstration.
On a $\ell - g(x) \leqslant f(x) \leqslant \ell + g(x)$ pour tout x dans V_{x_0}.
On utilise le théorème précédent pour conclure. □

Exemple

On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \end{array} \right.$

1) Démontrer que, pour tout $x \neq 0$, $|f(x) - 1| \leqslant |x|$.

2) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

1) $|f(x) - 1| = \left| x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor - 1 \right| = \left| x \left(\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor - \dfrac{1}{x} \right) \right| = |x| \left| \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor - \dfrac{1}{x} \right| \leqslant |x|$

car pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $|\lfloor u \rfloor - u| \leqslant 1$.

2) Comme $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, le théorème d'encadrement permet d'affirmer, à l'aide de l'inégalité précédente, que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) - 1 = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

On prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

III.2.b) Cas des limites infinies

Théorème 10.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$ (ou $x_0 = +\infty$, ou $x_0 = -\infty$ ...).

Supposons qu'au voisinage de x_0, on a : $f \leqslant g$.

On a alors :

a) *Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.*

b) *Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} \bullet \ f \leqslant g \text{ au voisinage de } x_0 \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty}$$

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} \bullet \ f \leqslant g \text{ au voisinage de } x_0 \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty}$$

Démonstration.

a) Soit $B > 0$.

- Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, il existe un voisinage $V_{x_0}^1$ tel que $f(x) \geqslant B$.
- D'après l'énoncé, il existe un voisinage $V_{x_0}^2$ tel que, pour tout $x \in V_{x_0}^2$, on a : $f(x) \leqslant g(x)$.

On en déduit que pour tout x dans le plus petit de ces deux voisinages : $B \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et donc $g(x) \geqslant B$.

b) On utilise le résultat précédent.

- Comme $f \leqslant g$, on a $-f \geqslant -g$.
- Comme $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} -g(x) = +\infty$.

On déduit du point ***a)*** que $\lim\limits_{x \to x_0} -f(x) = +\infty$ ce qui revient à dire que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

□

Remarque
Ce théorème d'encadrement fait partie des techniques pouvant être utilisées pour lever une F.I. : ***g)*** Utilisation d'inégalités.

Exemple
Limite de $g(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x + x^2 + \mathrm{e}^{x^3}}{x^3+5}$ en $+\infty$.

En factorisant par le terme dominant, on obtient : $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^3}}{x^3} \dfrac{\frac{x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^3}} + \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^3}} + 1}{1+\frac{5}{x^3}}$

Il est à noter que, formellement, on ne peut appliquer directement le théorème des croissances comparées pour démontrer que : $\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}}{x^3} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En effet, e^{x^3} n'est pas de la forme q^x.
Cependant, on peut s'y ramener facilement :

- $\forall x \geqslant 1,\ x^3 \geqslant x$.
  (cette inégalité est aussi vérifiée dans un voisinage de $+\infty$)
- Par croissance de la fonction exponentielle, on a : $\mathrm{e}^{x^3} \geqslant \mathrm{e}^x$.
- On a donc : $\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}}{x^3} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$.

D'après le théorème des croissances comparées, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On en déduit que $\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}}{x^3} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Prenons un peu de recul
En mathématiques, deux mondes se côtoient :

× **le monde discret** qui est composé des ensembles finis ou dénombrables ainsi que des objets obtenus par un nombre d'opérations au plus dénombrable. Par exemple, une somme finie ou une somme infinie indexée sur $\mathbb{N}$ (on en reparlera !) ou encore une suite (qui par définition prend un nombre au plus dénombrable de valeurs) sont des objets discrets.

× **le monde continu** qui est composé des ensembles équipotents à $\mathbb{R}$ (*i.e.* en bijection avec) ainsi que des objets obtenus en utilisant autant d'opérations qu'il y a de réels. Par exemple, une fonction réelle (qui peut prendre a priori autant de valeurs qu'il y en a dans $\mathbb{R}$) est un objet continu.

Évidemment cette distinction n'a de sens que parce que l'infini dénombrable (*i.e.* le nombre d'éléments dans $\mathbb{N}$) est plus petit que le nombre d'éléments dans $\mathbb{R}$*(les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne peuvent être mis en bijection).*

- Dans ce chapitre on étudie des objets du monde continu (les fonctions réelles). On y a étudié la notion de limite finie qu'on a appelé ici continuité.
- Dans le CH 7, on a étudié des objets du monde discret (les suites réelles). On y a étudié la notion de limite finie qu'on a appelé convergence.

Autrement dit, on a défini la même notion dans deux mondes différents, ce qui explique que l'on retrouve les mêmes théorèmes et les mêmes techniques de démonstration !

III.3. Limites et monotonie

Théorème 11. *(théorème de la limite monotone)*

Soit f une fonction monotone sur $I =]a, b[$ $(a < b)$.

(avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

1) *Si $x_0 \in I$: f admet une limite* **finie** *à gauche et à droite en x_0.*

2) *Si $x_0 = a$: f admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en x_0.*

a) *si f est croissante,* $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

b) *si f est décroissante,* $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

3) *Si $x_0 = b$: f admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en x_0.*

a) *si f est croissante,* $\boxed{\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

b) *si f est décroissante,* $\boxed{\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

Démonstration. `(CULTURE)`
Pour faire la démonstration, il faut connaître la notion de borne supérieure (et inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$ et sa caractérisation.

Si $E \subset \mathbb{R}$ alors le plus petit des majorants de E, lorsqu'il existe, est appelé borne supérieure de E et est noté $M = \sup E$.
On peut caractériser cette borne supérieure M de la façon suivante.

- $\forall x \in E,\ x \leqslant M$ $\quad$ (M est un majorant)
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E,\ M - \varepsilon < x$ $\quad$ ($M - \varepsilon$ n'est jamais un majorant)

On se limite ici au cas où f est croissante (cas f décroissante analogue) et on s'intéresse au cas $x_0 = b$. On distingue alors deux cas :

× soit f est majorée.
On note alors $M = \sup\limits_{x \in I} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I\}$.
Soit $\varepsilon > 0$. De par la caractérisation précédente, on sait que $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{f(x) \mid x \in I\}$.
Ainsi, il existe $u \in I$ (*i.e.* $a < u < b$) tel que : $M - \varepsilon < f(u) \leqslant M$.
Pour tout x tel que $u \leqslant x < b$, on a, par croissance de f :

$$M - \varepsilon < f(u) \leqslant f(x) \leqslant M$$

En notant $\alpha = b - u > 0$, on a donc :

$$\forall x \in I, (b - \alpha \leqslant x < b \ \Rightarrow\ |f(x) - M| \leqslant \varepsilon)$$

× soit f est non majorée.
Soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme f non majorée, il existe $u \in I$ (*i.e.* $a < u < b$) tel que : $f(u) > A$.
Pour tout x tel que $u \leqslant x < b$, on a, par croissance de f :

$$A < f(u) \leqslant f(x)$$

En notant $\alpha = b - u > 0$, on a donc :

$$\forall x \in I, (b - \alpha \leqslant x < b \ \Rightarrow\ f(x) > A)$$

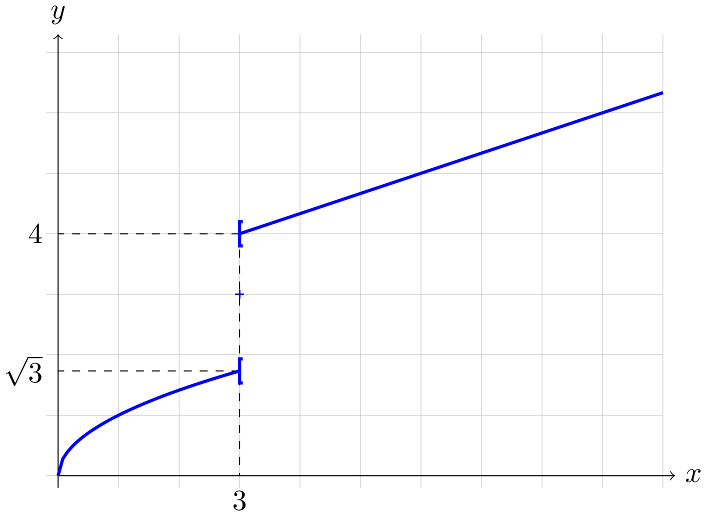
□

Ceci ne signifie pas qu'une fonction monotone admet une limite en tout point de $]a, b[$. Par exemple, on peut considérer la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ 3 & \text{si } x = 3 \\ \dfrac{1}{3} x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

qui est (strictement) croissante mais n'admet pas de limite en 3.

