# CH XII : Complexes - Partie II

## I. Équations polynomiales

### I.1. Racines carrées d'un nombre complexe

**Définition (Racine carrée)**
Soit $Z \in \mathbb{C}$.
On dit que $z$ est une *racine carrée de* $Z$ si et seulement si : $z^2 = Z$.

> On écrit les mots « racine carrée » mais on **s'interdit** la notation fonctionnelle $\cancel{\sqrt{z}}$ ou $\cancel{z^{\frac{1}{2}}}$.

**Proposition 1.**
*Tout nombre complexe* **non nul** *admet exactement* 2 *racines carrées opposées dans* $\mathbb{C}$.

*Démonstration.*
Soit $c \in \mathbb{C}^*$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que : $Z = a + ib$.
Soit $z \in \mathbb{C}$, alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $z$ est solution de l'équation : $z^2 = c$.

- Alors :

$$(x+iy)^2 = c \qquad \texttt{ET} \qquad \left|(x+iy)^2\right| = |c|$$

$$\text{donc} \qquad x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib \qquad \texttt{ET} \qquad x^2 + y^2 = |a+ib|$$

$$\text{d'où} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \end{array}\right. \quad (*) \qquad \texttt{ET} \qquad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$

- En particulier :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x^2 & - & y^2 & = & a \\ x^2 & + & y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} x^2 & - & y^2 & = & a \\ & & 2\,y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} - a \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrcr} 2\,x^2 & & = & a + \sqrt{a^2+b^2} \\ & 2\,y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} - a \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrcl} x^2 & & = & \dfrac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ & y^2 & = & \dfrac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \end{array}\right.$$

On remarque de plus :

$$\begin{array}{lrcll} & a^2 & \leqslant & a^2 + b^2 & \\ \text{donc} & \sqrt{a^2} & \leqslant & \sqrt{a^2+b^2} & \textit{(par croissance de la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \text{d'où} & |a| & \leqslant & \sqrt{a^2+b^2} & \end{array}$$

On en déduit :

$$a + \sqrt{a^2+b^2} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad -a + \sqrt{a^2+b^2} \geqslant 0$$

On en conclut :

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \quad \texttt{OU} \quad x = -\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\[2ex] y = \sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \quad \texttt{OU} \quad y = -\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{cases}$$

- Or, d'après $(*)$ : $2xy = b$. Trois cas se présentent alors :

× si $b > 0$, alors : $xy > 0$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & = & \left(\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\ \sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right) \\ \texttt{OU} \quad (x,y) & = & \left(-\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\ -\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right) \end{array}$$

Autrement dit :

$$\begin{array}{rcl} z & = & \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\ \sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \texttt{OU} \quad z & = & -\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\ \sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{array}$$

× si $b < 0$, alors, d'après $(*)$ : $xy < 0$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & = & \left(\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\ -\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right) \\ \texttt{OU} \quad (x,y) & = & \left(-\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\ \sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right) \end{array}$$

Autrement dit :

$$\begin{array}{rcl} z & = & \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\ \sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \texttt{OU} \quad z & = & -\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\ \sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{array}$$

× si $b = 0$, on en déduit : $a \neq 0$ (on rappelle en effet : $c \neq 0$).
Deux nouveaux cas se présentent alors :

- si $a > 0$, alors :

$$\begin{array}{rcll} x & = & \pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+0^2}}{2}} & \\ & = & \pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2}}{2}} & \\ & = & \pm\sqrt{\dfrac{a+|a|}{2}} & \\ & = & \pm\sqrt{\dfrac{a+a}{2}} & \textit{(car } a>0\textit{)} \\ & = & \pm\sqrt{a} & \end{array}$$

De même :

$$\begin{array}{rcll} y & = & \pm\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2}}{2}} & \\ & = & \pm\sqrt{\dfrac{-a+|a|}{2}} & \\ & = & \pm\sqrt{\dfrac{-a+a}{2}} & \textit{(car } a>0\textit{)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rrcl} & (x,y) & = & (\sqrt{a},0) \\ \texttt{OU} & (x,y) & = & (-\sqrt{a},0) \end{array}$$

Autrement dit :

$$z = \sqrt{a} \qquad \texttt{OU} \qquad z = -\sqrt{a}$$

- <u>si $a < 0$</u>, alors :

$$\begin{array}{rcll} x & = & \pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2}}{2}} & \\ & = & \pm\sqrt{\dfrac{a+|a|}{2}} & \\ & = & \pm\sqrt{\dfrac{a-a}{2}} & \textit{(car } a<0\textit{)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

De même :

$$\begin{array}{rcll} y & = & \pm\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2}}{2}} & \\ & = & \pm\sqrt{\dfrac{-a+|a|}{2}} & \\ & = & \pm\sqrt{\dfrac{-a-a}{2}} & \textit{(car } a>0\textit{)} \\ & = & \pm\sqrt{-a}\big( = \pm\sqrt{|a|}\big) & \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rrcl} & (x,y) & = & (0,\sqrt{-a}) \\ \texttt{OU} & (x,y) & = & (0,-\sqrt{-a}) \end{array}$$

Autrement dit :

$$z = i\,\sqrt{-a} \qquad \texttt{OU} \qquad z = -i\,\sqrt{-a}$$

($\Leftarrow$) Trois cas se présentent :

× <u>si $b > 0$</u>, alors on note :

$$\begin{array}{rcl} z_1 & = & \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\,\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ z_2 & = & -\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\,\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{array}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les complexes $z_1$ et $z_2$ sont bien solutions de l'équation $z^2 = c$.

