CH V : Complexes - Partie I

I. Définition, écriture algébrique, conjuqué

I.1. Introduction

Historiquement, le premier ensemble à avoir été étudié est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. À partir de cet ensemble, on a souhaité résoudre différents type d'équations.

- L'équation $x-5=0$ par exemple admet bien une solution dans $\mathbb{N}$: $\mathcal{S}=\{5\}$.
- L'équation (simple) $x+1=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$. On a donc construit l'ensemble $\mathbb{Z}$, contenant $\mathbb{N}$, des entiers relatifs. Dans cet ensemble $\mathbb{Z}$, l'équation précédente admet bien une solution : $\mathcal{S}=\{-1\}$.
- L'équation (simple) $2x+1=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$. On a donc construit l'ensemble $\mathbb{D}$, contenant $\mathbb{Z}$, des nombres décimaux. Dans cet ensemble $\mathbb{D}$, l'équation précédente admet bien une solution : $\mathcal{S}=\{-0,5\}$.
- L'équation (simple) $3x+1=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{D}$. On a donc construit l'ensemble $\mathbb{Q}$, contenant $\mathbb{D}$, des nombres rationnels. Dans cet ensemble $\mathbb{Q}$, l'équation précédente admet bien une solution : $\mathcal{S}=\{-\frac{1}{3}\}$.
- L'équation (simple) $x^2=2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$. On a donc construit l'ensemble $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$, des nombres réels. Dans cet ensemble $\mathbb{R}$, l'équation précédente admet bien une solution : $\mathcal{S}=\{\sqrt{2}\}$.
- L'équation (simple) $x^2=-1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. On construit alors l'ensemble $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$, des nombres complexes. Dans cet ensemble $\mathbb{C}$, l'équation précédente admet bien une solution : $\mathcal{S}=\{i\}$.

On s'intéresse dans ce chapitre à cet ensemble $\mathbb{C}$, à sa construction, aux propriétés qui lui sont spécifiques.

I.2. Premières définitions et propriétés

On introduit un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ muni d'une somme et d'un produit avec les mêmes propriétés que sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, on admet qu'il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$, muni de deux lois internes $+$ et $\times$ et un élément i tel que $i^2=-1\in\mathbb{R}$:

- × dont les lois $+$ et $\times$ prolongent celles de $\mathbb{R}$,
- × tel que tout élément de $\mathbb{C}$ puisse s'écrire :

$$z = x + (i\times y) \quad \text{avec } (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Exemple
Les nombres $1+2i$, $2-5i$, 7, $-i\,\pi$, $\ln(7)+ie$ sont des nombres complexes.

Définition (Écriture algébrique)
Soit $z\in\mathbb{C}$. Alors il existe un unique couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $z=x+i\,y$.

- × On appelle cette expression **écriture algébrique** de z (ou **écriture cartésienne** de z).
- × Le réel x est appelé **partie réelle** de z et est noté $\mathrm{Re}\,(z)$.
- × Le réel y est appelé **partie imaginaire** de z et est noté $\mathrm{Im}\,(z)$.

Démonstration.
Démontrons l'unicité de l'écriture algébrique.
Soit $(x_1,x_2,y_1,z_2)\in\mathbb{R}^4$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z & = & x_1+iy_1 \\ z & = & x_2+iy_2 \end{array}\right.$$

- Alors tout d'abord :

$$x_1-x_2 = i\,(y_2-y_2)$$
$$\text{donc} \qquad (x_1-x_2)^2 = -(y_2-y_1)^2$$

On note : $X=x_1-x_2\in\mathbb{R}$ et $Y=y_2-y_1\in\mathbb{R}$. On obtient alors : $X^2=-Y^2$.

- Démontrons : $Y = 0$. Pour cela, raisonnons par l'absurde.
  Supposons : $Y \neq 0$. Alors :
  × d'une part : $\dfrac{Y}{X} \in \mathbb{R}$,
  × d'autre part : $\left(\dfrac{X}{Y}\right)^2 = \dfrac{X^2}{Y^2} = -1$
  Absurde ! Car le carré d'un réel est toujours positif.
  On en déduit : $Y = 0$.
- Or : $X^2 = -Y^2$. Donc : $X = 0$. Ainsi :

$$x_1 = x_2 \quad \text{et} \quad y_1 = y_2$$

L'écriture algébrique du nombre complexe z est donc unique. □

Remarque

- Comme l'écriture algébrique de z est unique, on peut parler de **l'**écriture algébrique d'un complexe, de **la** partie réelle, de **la** partie imaginaire.
- Comme l'écriture algébrique est unique, on a en particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,(z) = 0 \text{ ET } \mathrm{Im}\,(z) = 0}$$

Exemple

- Si $z = 4 + 3i$, alors : $\mathrm{Re}\,(z) = 4$ et $\mathrm{Im}\,(z) = 3$.
- Si $z = -5i + 17$, alors : $\mathrm{Re}\,(z) = 17$ et $\mathrm{Im}\,(z) = -5$.
- Si $z = \sqrt{2}$, alors : $\mathrm{Re}\,(z) = \sqrt{2}$ et $\mathrm{Im}\,(z) = 0$.
- Si $z = -i\,\dfrac{2}{5}$, alors : $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ et $\mathrm{Im}\,(z) = -\dfrac{2}{5}$.

Proposition 1.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

1) $\boxed{\mathrm{Re}\,(\lambda_1\, z_1 + \lambda_2\, z_2) = \lambda_1\ \mathrm{Re}\,(z_1) + \lambda_2\ \mathrm{Re}\,(z_2)}$ *(linéarité de* $\mathrm{Re}\,(\cdot)$*)*

2) $\boxed{\mathrm{Im}\,(\lambda_1\, z_1 + \lambda_2\, z_2) = \lambda_1\ \mathrm{Im}\,(z_1) + \lambda_2\ \mathrm{Im}\,(z_2)}$ *(linéarité de* $\mathrm{Im}\,(\cdot)$*)*

Proposition 2.