Représentation graphique



Comme f est croissante, le Théorème 11 permet d'affirmer que la fonction f admet une limite à gauche et à droite en tout point $x_0 \in I$.
C'est notamment le cas en $x_0 = 3 \in [0, +\infty[$. Détaillons ce cas :

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{3}x + 3 = 4$

Pour autant, cela ne signifie pas que f est continue en 3.
Ce n'est pas le cas puisque : $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

IV. Continuité d'une fonction en un point

IV.1. Continuité de $f : I \to \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in I$

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

- La fonction f est continue au point $x_0 \in I$ si elle admet une limite **finie** $\ell \in \mathbb{R}$ au point x_0.

Remarque

- Comme $x_0 \in I$, si f admet la limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\ell = f(x_0)$.
  (d'après le Théorème 2)
- Ainsi, on a la caractérisation suivante :

$$\boxed{\begin{array}{ll} & f : I \to \mathbb{R} \text{ (définie au point } x_0\text{) est continue au point } x_0 \in I \\ \Leftrightarrow & \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \ = \ f(x_0) \\ \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon) \end{array}}$$

IV.2. Prolongement par continuité d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ en un point x_0 extrémité de I n'appartenant pas à l'intervalle I

Théorème 12.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Soit x_0 un point de $\overline{I}$ n'appartenant pas à I (f non définie en x_0).
Supposons que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
Alors la fonction :

$$\tilde{f} \ : \left| \begin{array}{ccc} I \ \cup \ \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est définie sur $I \ \cup \ \{x_0\}$ et est continue en x_0.
Elle est appelée **prolongement par continuité** *de f en x_0.*

Remarque

- Résumons la situation :
 f est continue en $x_0 \in \overline{I}$ si f admet une limite finie en x_0.
 (i.e. s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$)

 a) Si x_0 est un point de l'intervalle de définition I, alors : $\ell = f(x_0)$,

 b) Si x_0 une extrémité de I qui n'est pas dans I, on rédigera ainsi :
 « on prolonge la fonction f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$ ».
 (on confond ainsi f et son prolongement par continuité $\tilde{f}$)

Exemple

On considère la fonction $f : x \to x^x$.
Cette fonction est définie pour $x > 0$ *i.e.* sur $]0, +\infty[$.

- Pour tout $x > 0$, on a : $x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$.
- Or : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} x^x = \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{x \ln x} = \mathrm{e}^0 = 1$.

On peut donc prolonger par continuité f en 0 en posant $f(0) = 1$.

IV.3. Lien entre continuité et limite finie à droite / à gauche

Théorème 13.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

Soit $x_0 \in I$ (en particulier, f est définie au point x_0).

On suppose de plus que f est définie à gauche et à droite de x_0.

$$\boxed{f \text{ est continue au point } x_0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ f \text{ admet une limite finie à gauche en } x_0 \\ \bullet\ f \text{ admet une limite finie à droite en } x_0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{array} \right.}$$

Remarque

- Le test par rapport à $f(x_0)$ est important.
 Considérons la fonciton f suivante.

$$f \ : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

 On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
 Cependant, $f(0) = 1 \neq 0$ donc la fonction f n'est pas continue en 0.
- Ce théorème est particulièrement utile lorsque l'on considère des fonctions qui possèdent une définition par cas.

Exemple

- La fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0 puisque :
 × $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f_{|]-\infty,0[}(x) = \lim\limits_{x \to 0} -x = 0$,
 × $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f_{|]0,+\infty[}(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$,
 × et $f(0) = |0| = 0$.
- La fonction $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 3 puisque :
 × $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3} g_{|]2,3[}(x) = \lim\limits_{x \to 3} 2 = 2$,
 × $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3} g_{|]3,4[}(x) = \lim\limits_{x \to 3} 3 = 3$,
 × et $g(3) = 3$.

Dans le cas où la fonction $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ n'est pas définie en x_0, on cherche à savoir si on peut la **prolonger par continuité** en x_0.

IV.4. Prolongement par continuité de f en x_0 où f n'est pas définie

Théorème 14. *(prolongement par continuité)*

Soit x_0 un point d'un intervalle I.

Soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un $I \setminus \{x_0\}$ (en particulier, f n'est pas définie au point x_0).

On suppose de plus que f est définie à droite et à gauche de x_0.

- *Si les propriétés suivantes sont vérifiées :*
  1) *f admet une limite finie à gauche en x_0,*
  2) *f admet une limite finie à droite en x_0,*
  3) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$,
  alors f admet la limite ℓ en x_0 i.e. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
- *On prolonge alors f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$.*

Remarque

Les Théorèmes 13 et 14 sont deux présentations différentes du même résultat. C'est la manière dont la question est posée qui doit nous amener à utiliser un théorème plutôt qu'un autre.

Exemple

1) On considère la fonction $f : x \mapsto x \ln|x|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Démontrer que la fonction f est continue en 0.

On utilise le Théorème 13.
Comme $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et que $f(0) = 0$, la fonction f est continue en 0.

2) On considère la fonction $g : x \mapsto x \ln|x|$.
Démontrer que la fonction g est prolongeable par continuité en 0.

On utilise dans ce cas le Théorème 14 puisque g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et donc pas en 0.
Comme $\lim\limits_{x \to 0-} g(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$, on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

IV.5. Continuité à droite, continuité à gauche

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Soit $x_0 \in I$.

a)
- La fonction f est **continue à droite** en $x_0 \in I$ si elle admet une limite **finie** à droite $\ell \in \mathbb{R}$ au point x_0.
- On a ainsi la caractérisation suivante :

	f (définie au point x_0) est continue à droite au point $x_0 \in I$
$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
$\Leftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha \Rightarrow \lvert f(x) - f(x_0)\rvert \leqslant \varepsilon)$

b)
- La fonction f est **continue à gauche** en $x_0 \in I$ si elle admet une limite **finie** à gauche $\ell \in \mathbb{R}$ au point x_0.
- On a ainsi la caractérisation suivante :

	f (définie au point x_0) est continue à gauche au point $x_0 \in I$
$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$
$\Leftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ (x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 \Rightarrow \lvert f(x) - f(x_0)\rvert \leqslant \varepsilon)$

Proposition 1.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Soit $x_0 \in I$.

La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à droite **et** *continue à gauche en x_0.*

Exemple

La fonction partie entière est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (elle est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$).

V. Continuité sur un intervalle

V.1. Continuité globale

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
- Autrement dit, f est continue sur I si elle admet une limite finie en tout point de I. Ceci s'écrit :

$$\boxed{\forall x_0 \in I, \exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)}$$

Remarque

- On peut simplifier l'écriture précédente. En effet, comme f est continue en x_0 et définie en x_0, on a : « $\ell = f(x_0)$ ».
- Ainsi, f est continue sur I si :

$$\boxed{\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon)}$$

V.2. Opérations algébriques sur les fonctions continues

Théorème 15.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors les fonctions $f + g$, λf, $f \times g$ sont des fonctions continues sur I.
De plus, si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont aussi continues sur I.

Démonstration.
On obtient ce résultat en appliquant à tous les points de I le résultat analogue énoncé dans le chapitre précédent (continuité en un point). □

Théorème 16.

1) *Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.*

2) *Toute fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sur tout intervalle I sur lequel Q ne s'annule pas.*

Démonstration.

1) La fonction $x \mapsto 1$ et la fonction $x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ (il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon$). On en déduit par somme, produit et produit par un réel que les fonctions polynomiales sont continues.

2) La fonction f est continue sur I par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. □

Application

De par ces propositions sur les opérations algébriques et la composition, on pourra rédiger comme suit :
f est une continue sur I car f est la somme / produit / quotient (attention au dénominateur) de fonctions continues sur I.

Exemple

1) On considère la fonction $f : x \mapsto x \ln(x) - 1$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car elle est la somme des fonctions :

- × $x \mapsto x \ln(x)$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit des fonctions :
  - ***(i)*** $x \mapsto x$ polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$,
  - ***(ii)*** $x \mapsto \ln(x)$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- × $x \mapsto -1$ constante donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ définie notamment sur $]0, +\infty[$.
La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$ car c'est le quotient de :

- × la fonction $x \mapsto e^{2x} + 1$, continue sur $]0, +\infty[$.
- × et de la fonction $x \mapsto e^{2x} - 1$, continue sur $]0, +\infty[$ **et qui ne s'annule pas sur** $]0, +\infty[$.