× <u>si $b < 0$</u>, alors on note :

$$\begin{array}{rcl} z_3 & = & \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\,\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ z_4 & = & -\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\,\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{array}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les complexes $z_3$ et $z_4$ sont bien solutions de l'équation $z^2 = c$.

× si $b=0$, alors deux cas se présentent :

- si $a>0$, alors on note :

$$z_5 = \sqrt{a}$$

$$z_6 = -\sqrt{a}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les complexes $z_5$ et $z_6$ sont bien solutions de l'équation $z^2 = c$.

- si $a<0$, alors on note :

$$z_7 = i\sqrt{a}$$

$$z_8 = -i\sqrt{a}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les complexes $z_7$ et $z_8$ sont bien solutions de l'équation $z^2 = c$.

Finalement, l'équation $z^2 = c$ admet toujours exactement 2 solutions complexes. □

**Corollaire 1.**
*Soit $a \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.*

***1)*** *Si $a \in \, ]0, +\infty[$, alors :*

$$\boxed{(z^2 = a) \Leftrightarrow (z = \sqrt{a} \ \texttt{OU} \ z = -\sqrt{a})}$$

***2)*** *Si $a = 0$, alors :*

$$\boxed{(z^2 = 0) \Leftrightarrow (z = 0)}$$

***3)*** *Si $a \in \, ]-\infty, 0[$, alors :*

$$\boxed{(z^2 = a) \Leftrightarrow (z = i\sqrt{-a} \ \texttt{OU} \ z = -i\sqrt{-a})}$$

**Exercice 1**
Résoudre l'équation $z^2 = 1 + 3i$ dans $\mathbb{C}$.

*Démonstration.*
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

($\Rightarrow$) Supposons que $z$ est solution de l'équation : $z^2 = 1 + 3i$.

- Alors :

$$\begin{array}{rlcl}
 & z^2 = 1+3i & & \\
\Leftrightarrow & z^2 = 1+3i & \texttt{ET} & |z^2| = |1+3i| \\
\Leftrightarrow & (x+iy)^2 = 1+3i & \texttt{ET} & \left|(x+iy)^2\right| = |1+3i| \\
\Leftrightarrow & x^2 + 2ixy - y^2 = 1+3i & \texttt{ET} & x^2+y^2 = \sqrt{1^2+3^2} \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & 1 \\ 2xy & = & 3 \end{array}\right. \quad (*) & \texttt{ET} & x^2+y^2 = \sqrt{10}
\end{array}$$

- En particulier :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x^2 & - & y^2 & = & 1 \\ x^2 & + & y^2 & = & \sqrt{10} \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} x^2 & - & y^2 & = & 1 \\ & & 2\,y^2 & = & \sqrt{10}-1 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow 2L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrcl} 2\,x^2 & & = & 1+\sqrt{10} \\ & 2\,y^2 & = & \sqrt{10}-1 \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrcl} x^2 & & = & \dfrac{\sqrt{10}+1}{2} \\ & y^2 & = & \dfrac{\sqrt{10}-1}{2} \end{array}\right.$$

- Or, d'après $(*)$ : $2xy = 3 > 0$. Les réels $x$ et $y$ ont donc même signe. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & = & \left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}+1}{2}},\ \sqrt{\dfrac{\sqrt{10}-1}{2}}\right) \\ \texttt{OU}\quad (x,y) & = & \left(-\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}+1}{2}},\ -\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}-1}{2}}\right) \end{array}$$

Autrement dit, en notant : $z_0 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{10}+1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}-1}{2}}$ :

$$z = z_0 \qquad \texttt{OU} \qquad z = -z_0$$

($\Leftarrow$) Supposons : $z \in \{z_0, -z_0\}$. Démontrons qu'alors $z$ est solution de l'équation $z^2 = 1+3i$.