- *L'application* $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & x + iy \end{array}$ *est une bijection.*
- *On appelle* imaginaire pur *tout nombre complexe de la forme* iy *avec* $y \in \mathbb{R}$.
  On note $i\,\mathbb{R} = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$ *l'ensemble des imaginaires purs.*
- *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *On a les équivalences suivantes :*

(1) $\boxed{\mathrm{Re}\,(z) = 0 \ \Leftrightarrow\ z \in i\,\mathbb{R}}$

(2) $\boxed{\mathrm{Im}\,(z) = 0 \ \Leftrightarrow\ z \in \mathbb{R}}$

Proposition 3.
Soit $\mathcal{P}$ *un plan affine (avec des points) euclidien (muni de mesure de distances et d'angles) orienté muni d'un repère orthonormé direct* $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
On peut identifier $\mathcal{P}$ *et* $\mathbb{C}$.

Démonstration.
On note :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathcal{P} \\ z & \mapsto & O + \mathrm{Re}\,(z)\ \vec{i} + \mathrm{Im}\,(z)\ \vec{j} \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathbb{C} \\ m = (a, b) & \mapsto & a + ib \end{array}$$

Les applications φ et ψ sont bijectives et : $\varphi = \psi^{-1}$. □

Proposition 4. (Propriétés de + et ×)
Soit $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$.

1) *Associativité de + :*

$$\boxed{(z_1 + z_2) + z_3 \ = \ z_1 + (z_2 + z_3) \ = \ z_1 + z_2 + z_3}$$

2) *Commutativité de + :*

$$\boxed{z_1 + z_2 \ = \ z_2 + z_1}$$

3) *Élement neutre pour $+$: 0 est l'élément neutre pour la loi $+$.*

$$0+z \;=\; z+0 \;=\; z$$

4) *Opposé pour $+$: tout $z \in \mathbb{C}$ admet un opposé pour la loi $+$, noté $-z$.*

$$z+(-z) \;=\; (-z)+z \;=\; 0$$

5) *Associativité de $\times$:*

$$\boxed{(z_1 \times z_2) \times z_3 \;=\; z_1 \times (z_2 \times z_3) \;=\; z_1 \times z_2 \times z_3}$$

6) *Commutativité de $\times$:*

$$\boxed{z_1 \times z_2 \;=\; z_2 \times z_1}$$

7) *Élement neutre pour $\times$: 1 est l'élément neutre pour la loi $\times$.*

$$1 \times z \;=\; z \times 1 \;=\; z$$

8) *Inverse pour $\times$: tout $z \in \mathbb{C}^*$ admet un inverse pour la loi $\times$, noté $\frac{1}{z}$.*

$$z \times \frac{1}{z} \;=\; \frac{1}{z} \times z \;=\; 1$$

9) *Distributivité de $\times$ sur $+$:*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} z_1 \times (z_2+z_3) & = & z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3 \\ \textit{et} \quad (z_1+z_2) \times z_3 & = & z_1 \times z_3 + z_2 \times z_3 \end{array}}$$

10) *Intégrité :*

$$\boxed{(z_1 \times z_2 = 0) \;\Leftrightarrow\; (z_1 = 0 \texttt{ OU } z_2 = 0)}$$

Remarque
Pour la culture :

- un ensemble muni de deux lois internes $+$ et $\times$ vérifiant les propriétés ***1)***, ***2)***, ***3)***, ***4)***, ***5)***, ***7)***, ***9)*** est appelé *anneau (unitaire)*.
- si cet ensemble vérifie en plus ***6)***, alors l'anneau est dit *commutatif*.
- si, en plus de tout cela, l'ensemble vérifie la propriété ***8)*** (*i.e.* l'ensemble vérifie les propriétés ***1)*** à ***9)***), alors cet ensemble est appelé un *corps*.
- enfin, un ensemble vérifiant toutes les propriétés de ***1)*** à ***10)*** est appelé un corps *intègre*.

Exemple
Mettre les nombres suivants sous forme algébrique.

1) i^3 ***2)*** $3+2i-(3i-2)$ ***3)*** $(3-2i)\,(2+3i)$

Démonstration.

1) Tout d'abord :
$$i^3 \;=\; i^2 \times i \;=\; (-1) \times i \;=\; -i$$
On remarque : $\mathrm{Re}\left(i^3\right) = 0$ et $\mathrm{Im}\left(i^3\right) = -1$.

2) Ensuite :
$$3+2i-(3i-2) \;=\; 3+2i-3i+2 \;=\; 5-i$$
On remarque : $\mathrm{Re}\,(3+2i-(3i-2)) = 5$ et $\mathrm{Im}\,(3+2i-(3i-2)) = -1$.

3) Enfin :
$$(3-2i)\,(2+3i) \;=\; 6+9i-4i-6i^2 \;=\; 6+5i+6 \;=\; 12+5i$$
On remarque : $\mathrm{Re}\,((3-2i)\,(2+3i)) = 12$ et $\mathrm{Im}\,((3-2i)\,(2+3i)) = 5$.

□

Proposition 5.
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\; \sum_{k=0}^{n} z^k \;=\; \frac{1-z^{n+1}}{1-z}}$$

MÉTHODO **Résolution d'équations de degré 1 dans $\mathbb{C}$**

- Méthode 1 :
  - ***a)*** on résout l'équation « comme dans $\mathbb{R}$ » en isolant l'inconnue z,
  - ***b)*** on écrit le résultat obtenu sous forme algébrique.
- Méthode 2 :
  - ***a)*** on comme par écrire z sous forme alébrique : $z = x + iy$. On obtient ainsi un système de 2 équations à 2 inconnues (x et y) en identifiant parties réelles et imaginaires,
  - ***b)*** on résout ce système.

Exercice 1 *Résolution d'équations de degré* 1 *dans* $\mathbb{C}$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) : $3\,z+5i = 4i\,z+2$. On mettra la solution (s'il y en a) sous forme algébrique.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) : $(z+2)\,(3+i) = -i\,z+6$. On mettra la solution (s'il y en a) sous forme algébrique.