V.3. Composée de deux fonctions continues

Proposition 2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.

Soit $g : J \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle J.

On suppose de plus que : $f(I) \subset J$ (pour que $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ soit bien définie).

Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I.

Démonstration.
Encore une fois, ce résultat global est un corollaire direct du résultat du chapitre précédent sur la limite en un point de la composée $g \circ f$. □

Exemple

1) Si f est continue sur I, alors : f^2, $|f|$, $\exp(f)$ sont continues sur I.

2) Si f est continue et positive sur I, $\sqrt{f}$ et $\ln(f)$ sont continues sur I.

3) Dans la pratique, on rédigera comme suit.

a) Considérons la fonction $h : t \mapsto \ln(1+t)$ définie sur $]-1, +\infty[$.
La fonction h est continue sur $]-1, +\infty[$ car c'est la composée de :

- × $g : t \mapsto t+1$, continue sur $]-1, +\infty[$ car polynomiale.
  De plus, $g(\,]-1, +\infty[\,) \subset \,]0, +\infty[$.
- × et de $f : t \mapsto \ln(t)$, continue sur $]0, +\infty[$.

b) Considérons la fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$ définie sur $[0, +\infty[$.
La fonction h est continue sur $[0, +\infty[$ car c'est la composée de :

- × $g : t \mapsto \sqrt{t}$, continue sur $[0, +\infty[$.
  De plus, $g(\,[0, +\infty[\,) \subset \mathbb{R}$.
- × et de $f : t \mapsto \mathrm{e}^t$, continue sur $\mathbb{R}$.

V.4. Fonctions continues par morceaux

Définition *(continuité par morceaux sur un segment)*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

1) $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est continue *(i.e. continue sur $]a_i, a_{i+1}[$)*,

2) $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité sur l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Remarque *(bien comprendre cette définition)*
Naturellement, on a envie de poser la définition suivante :
« f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si l'on peut découper l'intervalle en morceaux (les $]a_i, a_{i+1}[$) tel que f est continue sur chaque morceau ».

Ceci correspond au point ***1)*** de la définition. Par ajout du point ***2)*** on impose de plus que f ne peut admettre une limite infinie en les points a_i.

Définition (équivalente)
La fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

- f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,
- f admet une limite finie à droite en a_i,
- f admet une limite finie à gauche en a_{i+1}.

(et ces limites ne sont pas forcément égales et peuvent aussi être différentes de $f(a_i)$ et $f(a_{i+1})$)

Exemple
On considère la fonction suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [1,5] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1-x & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ 8 & \text{si } x = 3 \\ 3x+5 & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \end{cases} \end{array} \right.$$

f n'est pas continue sur $[1,5]$ car elle n'est pas continue au point 3 :

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -2 \neq 14 = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

Par contre, f est continue par morceaux sur $[1,5]$.
En effet, si l'on prend $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, on a :

- f est continue sur $]1,3[$ et sur $]3,5[$.
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 1 - x = 0$ (limite finie)
  $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 - x = -2$ (limite finie)
  $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 3x + 5 = 14$ (limite finie)
  $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} 3x + 5 = 20$ (limite finie)

Remarque

- On peut étendre cette définition à un intervalle I quelconque.
  Une fonction f est dite **continue par morceaux sur un intervalle** I si elle est continue par morceaux sur tout segment $[a,b] \subset I$.
- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue par morceaux sur tout segment $[a,b]$ (avec a, b dans $\mathbb{R}$).

VI. Cas des fonctions complexes

Les théorèmes précédents qui étaient valides pour des fonctions à valeurs complexes ont déjà été énoncés dans ce cadre. Seule les propositions suivantes sont spécifiques à ce type de fonctions.

Proposition 3.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

$$\boxed{f \textit{ continue en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,(f) \textit{ et } \mathrm{Im}\,(f) \textit{ sont continues en } x_0}$$

Exercice 1
On note f la fonction définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{e^{ix} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ i & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Montrer que la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Proposition 4.
Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Soit $x_0 \in I$.

a) $\boxed{f \textit{ continue en } x_0 \ \Rightarrow\ \overline{f} \textit{ continue en } x_0}$

b) $\boxed{f \textit{ continue en } x_0 \ \Rightarrow\ |f| \textit{ continue en } x_0}$

VII. Les grands théorèmes de la continuité sur I

VII.1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 17. *(Théorème des Valeurs Intermédiaires)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ***intervalle*** *I.*

Si a et b sont deux points de I $(a < b)$ tels que : $f(a)f(b) \leqslant 0$.

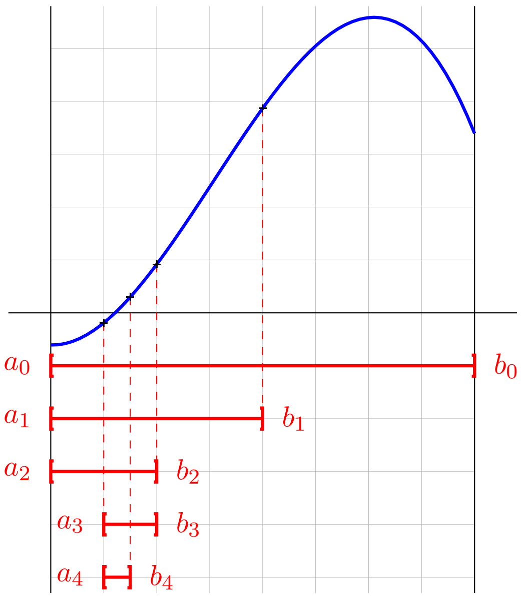
Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration.

a) Cas $f(a) = f(b) = 0$: trivial. Prendre $c = a$.

b) Cas $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$ (l'autre cas est analogue)

La démonstration se base sur une méthode dite « de dichotomie » qu'on peut résumer par le schéma suivant.



On construit une suite de segments emboîtés $[a_n, b_n]$ tels que :

- $f(a_n) \leqslant 0$,
- $f(b_n) \geqslant 0$.

On définit les suites (a_n) et (b_n) par récurrence.

0) Initialement, on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $c_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

1) Si $f(c_0) \leqslant 0$, on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b$.
Si $f(c_0) > 0$, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.

2) $\dots$

$\vdots$

n+1) On note $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
Si $f(c_n) \leqslant 0$, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
Si $f(c_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

Les suites (a_n) et (b_n) ainsi construites sont adjacentes. En effet :

- $a_{n+1} \geqslant a_n$,
- $b_{n+1} \leqslant b_n$,
- $b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \cdots = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, (a_n) et (b_n) sont convergentes et convergent vers la même limite $c = \sup a_n = \inf b_n$. On note au passage que $a = a_0 \leqslant c \leqslant b_0 = b$.

Or, par définition de a_n et b_n, on a : $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$.
Comme f est continue, $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont convergentes de limite $f(c)$.
Par passage à la limite dans les inégalités précédentes, on obtient :

$$f(c) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f(c) \geqslant 0$$

Ainsi, on a bien exhibé $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

$\square$

Remarque

- L'hypothèse $f(a)f(b) \leqslant 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés.
- Ainsi, on peut formuler l'énoncé comme suit :

1) f continue sur un intervalle I *2) f change de signe sur I*	$\Rightarrow$	*f s'annule sur I*

- Le fait que I soit un intervalle est **primordial**.
  Si I n'est pas un intervalle, on peut considérer la fonction inverse :

$$f \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

  × $f(-1) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$,
  × f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

  Mais il n'existe pas d'élément $c \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ tel que $f(c) = 0$.
- On peut utiliser la contraposée de cet énoncé.

1) f continue sur un intervalle I *2) f ne s'annule pas sur I*	$\Rightarrow$	*f garde un signe constant sur I*

- Le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) peut s'énoncer de plusieurs manières différentes. Nous allons maintenant lister ces différents énoncés, qui sont équivalents au premier.

Théorème 18. *(TVI - énoncé bis)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un **intervalle** *I.*
Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.
Alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f sur $[a, b]$.