- si $z = z_0$, alors :

$$\begin{array}{rcl} z^2 & = & z_0^2 \\ & = & \left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}+1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}-1}{2}}\right)^2 \\ & = & \dfrac{\sqrt{10}+1}{2} + \cancel{2}\,i\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}+1}{\cancel{2}}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}-1}{\cancel{2}}} - \dfrac{\sqrt{10}-1}{2} \\ & = & \dfrac{\cancel{\sqrt{10}}+1-(\cancel{\sqrt{10}}-1)}{2} + i\sqrt{(\sqrt{10}+1)(\sqrt{10}-1)} \\ & = & 1 + i\sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2} \\ & = & 1 + i\sqrt{9} \\ & = & 1+3i \end{array}$$

- si $z = -z_0$, alors :

$$z^2 \;=\; (-z_0)^2 \;=\; z_0^2 \;=\; 1+3i \qquad \textit{(d'après le point précédent)}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $z^2 = 1+3i$ est :

$$\left\{\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}+1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}-1}{2}},\ -\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}+1}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}-1}{2}}\right\}$$

□

## I.2. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du 2nd degré à coefficients réels

**Proposition 2.**
*Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.*
*On note : $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas se présentent.*

***1.*** *si $\Delta > 0$, alors l'équation $az^2+bz+c=0$ admet exactement 2 solutions* **réelles** *:*

$$\boxed{z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

***2.*** *si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2+bz+c=0$ admet une unique solution* **réelle** *:*

$$\boxed{z_0 = \dfrac{-b}{2a}}$$

***3.*** *si $\Delta < 0$, alors l'équation $az^2+bz+c=0$ admet exactement 2 solutions* **complexes** *:*

$$\boxed{z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2} \quad \textit{et} \quad z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2}}$$

*On rappelle que le réel $\Delta$ est appelé* discriminant *du polynôme $P$ où : $P(X) = aX^2+bX+c$.*

*Démonstration.*
On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

- On commence par mettre l'expression $az^2 + bz + c$ sous forme canonique.
  Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}\,z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

  On obtient :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \qquad \textit{(car } a \neq 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \qquad \textit{(où : } Z = z + \frac{b}{2a}\textit{)} \end{aligned}$$

- On souhaite donc résoudre l'équation $Z^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$. Comme $\dfrac{\Delta}{4a^2} \in \mathbb{R}$, on utilise alors le Corollaire 1. Trois cas se présentent :
  × si $\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, *i.e.* $\Delta > 0$ (car $4a^2 > 0$), alors l'équation $Z^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ possède exactement deux solutions :

$$\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

  Ainsi les deux seules solutions de l'équation $Z^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ sont :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } Z_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Reprenons la résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow Z = Z_1 \ \texttt{OU} \ Z = Z_2 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \ \texttt{OU} \ z + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \ \texttt{OU} \ z = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \ \texttt{OU} \ z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

  On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement 2 solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

× si $\dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$, *i.e.* $\Delta = 0$ (car $4a^2 \neq 0$), alors l'équation $Z^2 = 0$ possède une unique solution : $Z_0 = 0$.
Reprenons la résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow Z = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation $az^2+bz+c = 0$ admet une unique solution :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

× si $\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$, *i.e.* $\Delta < 0$ (car $4a^2 > 0$), alors l'équation $Z^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ possède exactement deux solutions :

$$i\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \text{ et } -i\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

Ainsi les deux seules solutions de l'équation $Z^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ sont :

$$Z_1 = i\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } Z_2 = -i\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Reprenons la résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow Z = Z_1 \ \texttt{OU} \ Z = Z_2 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = i\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \ \texttt{OU} \ z + \frac{b}{2a} = -i\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + i\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \ \texttt{OU} \ z = -\frac{b}{2a} - i\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \ \texttt{OU} \ z = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement 2 solutions :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

□

**Remarque**

- Notons que dans le cas $\Delta < 0$, les solutions de l'équation $az^2+bz+c = 0$ : $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$ sont conjuguées.
- Dans le cas $\Delta = 0$, le réel $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$ est une racine double du polynôme $P$, où : $P(X) = aX^2 + bX + c$.

**Exercice 2**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

***a)*** $4z^2 + 3z + 1 = 0$ ***b)*** $z^2 - 2z + 5 = 0$ ***c)*** $z^2 + 6z = 0$

*Démonstration.*

***a)*** On note $\Delta$ le discriminant du polynôme $Q(X) = 4X^2 + 3X + 1$.

$$\Delta \ = \ 3^2 - 4 \times 4 \times 1 \ = \ 9 - 16 \ = \ -7 \ < \ 0$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation vérifie :

$$\left\{ \frac{-3 + i\sqrt{7}}{8} \ , \ \frac{-3 - i\sqrt{7}}{8} \right\}$$

***b)*** On note $\Delta$ le discriminant du polynôme $Q(X) = X^2 - 2X + 5$.

$$\Delta \ = \ (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 \ = \ 4 - 20 \ = \ -16 \ < \ 0$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \frac{2 + i\sqrt{16}}{2} \ , \ \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} \right\} = \{1 + 2\,i \ , \ 1 - 2\,i\}$$

***c)*** × Méthode 1 : factorisation à vue.
Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z^2 + 6z \ = \ z\,(z+6) \ = \ (z-0)\,\big(z - (-6)\big)$$

On en déduit que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est : $\mathcal{S} = \{0 \ , \ 6\}$.