Démonstration.

1) • Méthode 1 :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

a) Tout d'abord :

$$\begin{aligned} 3\,z+5i = 4i\,z+2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3\,z - 4i\,z = 2-5i \\ &\Leftrightarrow \quad (3-4i)\,z = 2-5i \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{2-5i}{3-4i} \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation (E_1) admet une unique solution :

$$z_0 = \frac{2-5i}{3-4i}$$

b) De plus :

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{2-5i}{3-4i} \\ &= \frac{(2-5i)\,(3+4i)}{(3-4i)\,(3+4i)} \\ &= \frac{6+8i-15i-20\,i^2}{9-(4i)^2} \\ &= \frac{6-7i+20}{9+16} \\ &= \frac{26}{25} - \frac{7}{25}\,i \end{aligned}$$

Finalement : $\mathcal{S}_{(E_1)} = \{\frac{26}{25} - \frac{7}{25}\,i\}$.

• Méthode 2 :

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x+iy$.

a) Tout d'abord :

$$\begin{aligned} & 3\,z+5i = 4i\,z+2 \\ \Leftrightarrow \quad & 3\,(x+iy)+5i = 4i\,(x+iy)+2 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x+3iy+5i = 4ix-4y+2 \\ \Leftrightarrow \quad & (3x+4y)+i(-4x+3y) = 2-5i \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3\,x & + & 4\,y & = & 2 \\ -4\,x & + & 3\,y & = & -5 \end{array} \right. \quad \textit{(par unicité de l'écriture sous forme algébrique)} \end{aligned}$$

b) On poursuit la résolution du système.

$$3\,z+5i=4i\,z+2 \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 3\,x & + & 4\,y & = & 2\\ -4\,x & + & 3\,y & = & -5\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 3\,L_2+4\,L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} 3\,x & + & 4\,y & = & 2\\ & & 25\,y & = & -7\end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 25\,L_1-4\,L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} 75\,x & & & = & 78\\ & & 25\,y & = & -7\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{75}\,L_1\\ L_2 \leftarrow \frac{1}{25}\,L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{78}{75} = \dfrac{\cancel{3}\times 26}{\cancel{3}\times 25} = \dfrac{26}{25}\\[2ex] y = -\dfrac{7}{25}\end{array}\right.$$

Finalement, on retrouve bien (heureusement !) : $\mathcal{S}_{(E_1)} = \{\frac{26}{25} - \frac{7}{25}\ i\}$.

2) • Méthode 1 :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

a) Tout d'abord :

$$\begin{aligned}(z+2)(3+i) = -i\,z+6 &\Leftrightarrow 3z+i\,z+\cancel{6}+2i = -i\,z+\cancel{6}\\ &\Leftrightarrow (3+2i)\,z = -2i\\ &\Leftrightarrow z = -\frac{2i}{3+2i}\end{aligned}$$

On en déduit que l'équation (E_2) admet une unique solution :

$$z_0 = -\frac{2i}{3+2i}$$

b) De plus :

$$z_0 = -\frac{2i}{3+2i} = -\frac{2i\,(3-2i)}{(3+2i)\,(3-2i)} = -\frac{6i+4}{9-(2i)^2} = -\frac{4}{13} - \frac{6}{13}\,i$$

Finalement : $\mathcal{S}_{(E_2)} = \{-\frac{4}{13} - \frac{6}{13}\ i\}$.

• Méthode 2 :

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x+iy$.

a) Tout d'abord :

$$\begin{aligned} & (z+2)(3+i) = -i\,z+6\\ \Leftrightarrow\ & (x+iy+2)(3+i) = -i\,(x+iy)+6\\ \Leftrightarrow\ & 3x+ix+3iy-y+\cancel{6}+2i = -ix+y+\cancel{6}\\ \Leftrightarrow\ & (3x-2y)+i(2x+3y) = -2i\\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcrcr} 3\,x & - & 2\,y & = & 0\\ 2\,x & + & 3\,y & = & -2\end{array}\right. \quad \textit{(par unicité de l'écriture sous forme algébrique)}\end{aligned}$$

b) On pousuit la résolution du système.

$$(z+2)(3+i) = -i\,z+6$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} 3\,x & - & 2\,y & = & 0\\ 2\,x & + & 3\,y & = & -2\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 3\,L_2-2\,L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} 3\,x & - & 2\,y & = & 0\\ & & 13\,y & = & -6\end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 13\,L_1+2\,L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} 39\,x & & & = & -12\\ & & 13\,y & = & -6\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{39}\,L_1\\ L_2 \leftarrow \frac{1}{13}\,L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{12}{39} = -\dfrac{\cancel{3}\times 4}{\cancel{3}\times 13} = -\dfrac{4}{13}\\[2ex] y = -\dfrac{6}{13}\end{array}\right.$$

Finalement, on retrouve bien : $\mathcal{S}_{(E_2)} = \{-\frac{4}{13} - \frac{6}{13}\ i\}$.

□

Pour la résolution de systèmes, on privilégiera **toujours** l'utilisation de l'algorithme du pivot de Gauss à la substitution pour diminuer drastiquement le risque d'erreurs de calculs.

I.3. Conjugué d'un nombre complexe

Définition (Conjugué)

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$ le nombre complexe :

$$\boxed{\bar{z} \; = \; x - iy}$$

Proposition 6.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1) $\boxed{\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}}$ *2)* $\boxed{\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}}$

3) $\boxed{z\,\bar{z} = (\mathrm{Re}\,(z))^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2}$

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

1) On remarque :

$$z + \bar{z} \; = \; (x + \cancel{iy}) + (x - \cancel{iy}) \; = \; 2x \; = \; 2\,\mathrm{Re}\,(z)$$

D'où : $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$.