Énoncé dans le cas $f(a) \leqslant f(b)$:

$$\boxed{\text{Si } z \in [f(a), f(b)] \quad \text{alors} \quad \exists \alpha \in [a, b], \ z = f(\alpha).}$$

Énoncé dans le cas $f(a) \geqslant f(b)$:

$$\boxed{\text{Si } z \in [f(b), f(a)] \quad \text{alors} \quad \exists \alpha \in [a, b], \ z = f(\alpha).}$$

Démonstration.
On fait la démonstration dans le cas $f(a) \leqslant f(b)$ (autre cas analogue).
Soit $z \in [f(a), f(b)]$. On considère alors la fonction g définie sur I par :

$$\forall x \in I, \ g(x) = f(x) - z$$

× $g(a) = f(a) - z \leqslant 0$ et $g(b) = f(b) - z \geqslant 0$,
× g est continue sur I.

Par le TVI (énoncé précédent), il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que : $g(\alpha) = 0$.
Autrement dit, on a : $f(\alpha) = z$. □

Autre formulation
Si $f : I \to \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses du théorème on a alors :

- Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $y = f(x)$ a (au moins) une solution dans l'intervalle $[a, b]$.
- Ou encore : tout élément y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède (au moins) un antécédent par f dans $[a, b]$.

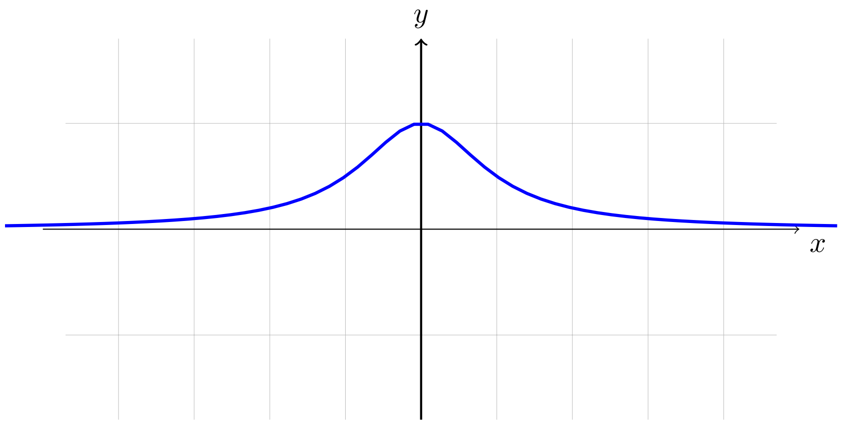
Théorème 19. *(TVI - énoncé ter)*
L'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle.

Démonstration.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.
Soient u et v deux éléments de $f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I,\ y = f(x)\}$.
On suppose (quitte à renommer ces éléments) que : $u < v$.

Pour montrer que $f(I)$ est un intervalle, il suffit de démontrer que toute valeur comprise entre u et v est dans $f(I)$.
Par définition de $f(I)$, il existe $a \in I$, tel que : $u = f(a)$.
De même, il existe $b \in I$ tel que $v = f(b)$.
Or, par le TVI (bis), pour tout $z \in [f(a), f(b)]$ il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $z = f(\alpha)$. Ainsi, $z \in f(I)$. □

Exemple
On considère la fonction $f : x \to \dfrac{1}{1+x^2}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(]-\infty, +\infty[) =]0, 1]$.



Comme le prouve cet exemple, l'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle qui n'est pas forcément de même nature.

Théorème 20. *(TVI - énoncé quater (!))*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un **intervalle** *I.*
Si f est majorée, on note $M = \sup\limits_I f$. On note $M = +\infty$ sinon.
Si f est minorée, on note $M = \inf\limits_I f$. On note $M = -\infty$ sinon.
Alors toute valeur $z \in]m, M[$ est atteinte par f sur I :

$$\forall z \in]m, M[, \exists \alpha \in I,\ z = f(\alpha)$$

Théorème 21. *(théorème des bornes)*

- *Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*
- *L'image par une fonction continue d'un segment est un segment.*
  Ce qu'on écrit sous la forme : « $f([a, b]) = [m, M]$ ».

Démonstration.
À faire □

VII.2. Théorème de la bijection

Théorème 22.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction :

1) continue sur I,

2) strictement monotone sur I.

On a alors :

- *$f(I)$ est un intervalle,*
- *$f : I \to f(I)$ est une application bijective,*
- *$f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone sur $f(I)$.*
  Plus précisément, f^{-1} possède le même sens de monotonie que f.

Démonstration.

- $f(I)$ est un intervalle car c'est l'image d'un intervalle par une fonction continue (TVI - ter).
- La fonction $f : I \to f(I)$ est bijective (résultat de la Proposition **??**).
- Montrons alors que $f^{-1} : f(I) \to I$ est aussi strictement monotone.
  Supposons f strictement croissante (le cas f décroissante est similaire).
  Il s'agit de montrer : $\forall (u_1, u_2) \in (f(I))^2,\ u_1 < u_2 \Rightarrow f^{-1}(u_1) < f^{-1}(u_2)$.

  Soient u_1 et u_2 deux éléments de $f(I)$. Ainsi :

  × il existe $x_1 \in I$ tel que $u_1 = f(x_1)$,

  × il existe $x_2 \in I$ tel que $u_2 = f(x_2)$.

  D'où $f^{-1}(u_1) = f^{-1}(f(x_1)) = x_1$ et $f^{-1}(u_2) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$.
  L'implication à montrer s'écrit donc : $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$. On la démontre par contraposée : si $x_1 \geqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ car f est croissante.
- Il reste à démontrer que f^{-1} est continue sur $f(I)$. Admis. □

Autre formulation

Si $f : I \to \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses du théorème on a alors :

- Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $y = f(x)$ a une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.
- Ou encore : tout élément y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède un unique antécédent par f dans $[a, b]$.

Théorème 23.

Soit I un intervalle d'extrémités a et b (éventuellement infinies).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I.

1) $f(I)$ est un intervalle d'extrémités $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$.

2) De plus, les intervalles I et $f(I)$ sont de même nature :

× *fermés (comme $[1, 2]$, $[1, +\infty[$, $]-\infty, 2]$),*

× *ouverts (comme $]1, 2[$, $]1, +\infty[$, $]-\infty, 2[$),*

× *ou semi-ouverts (comme $]1, 2]$, $[1, 2[$).*

Remarque

Les tableaux de variation constituent un outil de base dans la rédaction des questions s'appuyant sur le théorème de la bijection. Une fois établi, un tel tableau permet la lecture rapide :

× des intervalles I de stricte monotonie de f,

× des intervalles $f(I)$ correspondants.

Exercice

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{2x} + 1}$.

a. Démontrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution u dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

b. Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.
Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

a) • On a déjà démontré que f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Il faudrait alors faire l'étude de la dérivabilité de f (*cf* chapitre à venir) pour pouvoir en déduire le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		u		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$			
Variations de f	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{1}{4}$	↘	0

• Détaillons les différentes limites de ce tableau.

× $e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e^{2x}+1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

× $f(0) = \dfrac{e^0}{e^{2\times 0}+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

× $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^x}{e^{2x}} \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = \dfrac{1}{e^x} \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}}$

Or $\dfrac{1}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $1+\dfrac{1}{e^{2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

• La fonction f est :

1) continue sur $[0,+\infty[$,

2) strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[)$. Or :

$$f([0,+\infty[) \ = \ ]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)] \ = \ ]0, \frac{1}{2}[$$

Comme $\frac{1}{4} \in [0,\frac{1}{2}[$, l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution $u \in \ [0,+\infty[$.

b) On introduit la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. *La question consiste à démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution.*

• La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme des fonctions f et $x \mapsto -x$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$.

• Il faudrait alors faire l'étude de la dérivabilité de f (*cf* chapitre à venir) pour pouvoir en déduire le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		ℓ		$+\infty$
Signe de $g'(x)$			$-$		
Variations de g	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

• Détaillons les différentes limites de ce tableau.

× $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

× $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

• La fonction g est :

1) continue sur $]-\infty,+\infty[$,

2) strictement décroissante sur $]-\infty,+\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $g(]-\infty,+\infty[)$. Or :

$$g(]-\infty,+\infty[) \ = \ ]\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to-\infty} g(x)[\ = \ ]-\infty,+\infty[$$

Comme $0 \in \ ]-\infty,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\ell \in \ ]-\infty,+\infty[$.

• Or, par définition, $\ell = f(\ell) \in [0,\frac{1}{2}]$ puisque f est à valeurs dans $[0,\frac{1}{2}]$.

□

Tableau récapitulatif.
Le tableau suivant permet de faire un point sur les différents types d'intervalles pouvant intervenir dans le Théorème 23.