× Méthode 2 : utilisation de la proposition précédente.
On note $\Delta$ le discriminant du polynôme $Q(X) = X^2 + 6$.

$$\Delta \ = \ 6^2 - 4 \times 1 \times 0 \ = \ 36 \ > \ 0$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \frac{-6 + \sqrt{36}}{2} \ , \ \frac{-6 - \sqrt{36}}{2} \right\} = \{0 \ , \ 6\}$$

□

Il est hors de question de fournir un résultat sous la forme d'une fraction non irréductible. Dans tout exercice, on simplifiera toujours les expressions obtenues au maximum.

**Exercice 3**
On note $P$ le polynôme défini par : $P(X) = 2X^3 + 8X^2 + 15X + 14$

***1)*** Montrer que $-2$ est racine de $P$.

***2)*** Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que : $P(X) = (X+2)\,(aX^2 + bX + c)$.

***3)*** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

**Exercice 4**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\,\cos(\theta)\,z + 1 = 0$.

# II. Racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe

## II.1. Définition et première propriété

**Définition (Racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe)**
Soit $Z \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle *racines $n^{\text{ème}}$ de $Z$* les nombres complexes $z$ tels que : $z^n = Z$.

On écrit les mots « racine $n^{\text{ème}}$ de $Z$ », mais **on s'interdit**, dans $\mathbb{C}$, la notation fonctionnelle $\cancel{\sqrt[n]{Z}}$ ou $\cancel{Z^{\frac{1}{n}}}$.

**Proposition 3.**
*Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
*Tout nombre complexe non nul admet exactement $n$ racines $n^{\text{ème}}$ dans $\mathbb{C}$.*

*Démonstration.*
Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $T \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Z \ = \ R\, \mathrm{e}^{i\,T}$$

*(on notera : $|Z| = R$ et $\arg(Z) \equiv T\ [2\pi]$)*
On cherche alors à résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = Z$.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $z = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$.

- Tout d'abord :

$$z^n = Z \quad \Leftrightarrow \quad \left(r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\right)^n = R\,\mathrm{e}^{i\,T} \quad \Leftrightarrow \quad r^n\,\mathrm{e}^{i\,n\,\theta} = R\,\mathrm{e}^{i\,T}$$

- Or 2 nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et mêmes arguments modulo $2\pi$. D'où :

$$z^n = Z \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} r^n & = & R \\ n\,\theta & \equiv & T\ [2\pi] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} r^n \ = \ R \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n\,\theta = T + 2\,k\,\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} r \ = \ \sqrt[n]{R} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{T}{n} + \dfrac{2\,k\,\pi}{n} \end{array}\right.$$

*(notons que le réel $\sqrt[n]{R}$ est bien défini puisque $R \in \mathbb{R}_+^*$.)*

- Les valeurs possibles pour $\theta$ sont en nombre infini, mais, modulo $2\pi$, on en trouve exactement $n$ :

$$\dots,\quad \frac{T}{n} - \frac{2\pi}{n},\quad \frac{T}{n},\quad \frac{T}{n} + \frac{2\pi}{n},\quad \dots,\quad \frac{T}{n} + \frac{2\,(n-1)\,\pi}{n},\quad \frac{T}{n} + \frac{2\,n\,\pi}{n},\quad \dots$$

Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\frac{T}{n} + 2\,k\,\frac{\pi}{n} \ \equiv \ \frac{T}{n} + 2\,(k+n)\,\frac{\pi}{n}\ [2\pi]$$

Les valeurs distinctes de $\theta$ modulo $[2\pi]$ sont donc obtenues en faisant parcourir à $k$ l'intervalle : $[\![0, n-1]\!] = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

- On obtient :

$$z^n = Z \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} |z| \ = \ r \ = \ \sqrt[n]{R} \\ \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \arg(z) = \dfrac{T}{n} + \dfrac{2\,k\,\pi}{n} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} z \ = \ \sqrt[n]{R}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{T}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}\right)} \\ k \in [\![0, n-1]\!] \end{array}\right.$$