2) De même :

$$z - \bar{z} \; = \; (\cancel{x} + iy) - (\cancel{x} - iy) \; = \; 2iy \; = \; 2i\,\mathrm{Im}\,(z)$$

D'où : $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

3) Enfin :

$$z\,\bar{z} \; = \; (x + iy)\,(x - iy) \; = \; x^2 - (iy)^2 \; = \; x^2 + y^2$$

D'où : $z\,\bar{z} = (\mathrm{Re}\,(z))^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2$.

□

Proposition 7. (Propriétés de la conjugaison)

1) *Caractère involutif :* $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \; \overline{(\bar{z})} = z}$.

2) *Linéarité :* $\boxed{\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \; \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \; \overline{\lambda_1\, z_1 + \lambda_2\, z_2} = \lambda_1\, \overline{z_1} + \lambda_2\, \overline{z_2}}$.

3) *Compatibilité avec le produit :* $\boxed{\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \; \overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}}$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \; \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n}$.

4) *Compatibilité avec l'inverse :* $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*, \; \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}}$.

5) *Compatibilité avec le quotient :* $\boxed{\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \; \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}$.

Démonstration.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$, alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$. Alors :

$$\overline{(\bar{z})} \; = \; \overline{(\overline{x + iy})} \; = \; \overline{x - iy} \; = \; \overline{x + i(-y)} \; = \; x - i(-y) \; = \; x + iy \; = \; z$$

2) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors il existe $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.

- D'une part :

$$\lambda_1\, z_1 + \lambda_2\, z_2 \; = \; \lambda_1\,(x_1 + iy_1) + \lambda_2\,(x_2 + iy_2) \; = \; (\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2) + i\,(\lambda_1\, y_1 + \lambda_2\, y_2)$$

Ainsi :

$$\overline{\lambda_1\, z_1 + \lambda_2\, z_2} \; = \; (\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2) - i\,(\lambda_1\, y_1 + \lambda_2\, y_2)$$

- D'autre part :

$$\lambda_1\,\overline{z_1}+\lambda_2\,\overline{z_2} \;=\; \lambda_1\,(x_1-iy_1)+\lambda_2\,(x_2-iy_2) \;=\; (\lambda_1\,x_1+\lambda_2\,x_2)-i\,(\lambda_1\,y_1+\lambda_2\,y_2)$$

Finalement, on a bien :

$$\overline{\lambda_1\,z_1+\lambda_2\,z_2} = \lambda_1\,\overline{z_1}+\lambda_2\,\overline{z_2}$$

3) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors il existe $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $z_1 = x_1+iy_1$ et $z_2 = x_2+iy_2$.

- D'une part :

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (x_1+iy_1)\,(x_2+iy_2) \\ &= x_1\,x_2 + i\,x_1\,y_1 + i\,x_2\,y_1 + i^2\,y_1\,y_2 \\ &= (x_1\,x_2 - y_1\,y_2) + i\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\overline{z_1 \times z_2} = (x_1\,x_2 - y_1\,y_2) - i\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1)$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \times \overline{z_2} &= (x_1-iy_1)\,(x_2-iy_2) \\ &= x_1\,x_2 - i\,x_1\,y_2 - i\,x_2\,y_1 + i^2\,y_1\,y_2 \\ &= (x_1\,x_2 - y_1\,y_2) - i\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1) \end{aligned}$$

Finalement, on a bien :

$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$$

(on démontre le cas particulier par récurrence sur n)

4) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que : $z = x+iy$.

- On commence par écrire $\dfrac{1}{z}$ sous forme algébrique :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)\,(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2-(iy)^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

On en déduit :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}\right)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

- Par ailleurs :

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{(x-iy)\,(x+iy)} = \frac{x+iy}{x^2-(iy)^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$$

Finalement, on a bien :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{\overline{z}}$$

5) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(z_1 \times \frac{1}{z_2}\right)} \\ &= \overline{z_1} \times \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} && \textit{(par compatibilité de la conjugaison avec le produit)} \\ &= \overline{z_1} \times \frac{1}{\overline{z_2}} && \textit{(par compatibilité de la conjugaison avec l'inverse)} \\ &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \end{aligned}$$

□

Remarque

- Rappelons la définition de bijectivité.
  Une fonction $f : E \to F$ est dite bijective s'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que :
  $$f \circ g = \mathrm{id}_F \qquad \text{et} \qquad g \circ f = \mathrm{id}_E$$
- Le caractère involutif de l'application $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \bar{z} \end{array}$ permet donc d'en déduire sa bijectivité. Démontrons le.
  Soit $z \in \mathbb{C}$.
  $$(f \circ f)(z) \ = \ f\big(f(z)\big) \ = \ f(\bar{z}) \ = \ \overline{(\bar{z})} \ = \ z$$
  Comme cette égalité est vérifiée pour tout $z \in \mathbb{C}$, on en déduit :
  $$f \circ f \ = \ \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$$
  On en conclut que f est bijective, de réciproque elle-même ($f^{-1} = f$).
- On appelle aussi les fonctions involutives (c'est-à-dire les fonctions f vérifiant $f \circ f = \mathrm{id}_E$) des symétries.
  Nous reviendrons plus en détails sur ce point dans le chapitre suivant mais rappelons nous que l'ensemble $\mathbb{C}$ est en bijection avec le plan $\mathbb{R}^2$ (on parle d'ailleurs de *plan complexe*). Dans ce contexte, nous verrons que la conjugaison est effectivement une symétrie : la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 2

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

a) $\dfrac{1}{i}$ ***b)*** $\dfrac{1}{1+2i}$ ***c)*** $\dfrac{1+i}{2i-3}$

Démonstration.

1) Tout d'abord :
$$\frac{1}{i} \ = \ \frac{i}{i \times i} \ = \ \frac{i}{-1} \ = \ -i$$
On remarque : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{i}\right) = 0$ et $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{i}\right) = -1$.

2) Ensuite :
$$\frac{1}{1+2i} \ = \ \frac{1-2i}{(1+2i)\,(1-2i)} \ = \ \frac{1-2i}{1-(2i)^2} \ = \ \frac{1-2i}{1+4} \ = \ \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\,i$$
On remarque : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1+2i}\right) = \dfrac{1}{5}$ et $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{1+2i}\right) = -\dfrac{2}{5}$.