	Nature de l'intervalle $f(I)$	
I	Cas f strictement croissante sur I	Cas f strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x \to b} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$]\lim\limits_{x \to a} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim\limits_{x \to a} f(x)[$
$]a, b[$	$]\lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x \to b} f(x), \lim\limits_{x \to a} f(x)[$

VIII. Fonctions trigonométriques réciproques

VIII.1. Inversion du sinus

On considère la restriction de la fonction sin à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
La fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ est :

× continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

× strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Elle réalise donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ où :

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \;=\; \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \;=\; [-1, 1]$$

Définition

- La fonction arcsin (notée aussi Arcsin) est la bijection réciproque de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$.
- Autrement dit, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x)$ est l'unique élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus est x.

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \quad y = \arcsin(x) \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \sin(y) = x \end{array} \right.}$$

(y est l'arc, compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ dont le sinus est x)

Proposition 5.
La fonction arcsin *est :*

1) *continue sur* $[-1, 1]$, *à valeurs dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

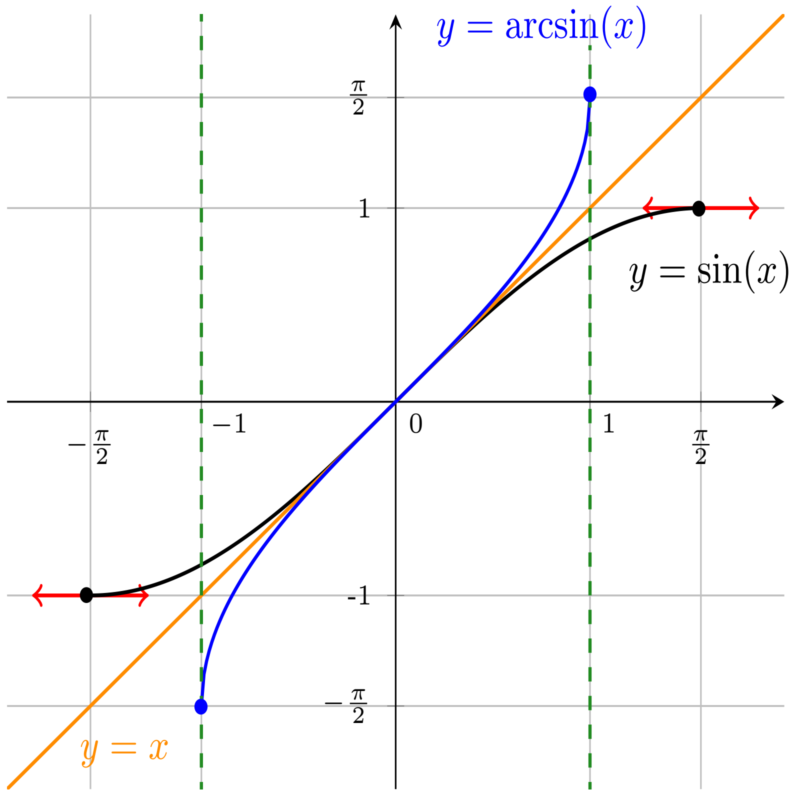
2) *strictement croissante sur* $[-1, 1]$.

Démonstration.
Conséquences directes du théorème de la bijection. □

Valeurs remarquables

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Représentation graphique



Proposition 6.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \arcsin\big(\sin(t)\big) = t \ \Leftrightarrow \ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$$

Proposition 7.

1) $\boxed{\forall x \in [-1,1], \ \sin\big(\arcsin(x)\big) = x}$

2) $\boxed{\forall x \in [-1,1], \ \cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}}$

3) $\boxed{\forall x \in\ ]-1,1[, \ \tan\big(\arcsin(x)\big) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

Démonstration.

1) Immédiat par définition de arcsin.

2) Soit $x \in [-1,1]$. Alors le réel $y = \arcsin(x)$ est bien défini et :

$$\begin{cases} y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \sin(y) = x \end{cases}$$

On sait :

$$\big(\cos(y)\big)^2 \ = \ 1 - \big(\sin(y)\big)^2 \ = \ 1 - \Big(\sin\big(\arcsin(x)\big)\Big)^2 \ = \ 1 - x^2$$

Or, comme $x \in [-1,1]$, alors : $1 - x^2 \geqslant 0$. D'où, par injectivité de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\cos(y) \ = \ \sqrt{1-x^2} \qquad i.e. \qquad \cos\big(\arcsin(x)\big) \ = \ \sqrt{1-x^2}$$

3) Soit $x \in\ ]-1,1[$. Alors $\arcsin(x) \in\ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc : $\cos\big(\arcsin(x)\big) \neq 0$.
Ainsi $\tan\big(\arcsin(x)\big)$ est bien défini.
D'après ***1)*** et ***2)*** :

$$\tan\big(\arcsin(x)\big) \ = \ \frac{\sin\big(\arcsin(x)\big)}{\cos\big(\arcsin(x)\big)} \ = \ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\square$

Proposition 8.
La fonction arcsin *est impaire.*

Démonstration.
Soit $x \in [-1,1]$. Alors $-x \in [-1,1]$. Donc $y = \arcsin(-x)$ est bien défini.

- La fonction sin est impaire. Ainsi :

$$\sin(-y) \quad = \quad -\sin(y)$$

On en déduit :

$$\sin\big(-\arcsin(-x)\big) \quad = \quad -\sin\big(\arcsin(-x)\big)$$

- Or, comme $-x \in [-1,1]$, d'après la proposition 7 :

$$\sin\big(\arcsin(-x)\big) \quad = \quad -x$$

On en déduit : $\sin\big(-\arcsin(-x)\big) = -(-x) = x$.

- Comme $x \in [-1,1]$, on peut composer cette dernière égalité par arcsin. On obtient :

$$\underbrace{\arcsin\Big(\sin\big(-\arcsin(-x)\big)\Big)}_{= \, -\arcsin(-x)} \quad = \quad \arcsin(x)$$

D'où : $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.

□

Proposition 9.
La fonction arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et :*

$$\boxed{\forall x \in \,]-1,1[, \quad \arcsin'(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Démonstration.

- La fonction $\sin_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est :
  - × bijective de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans l'intervalle $]-1,1[$,
  - × dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,
  - × telle que : $\forall x \in \,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$.

  Alors sa bijection réciproque arcsin est donc dérivable sur $]-1,1[$
- De plus, pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) \quad &= \quad \frac{1}{\sin'\big(\arcsin(x)\big)} \\ &= \quad \frac{1}{\cos\big(\arcsin(x)\big)} \\ &= \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

□

VIII.2. Inversion du cosinus

On considère la restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0, \pi]$
La fonction $\cos_{|[0,\pi]}$ est :

× continue sur $[0, \pi]$,

× strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $\cos_{|[0,\pi]}\big([0, \pi]\big)$ où :

$$\cos_{|[0,\pi]}\big([0, \pi]\big) \;=\; [\cos(\pi), \cos(0)] \;=\; [-1, 1]$$

Définition

- La fonction arccos (notée aussi Arccos) est la bijection réciproque de $\cos_{|[0,\pi]}$.
- Autrement dit, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x)$ est l'unique élément de $[0, \pi]$ dont le cosinus est x.

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \quad y = \arccos(x) \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} y \in [0, \pi] \\ \cos(y) = x \end{array}\right.}$$

(y est l'arc, compris entre 0 et π dont le cosinus est x)

Proposition 10.
La fonction arccos *est :*

1) continue sur $[-1, 1]$, à valeurs dans $[0, \pi]$,

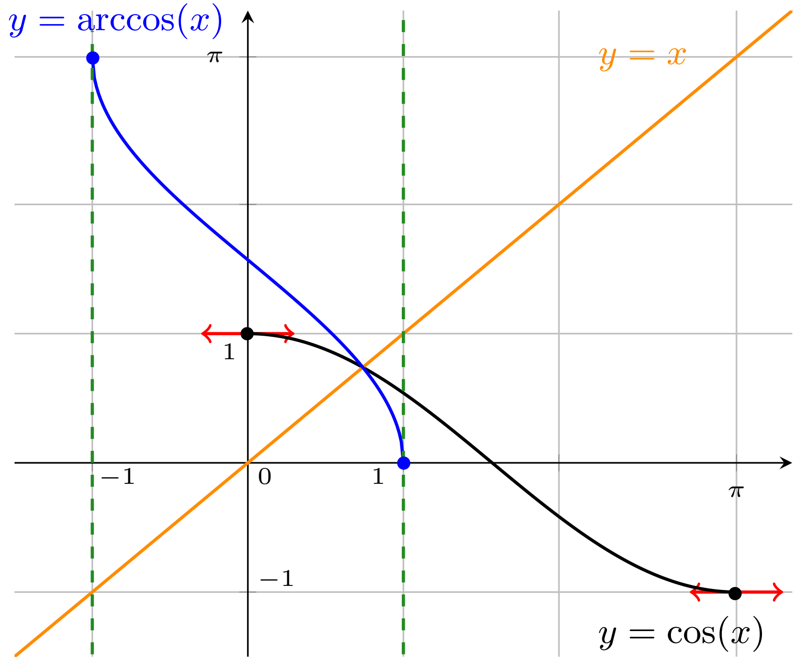
2) strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

Démonstration.
Conséquences directes du théorème de la bijection. □

Valeurs remarquables

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Représentation graphique



Proposition 11.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \arccos\big(\cos(t)\big) = t \;\Leftrightarrow\; t \in [0, \pi]}$$

Proposition 12.