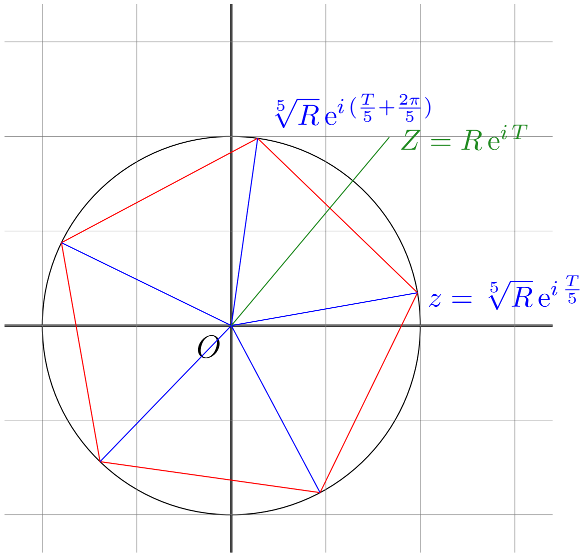
- Le nombre complexe $Z$ admet donc exactement $n$ racines $n^{\text{ème}}$. Plus précisément, il s'agit des éléments de l'ensemble :

$$\{\sqrt[n]{R}\,\mathrm{e}^{i(\frac{T}{n}+\frac{2\,k\,\pi}{n})} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

□

**Remarque**

- Notons que l'une des racines $n^{\text{ème}}$ de $Z = R\,\mathrm{e}^{i\,T}$ est $\sqrt[n]{R}\,\mathrm{e}^{i\frac{T}{n}}$.
  Chacune des autres s'obtient à partir de celle-ci en augmentant l'argument de $k \times \dfrac{2\pi}{n}$.
- Les points images des racines $n^{\text{ème}}$ trouvées sont situées sur un cercle de centre $O$ et de rayon $\sqrt[n]{R}$.
  Chacun s'obtient à partir du précédent par rotation de $\dfrac{2\pi}{n}$.
  Ils forment un polygone régulier à $n$ côtés.




## II.2. Racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité

**Définition (Racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité)**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On appelle *racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité* les nombres complexes $z$ tels que : $z^n = 1$.
- On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

**Proposition 4.**

$$\mathbb{U}_n \;=\; \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

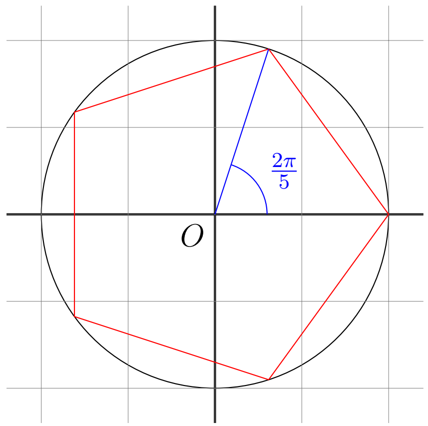
*Démonstration.*
Il s'agit simplement d'une application de la Proposition 3 à :

$$Z \;=\; 1 \;=\; 1 \times \mathrm{e}^{i\,0}$$

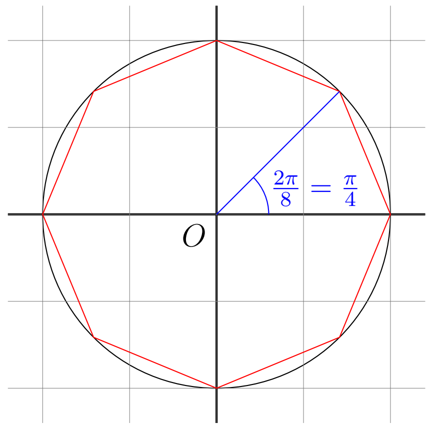
□

**Remarque**
Si l'on note : $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors :

$$\mathbb{U}_n \;=\; \{\omega^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$$




Cas $n = 5$




Cas $n = 8$

**Remarque**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Notons les propriétés suivantes :

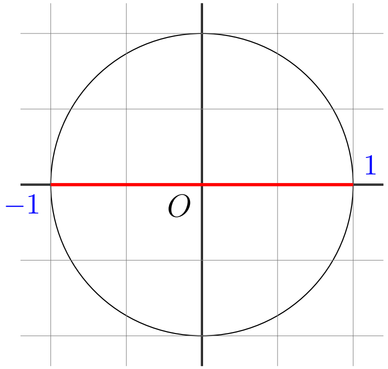
- $\left(\bar{z}\right)^n = \overline{(z^n)} = 1$. Ainsi : $\bar{z} \in \mathbb{U}_n$.
  Géométriquement, on en déduit que le polygone régulier défini par les images des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est symétrique par rapport à l'axe $Ox$ (l'axe réel).
- si $n$ est pair : $(-z)^n = z^n = 1$. Ainsi : $-z \in \mathbb{U}_n$.
  Géométriquement, on en déduit que, **si $n$ est pair**, le polygone régulier défini par les images des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est symétrique par rapport à l'origine.

**Exemples**

- Cas $n = 2$.
  - × Déterminons $\mathbb{U}_2$. D'après le cours :

$$\mathbb{U}_2 \;=\; \{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2}} \mid k \in [\![0,1]\!]\} \;=\; \{\mathrm{e}^{i\,0\,\pi}, \mathrm{e}^{i\,1\,\pi}\} \;=\; \{1, -1\}$$

  - × Traçons le polygone régulier correspondant.