3) Enfin :
$$\frac{1+i}{2i-3} \ = \ \frac{(1+i)\,(-3-2i)}{(-3+2i)\,(-3-2i)} \ = \ \frac{-3-2i-3i+2}{(-3)^2-(2i)^2} \ = \ \frac{-1-5i}{13} \ = \ -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}\,i$$
On remarque : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+i}{2i-3}\right) = -\dfrac{1}{13}$ et $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1+i}{2i-3}\right) = -\dfrac{5}{13}$.

□

Remarque

À l'aide de la proposition précédente, on peut démontrer par récurrence les résultats suivants :

a) Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.
$$\boxed{\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}}$$

b) Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.
$$\boxed{\overline{\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right)} \ = \ \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}}$$

Proposition 8.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes.

1) $\boxed{z = \bar{z} \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{R}}$

2) $\boxed{z = -\bar{z} \;\Leftrightarrow\; z \in i\,\mathbb{R}}$

Démonstration.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$.

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow \cancel{x}+iy = \cancel{x}-iy \Leftrightarrow 2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} z = -\bar{z} &\Leftrightarrow x + iy = -(x - iy) \\ &\Leftrightarrow x + \cancel{iy} = -x + \cancel{iy} \\ &\Leftrightarrow 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in i\,\mathbb{R} \end{aligned}$$

□

Exercice 3
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$a\bar{a} = 1, \qquad b\bar{b} = 1, \qquad a \neq b$$

Démontrer : $\dfrac{c + ab\bar{c} - a - b}{a - b} \in i\mathbb{R}$.

Démonstration.

On note : $z = \dfrac{c + ab\bar{c} - a - b}{a - b}$.

- Tout d'abord :

$$z \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = -\bar{z}$$

- Or :

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \overline{\left(\frac{c + ab\bar{c} - a - b}{a - b}\right)} \\ &= \frac{\overline{c + ab\bar{c} - a - b}}{\overline{a - b}} \\ &= \frac{\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{\bar{c}} - \bar{a} - \bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} \\ &= \frac{\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c - \bar{a} - \bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} \\ &= \frac{\bar{c} + \frac{c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \\ &= \frac{ab\bar{c} + c - b - a}{b - a} \\ &= -\frac{c + ab\bar{c} - a - b}{a - b} \;=\; -z \end{aligned}$$

On en déduit : $z \in i\mathbb{R}$.

□

Exercice 4 *Résolution d'équations*
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $(E_1) : 2z + i\bar{z} = 5 - 2i$

b) $(E_2) : 2\bar{z} + 5 - 2i = 4 + i + 3\bar{z}$

c) $(E_3) : 3z + 7 = 4 - 3\bar{z}$

Démonstration.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} 2z + i\bar{z} = 5 - 2i \quad &\iff \quad 2(x+iy) + i(x - iy) = 5 - 2i \\ &\iff \quad 2x + 2iy + ix + y = 5 - 2i \\ &\iff \quad (2x+y) + i(x+2y) = 5 - 2i \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 5 \\ x & + & 2y & = & -2 \end{array} \right. \\ &\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 5 \\ & & 3y & = & -9 \end{array} \right. \\ &\overset{L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 6x & & & = & 24 \\ & + & 3y & = & -9 \end{array} \right. \\ &\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & \dfrac{24}{6} = 4 \\ & + & y & = & -\dfrac{9}{3} = -3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On en déduit : $\mathcal{S}_{(E_1)} = \{4 - 3i\}$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$2\bar{z} + 5 - 2i = 4 + i + 3\bar{z} \ \Leftrightarrow \ 1 - 3i = \bar{z} \ \Leftrightarrow \ 1 + 3i = z$$

On en déduit : $\mathcal{S}_{(E_2)} = \{1 + 3i\}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} 3z + 7 = 4 - 3\bar{z} \quad &\Leftrightarrow \quad 3(z + \bar{z}) = -3 \\ &\Leftrightarrow \quad z + \bar{z} = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,\mathrm{Re}\,(z) = -1 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Re}\,(z) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit : $\mathcal{S}_{(E_3)} = \{-\frac{1}{2} + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$.

I.4. Formule du binôme de Newton

I.4.a) Factorielle et combinaisons

Définition (Factorielle)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **factorielle de** n et on note $n!$ l'entier :

$$\boxed{n! \ = \ \prod_{k=1}^{n} k \ = \ n \times (n-1) \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}$$

On a de plus la convention : $0! = 1$.

Définition (p-combinaison)

Soit E un ensemble fini.

- On appelle p-**combinaison** d'éléments de E toute partie à p éléments de E.
- On note $\binom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons d'éléments d'un ensemble E possédant n éléments *i.e.* le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.
- $\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-(p-1))}{p!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$

(le symbole $\binom{n}{p}$ est lu « p parmi n »)

Démonstration.

Considérons une partie à p éléments de E.

Ordonner ces éléments correspond à se donner un p-arrangement de ceux-ci.

Or, il y a $p!$ p-arrangements d'un ensemble à p éléments (on a p possibilités pour le 1^{er} arrangement choisi, $(p-1)$ pour le $2^{\text{ème}}$, …, 2 possibilités pour le $(p-1)^{\text{ème}}$ et 1 possibilité pour le $p^{\text{ème}}$). $\square$

Ainsi, chaque p-combinaison d'éléments de E donne lieu à $p!$ p-arrangements différents. Autrement dit, il y $p!$ fois plus de p-arrangements que de p-combinaisons. On en conclut que :

$$p! \times \binom{n}{p} = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

En effet pour choisir p éléments dans un ensemble à n éléments, on a n possibilités pour le 1^{er} élément choisi, $(n-1)$ pour le $2^{\text{ème}}$, ..., $n-(p-2)$ possibilités pour le $(p-1)^{\text{ème}}$ et $n-(p-1)$ possibilité pour le $p^{\text{ème}}$. □