1) $\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \sin\big(\arccos(x)\big) = \sqrt{1-x^2}}$

2) $\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \cos\big(\arccos(x)\big) = x}$

3) $\boxed{\forall x \in\ [-1,1] \setminus \{0\},\ \tan\big(\arccos(x)\big) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}}$

Démonstration.
Similaires à la démonstration de la Proposition 7. □

Proposition 13.

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad \arccos(-x) \ = \ \pi - \arccos(x)}$$

Démonstration.
Soit $x \in [-1,1]$. Alors $-x \in [-1,1]$. Donc $\arccos(-x)$ est bien défini.

- Tout d'abord, on sait :
  - × d'une part : $\arccos(-x) \in [0,\pi]$,
  - × d'autre part : $\arccos(x) \in [0,\pi]$. D'où : $\pi - \arccos(x) \in [0,\pi]$.
- Par injectivité de $\cos_{|[0,\pi]}$, on obtient alors :

$$\begin{array}{cll} & \arccos(-x) = \pi - \arccos(x) & \\ \Leftrightarrow & \cos\big(\arccos(-x)\big) = \cos\big(\pi - \arccos(x)\big) & \\ \Leftrightarrow & -x = -\cos\big(\arccos(x)\big) & \textit{(d'après la Proposition 12)} \\ \Leftrightarrow & -x = -x & \textit{(toujours d'après la Proposition 12)} \end{array}$$

Cette dernière égalité est toujours vérifiée. Ainsi, par raisonnement par équivalence, la première aussi.

□

Proposition 14.

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad \arccos(x) \ = \ \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)}$$

Démonstration.
Soit $x \in [-1,1]$.

- On remarque :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) \ = \ \sin\big(\arcsin(x)\big) \ = \ x \qquad (*)$$

- Or : $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit : $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x) \in [0,\pi]$. Ainsi :

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right)\right) \ = \ \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

- En composant l'égalité $(*)$ par arccos (ce qui est licite d'après le point précédent), on obtient enfin :

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \ = \ \arccos(x)$$

□

Proposition 15.
La fonction arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et :*

$$\boxed{\forall x \in\ ]-1,1[, \quad \arccos'(x) \ = \ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Démonstration.
Conséquence directe de la Proposition 14. □

VIII.3. Inversion de la tangente

On considère la restriction de la fonction tan à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
La fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est :

× continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

× strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\big(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\big)$ où :

$$\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan(x), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)\right[=]-\infty, +\infty[$$

Définition

- La fonction arctan (notée aussi Arctan) est la bijection réciproque de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$.
- Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est l'unique élément de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est x.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad y = \arctan(x) \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \tan(y) = x \end{array}\right.}$$

(y est l'arc, compris strictement entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ dont la tangente est x)

Proposition 16.
La fonction arctan *est :*

1) continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

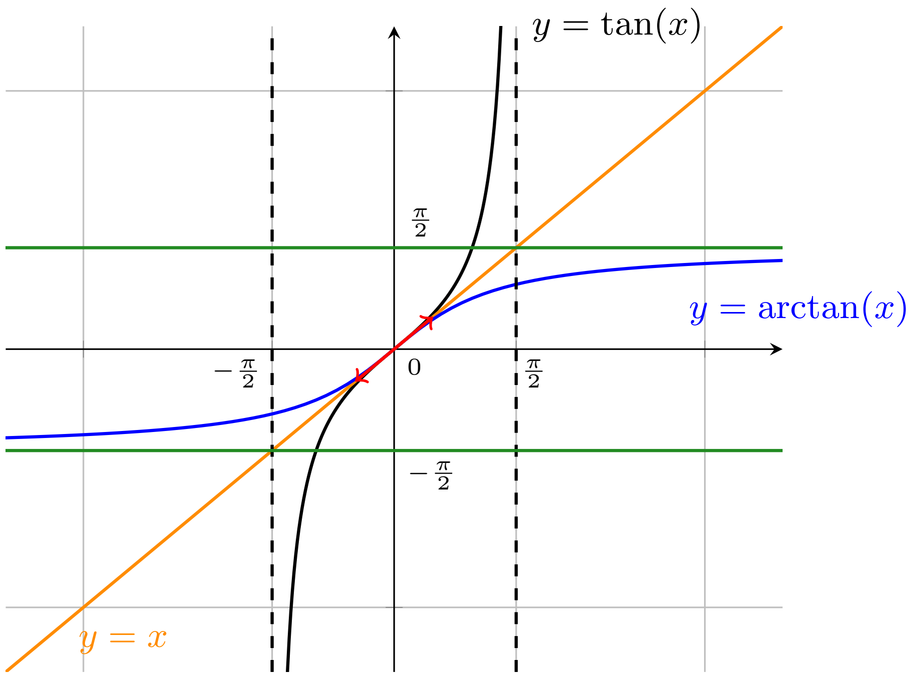
2) strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Conséquences directes du théorème de la bijection. □

Valeurs remarquables

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$

Représentation graphique



Proposition 17.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \arctan\big(\tan(t)\big) = t \ \Leftrightarrow\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$$

Proposition 18.

1) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin\big(\arctan(x)\big) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

2) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos\big(\arctan(x)\big) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

3) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \tan\big(\arctan(x)\big) = x}$

Démonstration.

3) Immédiat par définition de arctan.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, en notant $y = \arctan(x)$:

$$\begin{cases} y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \tan(y) = x \end{cases}$$

On sait :

$$\big(\cos(y)\big)^2 = \frac{1}{1+\big(\tan(y)\big)^2} = \frac{1}{1+\Big(\tan\big(\arctan(x)\big)\Big)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

où la dernière égalité est obtenue grâce à *3)*.
D'où, par injectivité de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\cos(y) = \frac{1}{1+x^2} \qquad i.e. \qquad \cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après *2)* et *3)* :

$$\sin\big(\arctan(x)\big) = \tan\big(\arctan(x)\big) \times \cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

□

Proposition 19.
La fonction arctan *est impaire.*

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$. Donc $y = \arctan(-x)$ est bien défini.

- La fonction tan est impaire. Ainsi :

$$\tan(-y) = -\tan(y)$$

On en déduit :

$$\tan\big(-\arctan(-x)\big) = -\tan\big(\arctan(-x)\big)$$

- Or, d'après la proposition 18 :

$$\tan\big(\arctan(-x)\big) = -x$$

On en déduit : $\tan\big(-\arctan(-x)\big) = -(-x) = x$.

- On compose cette dernière égalité par arctan. On obtient :

$$\underset{\displaystyle -\arctan(-x)}{\underset{\shortparallel}{\arctan\Big(\tan\big(-\arctan(-x)\big)\Big)}} = \arctan(x) \qquad \textit{(car } -\arctan(-x) \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\textit{)}$$

D'où : $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.

□

Proposition 20.
La fonction arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) \ = \ \frac{1}{1+x^2}}$$

Démonstration.

- La fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est :
  - × bijective de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans l'intervalle $\mathbb{R}$,
  - × dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,
  - × telle que : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1+\tan^2(x) \neq 0$.

  Sa bijection réciproque arctan est donc dérivable sur $\mathbb{R}$
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'\big(\arctan(x)\big)} \\ &= \frac{1}{1+\Big(\tan\big(\arcsin(x)\big)\Big)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Exercice 2
Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Écrire une relation analogue valable sur $\mathbb{R}_-^*$.