  - × Remarquons au passage : $1 + (-1) = 0$.

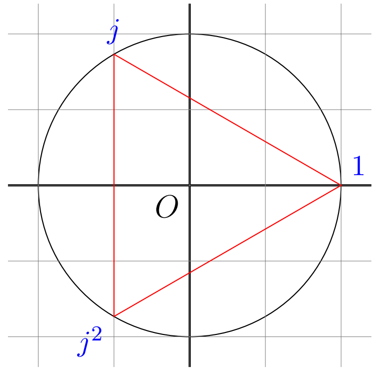
- Cas $n = 3$.
  - × Déterminons $\mathbb{U}_3$. D'après le cours :

$$\mathbb{U}_3 \;=\; \{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{3}} \mid k \in [\![0,2]\!]\} \;=\; \{1, \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}, \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}}\}$$

  On note : $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Alors :

$$j^2 \;=\; \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}} \;=\; \bar{j} \;=\; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

  - × Traçons le polygone régulier correspondant.



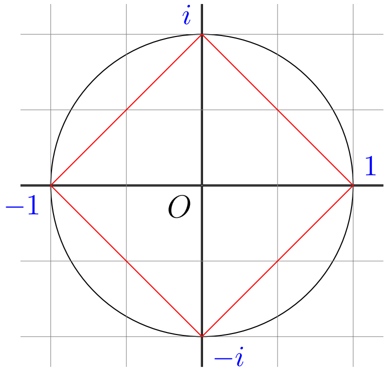

  - × Remarquons au passage :

$$1 + j + j^2 \;=\; 1 + j + \bar{j} \;=\; 1 + 2\,\mathrm{Re}\,(j) \;=\; 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \;=\; 0$$

- Cas $n = 4$.
  - × Déterminons $\mathbb{U}_4$.

$$\mathbb{U}_4 \;=\; \{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{4}} \mid k \in [\![0,3]\!]\} \;=\; \{1, \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2}}, \mathrm{e}^{i\pi}, \mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{2}}\} = \{1, i, -1, -i\}$$

  - × Traçons le polygone régulier correspondant.




  - × Remarquons au passage : $1 + i + (-1) + (-i) = 0$.

**Remarque**
On peut remarquer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ :

- $\overline{\omega^k} \;=\; \overline{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{2ik\pi}{n}} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{2i\,(n-k)\,\pi}{n}} \;=\; \omega^{n-k}$
- $\dfrac{1}{\omega^k} \;=\; \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{2ik\pi}{n}} \;=\; \omega^{n-k}$

On en déduit :

$$1, \quad \omega, \quad \omega^2, \quad \dots, \quad \omega^{n-2}, \quad \omega^{n-1}$$

inverses et conjugués l'un de l'autre

**Proposition 5.**
*Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est nulle. Autrement dit :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;=\; 0$$

*Démonstration.*
On note : $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. En particulier $\omega \in \mathbb{U}_n$, donc : $\omega^n = 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \;&=\; \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k \\
&=\; \frac{1-\omega^n}{1-\omega} && \textit{(car } \omega \neq 1\textit{)} \\
&=\; \frac{1-1}{1-\omega} && \textit{(car } \omega \in \mathbb{U}_n\textit{)} \\
&=\; 0
\end{aligned}$$

□

**Proposition 6.**
*Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

*1)* $\mathbb{U}_n \neq \varnothing$

*2)* $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$

*3) Compatibilité avec le produit :*

$$\forall (z, z') \in (\mathbb{U}_n)^2, \quad z \times z' \in \mathbb{U}_n$$

*4) Compatibilité avec l'inverse :*

$$\forall z \in \mathbb{U}_n, \quad \frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$$

*On dit que $\mathbb{U}_n$ est un groupe multiplicatif.*

*Démonstration.*

***1)*** Comme $1^n = 1$, alors : $1 \in \mathbb{U}_n$. Ainsi : $\mathbb{U}_n \neq \varnothing$.

***2)*** Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors : $z^n = 1$. D'où :

$$\big(|z|\big)^n \ = \ |z^n| \ = \ |1| \ = \ 1$$

Or $|z| \in \mathbb{R}_+^*$. On en déduit : $|z| \ = \ \sqrt[n]{1} = 1$. D'où : $z \in \mathbb{U}$.

***3)*** Soit $(z, z') \in (\mathbb{U}_n)^2$.

$$\begin{aligned} (z \times z')^n &= z^n \times z'^n \\ &= 1 \times 1 \qquad \textit{(car } (z,z') \in (\mathbb{U}_n)^2\textit{)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit : $z \times z' \in \mathbb{U}_n$.