Exemple classique : tirage `SIMULTANÉ` (`SANS` remise) de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
(sans ordre et sans répétition)

Exemple
On considère l'urne à 9 boules précédente et on procède au tirage simultané de 3 boules de l'urne. Les éléments suivants sont des 3-combinaisons d'éléments de $[\![1, 9]\!]$.

$$\{1,3,8\} \quad \{2,7,5\} \quad \{4,1,2\} \quad \{1,2,3\} \quad \{4,5,6\} \quad \{1,7,9\} \quad \{2,7,8\} \ldots$$

> Il n'y a pas d'ordre associé à ce tirage : les boules sont tirées en même temps. Notez que les ensembles $\{2,7,5\}$ et $\{2,5,7\}$ sont égaux.
> *(deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments)*

Combien y a-t-il de tirages en tout ?
Une 3-combinaison peut-être vue comme un 3-arrangement dans lequel l'ordre ne serait pas pris en compte. Comparons le nombre de 3-arrangements au nombre de 3-combinaisons. Si l'on dispose d'une 3-combinaison $\{1,3,8\}$, on peut produire à l'aide de ses éléments, les 3-arrangements suivants :

$$(1,3,8) \quad (1,8,3) \quad (3,1,8) \quad (3,8,1) \quad (8,1,3) \quad (8,3,1)$$

On a ainsi produit six 3-arrangements différents. Chacun de ces 3-arrangements correspond à une manière d'ordonner les éléments 1, 3, 8. Autrement dit, on considère toutes les permutations de l'ensemble $\{1,3,8\}$. Il y en a $3! = 6$.
Au final, à chaque 3-combinaison correspond $3!$ (*i.e.* six) 3-arrangements. Il y a donc $3!$ fois moins de 3-combinaisons que de 3-arrangements :

$$\binom{9}{3} = \frac{A_9^3}{3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

De manière générale, si l'urne contient n boules et qu'on effectue le tirage `SIMULTANÉ` de p boules, il y a $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ tirages différents.

Propriété
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

a) $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$

b) Si $k < 0$ ou si $k > n$, on convient que $\binom{n}{k} = 0$.

c) Quelques cas simples :
- $\binom{n}{0} = 1$: la seule partie à 0 élément d'un ensemble à n éléments est l'ensemble vide.
- $\binom{n}{n} = 1$: la seule partie à n éléments d'un ensemble E à n éléments est l'ensemble E.
- $\binom{n}{1} = n$: il y a n parties à un élément d'un ensemble E à n éléments (ce sont les singletons $\{x_i\}$).
- $\binom{n}{n-1} = n$: il y a n parties à $n-1$ éléments d'un ensemble E à n éléments (ce sont les ensembles $E \setminus \{x_i\}$).

d) $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$

e) Formule du triangle de Pascal :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

Cette formule s'écrit souvent sous la forme d'un triangle :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	...						

f)

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$$

g) Formule de Vandermonde :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \forall p \in [\![0,a+b]\!],\ \sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k} = \binom{a+b}{p}}$$

Démonstration.

d) Il y a deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

× Méthode théorique.
Soit E est un ensemble à n éléments.
Notons P_k l'ensemble des parties à k éléments de E.

L'application $\varphi\ :\ \left|\begin{array}{ccc} P_k & \to & P_{n-k} \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array}\right.$ est une bijection.
Il y a donc autant de parties à k éléments de E que de parties à $n-k$ éléments de E (les complémentaires des précédents).

e) Ici aussi, il y a deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-\cancel{1})-(k-\cancel{1}))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{k\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\,((n-1)-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} = \frac{(n-k)\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

En sommant ces deux éléments, on obtient :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(k+(n-k))\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

× Méthode théorique.
Soit E est un ensemble à n éléments. Soit $a \in E$. Notons alors P_k^a l'ensemble des parties de E à k éléments contenant a et $P_k^{\bar{a}}$ l'ensemble des parties de E à k éléments contenant a ne contenant pas a.
Tout $A \in P_k$ vérifie : $(A \in P_k^a)$ `OU` $(A \in P_k^{\bar{a}})$.
Autrement dit : $P_k = P_k^a \ \cup\ P_k^{\bar{a}}$ (union disjointe).
On en déduit que : $\text{Card}(P_k) = \text{Card}(P_k^a) \ +\ \text{Card}(P_k^{\bar{a}})$.
On conclut en remarquant tout d'abord que : $\text{Card}(P_k) = \binom{n}{k}$
puis que : $\text{Card}(P_k^a) = \binom{n-1}{k-1}$ $\left(\begin{array}{l}\text{on choisit } k-1 \text{ éléments} \\ \text{dans } E \setminus \{a\} \text{ et on ajoute } a\end{array}\right)$
et enfin : $\text{Card}(P_k^{\bar{a}}) = \binom{n-1}{k}$ (on choisit k éléments dans $E \setminus \{a\}$)

f) Encore deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$\begin{aligned} n\binom{n-1}{k-1} &= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \\ &= k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= k\binom{n}{k} \end{aligned}$$

× Méthode théorique.
On s'intéresse au nombre de couples formés d'un ensemble $A \in P_k$ et d'un élément a pris dans A. Il y en a : $\text{Card}\, P_k \times \text{Card}\, A = \binom{n}{k} \times k$.
On aurait pu raisonner différement : choisir d'abord un élément $a \in E$ puis former l'ensemble A en choisissant $k-1$ éléments autres que a et en ajoutant a. Au final, on obtient : $\text{Card}\, E \times \text{Card}\, P_k^a = n\binom{n-1}{k-1}$

g) Encore et toujours deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de remarquer que : $(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b$ et d'appliquer la formule du binôme (*cf* Proposition 9).

× Méthode théorique.
Si E est un ensemble à $a+b$ éléments, on peut l'écrire comme union disjointe de F (à a éléments) et de G (à b éléments). Pour choisir une partie à p éléments de E on peut choisir une partie à k éléments de F et la compléter par une partie à $p-k$ éléments de G.