IX. Relations de comparaisons et croissances comparées

IX.1. Négligeabilité

Définition (Négligeabilité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$.

Soit $a \in \overline{I}$ ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de a.

On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a et on note $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ si et seulement si :

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \ = \ 0}$$

Remarque
On pourra aussi noter :

$f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad$ il existe $\varepsilon : \mathcal{V}(a) \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ vérifiant $f(x) = g(x)\,\varepsilon(x)$

Exercice 3

☐ ***1.*** Montrer que $e^{-\sqrt{x}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

2. Que peut-on dire de la fonction f au voisinage de a si $f(x) = \underset{x\to a}{o}(1)$?

Proposition 21 (Croissances comparées)**.**

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

- *Au voisinage de* $+\infty$*, on a :*
  - $\boxed{x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)}$ *avec* $\alpha < \beta$
  - $\boxed{x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^x\right)}$
  - $\boxed{\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\alpha\right)}$
- *Au voisinage de* 0*, on a :*
  - $\boxed{x^\beta = \underset{x\to0^+}{o}\left(x^\alpha\right)}$ *avec* $\alpha < \beta$
  - $\boxed{\ln(x) = \underset{x\to0^+}{o}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)}$

Proposition 22 (Règles de calcul)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$ ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I a pour extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Soient f, g, h et u des fonctions définies au voisinage de a.

On supposera, lorsque nécessaire, que ces fonctions ne s'annulent pas sur un voisinage épointé de a.

1) *Transitivité :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big) \\ g(x) = \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big)}$$

2) *Linéarité :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big) \\ g(x) = \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda\, f(x) + \mu\, g(x) = \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big)}$$

3) $$\boxed{f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big) \quad \Rightarrow \quad f(x)\, g(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)h(x)\big)}$$

4) *Compatibilité avec le produit :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big) \\ h(x) = \underset{x\to a}{o}\big(u(x)\big) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \times h(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x) \times u(x)\big)}$$

5) $$\boxed{f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big) \quad \Rightarrow \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big)}$$

Démonstration.

1) Supposons : $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$.

Alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$$

Or, pour tout $x \in \mathcal{V}(a) \setminus \{a\}$:

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \underbrace{\frac{f(x)}{\cancel{g(x)}}}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} \times \underbrace{\frac{\cancel{g(x)}}{h(x)}}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0}$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$, *i.e.* : $f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$.

2) Supposons : $f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$ et $g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$.

Démontrons : $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f(x) + \beta g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$.

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\alpha f(x)+\beta g(x)}{h(x)} = \alpha \underbrace{\frac{f(x)}{h(x)}}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} + \beta \underbrace{\frac{g(x)}{h(x)}}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0}$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha f(x)+\beta g(x)}{h(x)} = 0$, *i.e.* $\alpha f(x) + \beta g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$.

3) On démontre les autres propriétés de manière similaire.

Exercice 4

On considère les fonctions suivantes au voisinage de 0 :

$$f(x) = x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x$$

Simplifier $(2-x)f(x)$ puis $f(x)+g(x)$.

Exercice 5

En posant $t = \dfrac{1}{x^2}$, montrer qu'au voisinage de 0, on a :

$$\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

IX.2. Équivalence

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et soit $g : I \to \mathbb{K}$.

Soit $a \in \overline{I}$ ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de a.

- On dit que f **est équivalente à** g **en** a et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si :

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

Remarque

- Trouver une fonction g équivalente à une fonction f en a c'est trouver une fonction qui a le même comportement que f à proximité de a. Ainsi, si l'on se place à proximité de a, les courbes représentatives de f et de g apparaîtront comme confondues.
- Le but est de trouver une fonction g dont l'expression est plus simple que la fonction f (penser par exemple aux fonctions polynomiales).

Théorème 24.

Soient $f, g, h, t : I \to \mathbb{K}$, des fonctions.
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de a)

Soit $a \in \overline{I}$ ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

La relation $\underset{x\to a}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes.

1) *Réflexivité :*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)}$$

2) *Symétrie :*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)}$$

3) *Transitivité :*

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$$

4) *Compatibilité avec le produit :*

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to a}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\times h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\times t(x)$$

5) *Compatibilité avec le quotient :*

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to a}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{g(x)}{t(x)}$$

6) *Équivalent et limites :*

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$$

(avec ℓ limite éventuellement infinie)

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $\dfrac{f(x)}{f(x)} = 1 \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.

2) Il suffit d'écrire : $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$.

3) Il suffit d'écrire : $\dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times \dfrac{g(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1\times 1 = 1$.

4) Il suffit d'écrire : $\dfrac{f(x)\times h(x)}{g(x)\times t(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times \dfrac{h(x)}{t(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1\times 1 = 1$.

5) Il suffit d'écrire : $\dfrac{\frac{f(x)}{h(x)}}{\frac{g(x)}{t(x)}} = \dfrac{f(x)}{h(x)} \times \dfrac{t(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1\times 1 = 1$.

6) Il suffit d'écrire : $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1\times \ell = \ell$.

□

Exercice

Limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{(3x+4)^3(8x^{-2}+2x^{-4})}{9x+10}$?

1) $3x+4 \underset{+\infty\to 3}{\sim} x$ car $\dfrac{3x+4}{3x} = 1 + \dfrac{4}{3x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
Ainsi : $(3x+4)^3 = (3x+4)(3x+4)(3x+4) \underset{+\infty\to(}{\sim} 3x)(3x)(3x) = 3^3x^3$.

2) $8x^{-2}+2x^{-4} \underset{+\infty\to 8}{\sim} x^{-2}$ car $\dfrac{8x^{-2}+2x^{-4}}{8x^{-2}} = 1 + \dfrac{2x^{-4}}{8x^{-2}} = 1 + \dfrac{1}{4x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

On en déduit que : $(3x+4)^3(8x^{-2}+2x^{-4}) \underset{+\infty\to 3}{\sim} {}^3x^3 \times 8x^{-2} = 3^3\ 8x$

3) $9x+10 \underset{+\infty\to 9}{\sim} x$ car $\dfrac{9x+10}{9x} = 1 + \dfrac{10}{9x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

On en déduit que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3^{\cancel{3}}\ 8\cancel{x}}{\cancel{9}\cancel{x}} = 3\times 8 = 24$.
Ainsi : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 24$.

on ne peut ni sommer, ni composer les équivalents en général

Exemples

- On a : $x+2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$ et $-x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$. En sommant, on obtiendrait $2 \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$, ce qui est bien évidemment faux.
- On a : $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. En composant par exp, on obtiendrait : $e^{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$, ce qui est faux car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1$

Exercice 6

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^3 - \ln(x)$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-\ln(x)}{\sqrt{e^x+x^3}}$.

Proposition 23.

- *Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en* $+\infty$.
- *Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus bas degré en* 0.

Démonstration.
Soit f un polynôme de degré n. Alors il existe $(a_m, a_{m+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-m+1}$, avec $a_m \neq 0$ et $a_n \neq 0$ tels que $f(x) = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k x^k$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On remarque :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{a_n x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x_n}{a_n x_n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{a_n x^n} = 1$$

c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$.

De même :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{a_m x^m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x_n}{a_m x_m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m}{a_m x^m} = 1$$

c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_m x^m$. □

Proposition 24.

- *Une caractérisation des* $\sim$ *par les* o *:*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))}$$

- *En particulier :*

$$\boxed{f(x) + \underset{x\to a}{o}(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x)}$$

Démonstration.
On sait que, d'une part, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

D'autre part, $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$ alors $f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$, *i.e.* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0$, ou encore $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On a donc bien $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$. □

Exercice 7

Montrer de deux manières différentes :

$$\frac{x^3}{2} - \ln(x) + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^3}{2}$$

Proposition 25.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Soit $a \in \overline{I}$.

Supposons que f *est dérivable en* a *et :* $f'(a) \neq 0$.

$$\boxed{f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)}$$

Cette proposition permet d'obtenir la majorité des équivalents classiques suivants :

Proposition 26 (Équivalents classiques)**.**

- *Au voisinage de* 0 *:*
  - × $\boxed{e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x}$
  - × $\boxed{\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$
  - × $\boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x}$ *pour* $\alpha \neq 0$
  - × $\boxed{\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$
  - × $\boxed{\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$
  - × $\boxed{1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}}$
  - × $\boxed{\arcsin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$
  - × $\boxed{\arctan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$
  - × $\boxed{\dfrac{\pi}{2} - \arccos(x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$
  - × $\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$
  - × $\boxed{\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}}$
- *Au voisinage de* 1 *:*

$$\boxed{\ln(x) \underset{x \to 1}{\sim} x - 1}$$

Remarque

- On retrouve ainsi des limites classiques comme :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

- La relation $(1+x)^\alpha \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$ donne, avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, l'équivalent suivant :

$$\sqrt{x+1} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

Exercice 8
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\ln(1 + \sqrt{x})}$.