***4)*** Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors, d'après ***2)*** : $z \in \mathbb{U}$. D'où $z \neq 0$. Ainsi $\dfrac{1}{z}$ est bien défini. De plus :

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n \ = \ \frac{1}{z^n} \ = \ \frac{1}{1} \ = \ 1 \qquad \textit{(car } z \in \mathbb{U}_n\textit{)}$$

On en déduit : $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$. □

**Remarque**

Si $Z \in \mathbb{C}^*$ et si $z_0$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de $Z$, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ :

$$z^n = Z \quad \Leftrightarrow \quad z^n = z_0^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z^n}{z_0^n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} z^Z = Z \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!], \ \frac{z}{z_0} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!], \ z = z_0 \, \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{aligned}$$

Autrement dit, si on connaît une racine $n^{\text{ème}}$ de $Z$, alors on les connaît toutes (en multipliant cette racine par $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$, $\omega^2$, ..., $\omega^{n-1}$).

**Proposition 7.**

*Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $z = r\, e^{i\theta}$.*

*Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

*L'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de $z$ est :*

$$\boxed{\{ \ \sqrt[n]{r} \ e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \ \mid \ k \in [\![0, n-1]\!] \}}$$

**Exercice 5**

Déterminer les racines cubiques de $1 + i$.

**Exercice 6**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z+1)^n \ = \ (z-1)^n$$

**Exercice 7**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1|$.

# III. Exponentielle complexe

## III.1. Définition

**Définition (Exponentielle complexe)**

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$. On pose alors :

$$e^z = \exp(z) = e^x\, e^{i\,y} = e^x \left(\cos(y) + i\,\sin(y)\right)$$

- On définit ainsi une application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ appelée *exponentielle complexe.*

**Remarque**

- L'exponentielle complexe prolonge l'exponentielle réelle (d'où la conservation du nom « exponentielle »). Autrement dit, la restriction de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ est l'exponentielle réelle ($\exp : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$).
- La restriction de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ à $i\,\mathbb{R}$ (axe imaginaire) est : $i\,t \mapsto e^{i\,t} = \cos(t) + i\,\sin(t)$.

## III.2. Propriétés

**Proposition 8.**
*La fonction* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *:*

- *n'est pas injective,*
- *n'est pas surjective.*

*Démonstration.*

- Prenons $z_1 = 0$ et $z_2 = 2i\pi$. Alors :

$$z_1 \neq z_2 \qquad \text{et} \qquad e^{z_2} = e^0\, e^{2i\pi} = 1 = e^{z_1}$$

L'exponentielle complexe n'est donc pas injective.

- Le complexe 0 n'admet pas d'antécédent par la fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. En effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$, il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$. Alors :

$$|e^z| = |e^x\, e^{i\,y}| = |e^x|\,|e^{i\,y}| = e^x > 0$$

Or : $|0| = 0$.

$\square$

**Proposition 9** (Propriété de morphisme)**.**
*Soit* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$*.*

$$e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$$

*Démonstration.* Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors il existe $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$z = x + i\,y \qquad \text{et} \qquad z' = x' + i\,y'$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
e^{z+z'} &= e^{x+x'} \times e^{i\,(y+y')} && \textit{(par définition de l'exponentielle complexe)}\\
&= \left(e^x \times e^{x'}\right) \times e^{i\,y + i\,y'} && \textit{(par propriété de l'exponentielle réelle)}\\
&= e^x \times e^{x'} \times \left(e^{i\,y} \times e^{i\,y'}\right) &&\\
&= \left(e^x \times e^{i\,y}\right) \times \left(e^{x'} \times e^{i\,y'}\right) &&\\
&= e^z \times e^{z'} && \textit{(par définition de l'exponentielle complexe)}
\end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 10.**
*Soit* $z \in \mathbb{C}$.

***1)*** $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$

***2)*** $\arg(e^z) \equiv \mathrm{Im}(z) \ [2\pi]$

***3)*** *L'écriture* $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}\, e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$ *est donc une forme exponentielle de* $e^z$.

*Démonstration.*
Soit $z \in \mathbb{C}$.

***1)*** Par définition de l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned} |\mathrm{e}^z| &= |\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\ \mathrm{e}^{i\,\mathrm{Im}(z)}| \\ &= |\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}|\ |\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Im}(z)}| \\ &= |\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}| \times 1 \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} && \textit{(car } e^{\mathrm{Re}(z)} > 0\textit{)} \end{aligned}$$

***2)*** Toujours par définition de l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned} \arg(\mathrm{e}^z) &\equiv \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\ \mathrm{e}^{i\,\mathrm{Im}(z)}\right) && [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\right) + \arg\left(\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Im}(z)}\right) && [2\pi] \\ &\equiv 0 + \arg\left(\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Im}(z)}\right) && [2\pi] \qquad \textit{(car } e^{\mathrm{Re}(z)} > 0\textit{)} \\ &\equiv \mathrm{Im}(z) && [2\pi] \end{aligned}$$

***3)*** Immédiat avec les 2 points précédents.

□

**Proposition 11.**
*Soit* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$e^z = e^{z'} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ z = z' + 2ik\pi$$