Plus précisément, l'ensemble P_k est en bijection avec :

$$\bigcup_{k=0}^{p} (T_k \times R_{p-k})$$

où T_k est l'ensemble des parties à k éléments de F
et R_k est l'ensemble des parties à $p-k$ éléments de G.

□

I.4.b) Formule du binôme de Newton et variante

Proposition 9.
Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

1) *Binôme de Newton :* $\boxed{(u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k}}$.

2) $\boxed{u^n - v^n = (u-v) \sum\limits_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n-k} = (u-v) \sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k\, v^{n-1-k}}$.

Démonstration.

1) Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$

où $\mathscr{P}(n)$: $(u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k}$.

▸ **Initialisation** :

× D'une part : $(u+v)^0 = 1$.

× D'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} u^k\, v^{0-k} = \binom{0}{0} u^0\, v^0 = 1$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$
  ($i.e.$ $(u+v)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \dbinom{n+1}{k} u^k\, v^{(n+1)-k}$).

$$
\begin{aligned}
& (u+v)^{n+1} \\
= \ & (u+v)\,(u+v)^n \\
= \ & (u+v) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
= \ & u \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} + v \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} && \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{k+1}\, v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} && \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n}{k-1} u^k\, v^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

Or :

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \\
= \ & \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n}{n} u^{n+1}\, v^{n+1-(n+1)} \right) \\
& + \left(\binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \right)
\end{aligned}
$$

On en déduit :

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \\
= \ & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0 \\
= \ & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0 && \textit{(par triangle de Pascal)} \\
= \ & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} u^{n+1}\, v^0 \\
= \ & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ (u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} u^k\, v^{n-k}$.

2) Soit $(u,v) \in \mathbb{C}^2$.

- Méthode 1 : manipulation du symbole $\sum$.

$$
\begin{aligned}
& (u-v) \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n-k} \\
= \ & u \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n-k} - v \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n-k} && \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} u^k\, v^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n+1-k} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} u^k\, v^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n-(k-1)}
\end{aligned}
$$

Par décalage d'indice :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n} u^k\, v^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n-(k-1)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} u^k\, v^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} u^k\, v^{n-k} \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n-1} u^k\, v^{n-k}} + u^n\, v^{n-n} \right) - \left(u^0\, v^{n-0} + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} u^k\, v^{n-k}} \right) \\
= \ & u^n - v^n
\end{aligned}$$

- Méthode 2 : récurrence.
  On laisse le soin au lecteur de rédiger cette 2$^{\text{ème}}$ présentation. □

Remarque
On rencontrera la formule du binôme de Nexton sous différentes formes (différentes valeurs pour u et v). On a notamment :

- $(u+v)^n = (v+u)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$
- $(u-v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u^{n-k} v^k$
- $(1+u)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k$
- $(1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
  Si E est un ensemble à n éléments, on a :
  $$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k \text{ (union disjointe) et donc } \operatorname{Card} E = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card}(P_k)$$
  On obtient ainsi une nouvelle démonstration de : $\operatorname{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
- $(1-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Exercice 5
Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} z^k$ ***b)*** $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{k}}{k+1} z^k$

Remarque • On pourra retenir quatre cas particuliers de ***2)***. Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}
\times\ u^2 - v^2 &= (u-v)(u+v) \\
\times\ u^2 + v^2 &= (u-iv)(u+iv) \\
\times\ u^3 - v^3 &= (u-v)\left(u^2+uv+v^2\right) \\
\times\ u^3 + v^3 &= (u+v)\left(u^2-uv+v^2\right)
\end{aligned}$$

- On retiendra aussi la propriété suivante.
  Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $q \geqslant p$.
  $$\sum_{k=p}^{q} z^k = z^p\, \frac{z^{q-p+1}-1}{z-1}$$
  En effet :
  $$\sum_{k=p}^{q} z^k = z^p \sum_{k=0}^{q-p} z^k = z^p\, \frac{z^{q-p+1}-1}{z-1}$$
  On n'hésitera pas à écrire la première égalité avec des points de suspension si on ne maîtrise pas encore l'utilisation du symbole $\sum$ *.*

  Si $z = 1$, la formule précédente n'est pas valide. Mais on a l'égalité suivante :
  $$\sum_{k=p}^{q} 1^k = \sum_{k=p}^{q} 1 = q-p+1$$

II. Le plan complexe

II.1. Image d'un complexe - Affixe d'un point

Proposition 10.
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine (avec des points) euclidien (muni de mesure de distances et d'angles) orienté muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.
On peut identifier $\mathcal{P}$ et $\mathbb{C}$.

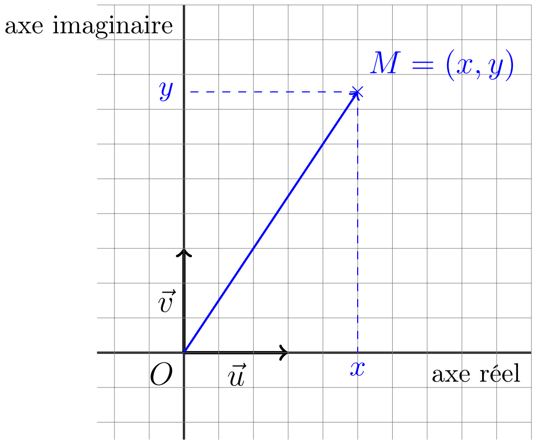
Démonstration.
On note :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathcal{P} \\ z & \mapsto & O + \mathrm{Re}(z)\ \vec{u} + \mathrm{Im}(z)\ \vec{v} \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathbb{C} \\ M = (x, y) & \mapsto & x + i\,y \end{array}$$

Les applications φ et ψ sont bijectives et : $\varphi = \psi^{-1}$. □

Remarque
La bijection φ est aussi souvent définie de la façon suivante :

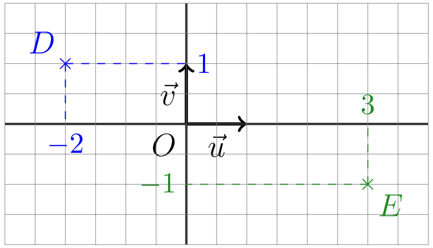
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ z & \mapsto & M = \big(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\big) \end{array}$$



Définition (Image d'un complexe - Affixe d'un point)

- Soit $z \in \mathbb{C}$.
  Le point M de coordonnées $\big(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\big)$ est appelé **image** de z.
- Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  Le nombre complexe $z = x + i\,y$ est appelé **affixe** de M.
- L'axe des abscisses est appelé **axe des réels**, et l'axe des ordonnées **axe des imaginaires purs**.