2. Montrer que $t^{\frac{1}{t}} - 1 \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t}$.

Proposition 27.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et soit $g : I \to \mathbb{K}$.

Soit $a \in \overline{I}$ ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de a.

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \ \Rightarrow\ f \text{ et } g \text{ sont de même signe au voisinage de } a}$$

Proposition 28.

Soient $f : I \to \mathbb{K}$, $g : I \to \mathbb{K}$ et $h : I \to \mathbb{K}$.

Soit $a \in \overline{I}$ ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que h ne s'annule pas dans un voisinage épointé de a.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall x \in \mathcal{V}(a),\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)}$$

IX.3. Domination

IX.3.a) Cas des fonctions

Définition (Domination)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$.

Soit $a \in \overline{I}$ ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de a.

On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a et on note $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ si et seulement s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathcal{V},\ \left|f(x)\right| \leqslant M \left|g(x)\right|}$$

Remarque

On pourra aussi noter :

$$\boxed{f(x) = \underset{x\to a}{O}\big(g(x)\big) \ \Leftrightarrow\ \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a}$$

En particulier :

$$\boxed{f(x) = \underset{x\to a}{O}\big(1\big) \ \Leftrightarrow\ f \text{ est bornée au voisinage de } a}$$

Exercice 10

1. Démontrer : $\mathrm{e}^{-x} = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

2. Démontrer : $\sin(x^2) = \underset{x\to 0}{O}(1)$.

Proposition 29.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$.

Soit $a \in \overline{I}$ ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de a.

1) $\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big) \ \Rightarrow\ f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x)\big)}$

2) $\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \ \Rightarrow\ f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x)\big)}$

3) En particulier : $\boxed{\dfrac{f}{g} \text{ admet une limite finie } \Rightarrow\ f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x)\big)}$

Démonstration.
Immédiat car toute fonction admettant une limite en a est bornée au voisinage de a. □

Proposition 30 (Règles de calcul)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$ ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I a pour extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Soient f, g, h et u des fonctions définies au voisinage de a.

On supposera, lorsque nécessaire, que ces fonctions ne s'annulent pas sur un voisinage épointé de a.

1) Réflexivité : $\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(f(x)\big)}$

2) Transitivité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x)\big) \\ g(x) \underset{x\to a}{=} O\big(h(x)\big) \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(h(x)\big)}$$

3) Linéarité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(h(x)\big) \\ g(x) \underset{x\to a}{=} O\big(h(x)\big) \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x\to a}{=} O\big(h(x)\big)}$$

4) $\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(h(x)\big) \ \Rightarrow\ f(x)\, g(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x)h(x)\big)}$

5) Compatibilité avec le produit :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x)\big) \\ h(x) \underset{x\to a}{=} O\big(u(x)\big) \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ f(x) \times h(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x) \times u(x)\big)}$$

6) $\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x)\big) \ \Rightarrow\ \forall \theta \in \mathbb{R}^*,\ f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x)\big)}$

Démonstration.

1) On remarque : $\forall x \in I,\ \big|f(x)\big| \leqslant 1 \times \big|f(x)\big|$.
Cette inégalité est donc en particulier vraie au voisinage de a. Ainsi :

$$f(x) \ \underset{x\to a}{=}\ O\big(f(x)\big)$$

2) Supposons : $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x))$.

Alors il existe des voisinages $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ de a et il existe $(M_1, M_2) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^2$ tels que :

× $\forall x \in \mathcal{V}_1,\ \big|f(x)\big| \leqslant M_1 \big|g(x)\big|$

× $\forall x \in \mathcal{V}_2,\ \big|g(x)\big| \leqslant M_2 \big|h(x)\big|$

On note alors : $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$. On obtient, pour tout $x \in \mathcal{V}$:

$$M_1 \big|g(x)\big| \ \leqslant\ M_1\, M_2 \big|h(x)\big|$$

D'où, par transitivité :

$$f(x) \ \leqslant \ M_1 \left|g(x)\right| \ \leqslant \ M_1\, M_2 \left|h(x)\right|$$

Ainsi, en notant $M = M_1\, M_2 \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall x \in \mathcal{V}, \ \left|f(x)\right| \leqslant M \left|h(x)\right|$$

Ainsi : $f(x) = \underset{x \to a}{O}(h(x))$.

3) Supposons : $f(x) = \underset{x \to a}{O}(h(x))$ et $g(x) = \underset{x \to a}{O}(h(x))$.
Démontrons : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda\, f(x) + \mu\, g(x) = \underset{x \to a}{O}(h(x))$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Il existe des voisinages $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ de a et il existe $(M_1, M_2) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^2$ tels que :

- × $\forall x \in \mathcal{V}_1$, $\left|f(x)\right| \leqslant M_1 \left|h(x)\right|$
- × $\forall x \in \mathcal{V}_2$, $\left|g(x)\right| \leqslant M_2 \left|h(x)\right|$

On note : $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$. On obtient, pour tout $x \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} & \left|\lambda\, f(x) + \mu\, g(x)\right| \\ \leqslant \ & |\lambda| \left|f(x)\right| + |\mu| \left|g(x)\right| && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ \leqslant \ & |\lambda|\, M_1 \left|h(x)\right| + |\mu|\, M_2 \left|h(x)\right| \\ \leqslant \ & \big(|\lambda|\, M_1 + |\mu|\, M_2\big) \left|h(x)\right| \end{aligned}$$

Ainsi, en notant $M = |\lambda|\, M_1 + |\mu|\, M_2$:

$$\forall x \in \mathcal{V}, \ \left|\lambda\, f(x) + \mu\, g(x)\right| \leqslant M \left|h(x)\right|$$

D'où : $\lambda\, f(x) + \mu\, g(x) = \underset{x \to a}{O}\big(h(x)\big)$.

4) On démontre les autres propriétés de manière similaire.

□

Remarque
Les relations de comparaison asymptotiques vérifient les propriétés suivantes.

La relation $\underset{x \to a}{o}$	La relation $\underset{x \to a}{O}$	La relation $\underset{x \to a}{\sim}$
`N'est PAS` réflexive	est réflexive	est réflexive
`N'est PAS` symétrique	`N'est PAS` symétrique	est symétrique
est transitive	est transitive	est transitive

Du fait de ces 3 propriétés, on dit que la relation $\underset{x \to a}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

IX.3.b) Cas des suites

Définition (Domination)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.
Supposons que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n), et on note $u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(v_n)$ si et seulement si :

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée}}$$

Remarque
En particulier :

$$\boxed{u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(1) \ \Leftrightarrow \ (u_n) \text{ est bornée}}$$

Proposition 31.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

Supposons que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

1) $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)}$

2) $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)}$

3) En particulier : $\boxed{\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) \text{ admet une limite finie} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)}$

Démonstration.
Immédiat car toute suite convergente est bornée. □

Proposition 32 (Règles de calcul)**.**

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) des suites numériques.

On supposera, lorsque nécessaire, que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

1) Réflexivité : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)}$

2) Transitivité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \\ v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n) \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)}$$

3) Linéarité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n) \\ v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda\, u_n + \mu\, v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)}$$

4) $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \Rightarrow u_n\, w_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n\, w_n)}$

5) Compatibilité avec le produit :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \\ w_n \underset{n\to+\infty}{=} O(t_n) \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \times w_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n \times t_n)}$$

6) $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \Rightarrow \forall \theta\in\mathbb{R}^*,\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)}$

Remarque
Les relations de comparaison asymptotiques vérifient les propriétés suivantes.

La relation $\underset{n\to+\infty}{o}$	La relation $\underset{n\to+\infty}{O}$	La relation $\underset{n\to+\infty}{\sim}$
`N'est PAS` réflexive	est réflexive	est réflexive
`N'est PAS` symétrique	`N'est PAS` symétrique	est symétrique
est transitive	est transitive	est transitive

Du fait de ces 3 propriétés, on dit que la relation $\underset{x\to a}{\sim}$ est une relation d'équivalence.