*Démonstration.*
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |\mathrm{e}^z| &=& |\mathrm{e}^{z'}| \\ \arg(\mathrm{e}^z) &\equiv& \arg\left(\mathrm{e}^{z'}\right)\ [2\pi] \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} &=& \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z')} \\ \mathrm{Im}(z) &\equiv& \mathrm{Im}(z')\ [2\pi] \end{array} \right. && \textit{(d'après la Proposition précédente)} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Re}(z) &=& \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) &\equiv& \mathrm{Im}(z')\ [2\pi] \end{array} \right. && \textit{(par bijectivité de } \exp : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') + 2k\pi \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z') + i\,(\mathrm{Im}(z') + 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ z = z' + 2ik\pi \end{aligned}$$

□

## III.3. Équation $\mathrm{e}^z = a$

Soit $a \in \mathbb{C}$. On cherche dans cette partie à résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = a$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$. Deux cas se présentent.

- si $a = 0$, alors, l'équation $\mathrm{e}^z = a = 0$ n'admet pas de solution.
  *(on a déjà démontré que* 0 *n'admet pas d'antécédent par la fonction exponentielle complexe)*

- si $a \neq 0$, alors il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $a = R\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{e}^z = a & \Leftrightarrow & \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{i\,y} = R\,\mathrm{e}^{i\,\theta} & \textit{(par définition de l'exponentielle complexe)} \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} |\mathrm{e}^x\ \mathrm{e}^{i\,y}| & = & |R\,\mathrm{e}^{i\,\theta}| \\ \arg\left(\mathrm{e}^x\ \mathrm{e}^{i\,y}\right) & \equiv & \arg\left(R\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\right)\ [2\pi] \end{array}\right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x & = & R \\ y & \equiv & \theta\ [2\pi] \end{array}\right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \ln(R) \\ y & \equiv & \theta\ [2\pi] \end{array}\right. & \textit{(par bijectivité de } \exp : \mathbb{R} \to \,]0,+\infty[\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x \ = \ \ln(R) \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ y = \theta + 2k\pi \end{array}\right. & \\
& \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \ln(R) + i\,\theta + 2ik\pi &
\end{array}$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation étudiée est :

$$\mathcal{S} \ = \ \{\ln(R) + i\,\theta + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

**Exercice 8**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathrm{e}^z = \sqrt{3} + 3i$.

# IV. Interprétations géométriques

## IV.1. Transformation du plan

### IV.1.a) Translation

**Proposition 12.**

*Soit $b \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.*

- *Le point d'affixe $z + b$ est l'image du point d'affixe $z$ par la translation de vecteur d'affixe $b$.*
- *On dit que l'application suivante représente la translation de vecteur d'affixe $b$.*

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + b \end{array}}$$

### IV.1.b) Homothéties

**Proposition 13.**

*Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Soit $z \in \mathbb{C}$.*

- *Le point d'affixe $k\,z$ est l'image du point d'affixe $z$ par la l'homothétie de rapport $k$ et de centre $O$.*
- *On dit que l'application suivante représente l'homothétie de rapport $k$ et de centre $O$.*

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & k\,z \end{array}}$$

### IV.1.c) Rotation

**Proposition 14.**
*Soit $\theta \in ]-\pi, \pi]$. Soit $z \in \mathbb{C}$.*

- *Le point d'affixe $e^{i\theta}\, z$ est l'image du point d'affixe $z$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$.*
- *On dit que l'application suivante représente la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$.*

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta}\, z \end{array}}$$

### IV.1.d) Symétrie d'axe $(Ox)$

**Proposition 15.**
*Soit $z \in \mathbb{C}$.*

- *Le point d'affixe $\overline{z}$ est l'image du point d'affixe $z$ par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.*
- *On dit que l'application suivante représente la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.*

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}}$$

**Exercice 9**
Quelle est la transformation du plan dont la représentation complexe est l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & -\overline{z} \end{array}$$

## IV.2. Alignement et orthogonalité

Les résultats suivants ont déjà été énoncés dans le précédent chapitre sur les nombres complexes. On les rappelle rapidement.

### IV.2.a) Alignement

**Proposition 16.**
*Soient $A$, $B$ et $M$ trois points deux à deux distincts d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z$. Alors :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} A,\ B \text{ et } M \text{ sont alignés} & \Leftrightarrow & M \in (AB) \\ & \Leftrightarrow & \arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) \equiv 0\ [\pi] \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{z - z_A}{z - z_B} \in \mathbb{R} \end{array}}$$

### IV.2.b) Orthogonalité

**Proposition 17.**
*Soient $A$, $B$ et $M$ trois points deux à deux distincts d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z$. Alors :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{L'angle } \widehat{CAB} \text{ est droit} & \Leftrightarrow & M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB] \\ & \Leftrightarrow & \arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{z - z_A}{z - z_B} \in i\,\mathbb{R} \end{array}}$$