Exemple



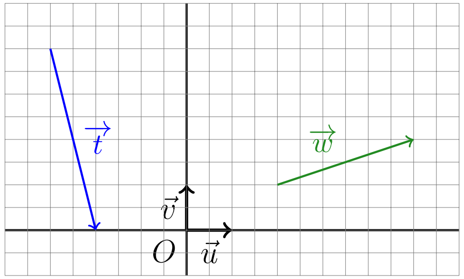
- Le point D a pour affixe $-2 + i$.
- Le point image du nombre complexe $3 - i$ est E.

II.2. Affixe d'un vecteur

Définition (Vecteur image - Affixe d'un vecteur)

- Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$.
  Le vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est appelé **vecteur image** du nombre complexe z.
- Soit un vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
  Le nombre complexe $z = x + i\,y$ est appelé **affixe** du vecteur $\vec{w}$.

Exemple



- Le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour affixe $3+i$.
- Le vecteur image du nombre complexe $1-4\,i$ est le vecteur $\overrightarrow{t}$.

Proposition 11. (Liens entre affixe d'un point et affixe d'un vecteur)

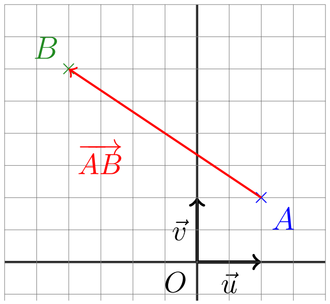
- *Soit $z \in \mathbb{C}$.*

$$\boxed{\text{le point } M \text{ a pour affixe } z \quad \Leftrightarrow \quad \text{le vecteur } \overrightarrow{OM} \text{ a pour affixe } z}$$

- *Soient A un point d'affixe z_A et B un point d'affixe z_B.*

  Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Exemple



On note A le point d'affixe $z_A = 1+i$ et B le point d'affixe $z_B = -2+3\,i$.

Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe :

$$z_B - z_A \;=\; (-2+3\,i)-(1+i) \;=\; -3+2\,i$$

II.3. Propriétés

Proposition 12.
Soit $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixes respectives z_1 et z_2.

1) *Le vecteur $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ a pour affixe $z_1 + z_2$*

2) *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\lambda \cdot \overrightarrow{w_1}$ a pour affixe $\lambda\, z_1$.*

Démonstration.

1) Soients $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixes respectives z_1 et z_2.
Alors il existe $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $z_1 = x_1 + i\,y_1$ et $z_2 = x_2 + i\,y_2$.
De plus, par définition de l'affixe d'un vecteur :

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

On obtient :

× d'une part :

$$z_1 + z_2 \;=\; (x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2) \;=\; (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

× d'autre part :

$$\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le nombre complexe $z_1 + z_2$ est bien l'affixe du vecteur $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$.

2) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{w_1}$ un vecteur du plan complexe d'affixe z_1.
Alors il existe $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z_1 = x_1 + i\,y_1$. De plus, par définition de l'affixe d'un vecteur :

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

On obtient :

× d'une part :

$$\lambda\, z_1 \;=\; \lambda\,(x_1 + i\, y_1) \;=\; (\lambda\, x_1) + i\,(\lambda\, y_1)$$

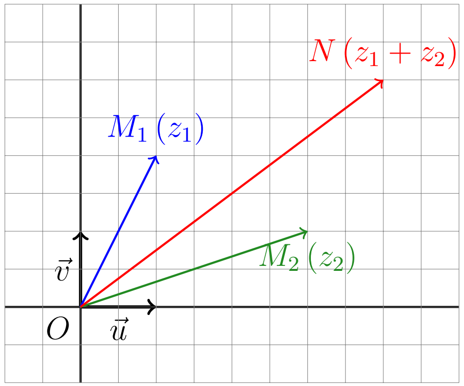
× d'autre part :

$$\lambda \cdot \overrightarrow{w_1} \;=\; \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, y_1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le nombre complexe $\lambda\, z_1$ est bien l'affixe du vecteur $\lambda \cdot \overrightarrow{w_1}$.

□

Remarque
La somme de nombres complexes peut donc s'interpréter géométriquement.
En effet, soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on note $M_1\,(z_1)$ et $M_2\,(z_2)$.
Alors $z_1 + z_2$ est l'affixe du point N tel que : $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.



Exemple
Soient $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixes respectives $z_1 = 2-i$ et $z_2 = 1 + 3\, i$.
Calculer l'affixe du vecteur $2 \cdot \overrightarrow{w_1} - \overrightarrow{w_2}$.

Démonstration.
On note z l'affixe du vecteur $2 \cdot \overrightarrow{w_1} - \overrightarrow{w_2}$. Alors :

$$z \;=\; 2\, z_1 - z_2 \;=\; 2\,(2-i) - (1 + 3\, i) \;=\; 3 - 5\, i$$

□

Proposition 13.
1) Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.

$$\boxed{\text{les points } A \text{ et } B \text{ sont confondus} \quad \Leftrightarrow \quad z_A = z_B}$$

2) Soient $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixes respectives z_1 et z_2.

$$\boxed{\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{w_2} \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z_2}$$

Démonstration.
La démonstration de cette proposition est immédiate. Elle provient du caractère bijectif de l'application φ définie au début de ce chapitre. □

Proposition 14. (Interprétation géométrique du conjugué)
Soit $z \in \mathbb{C}$. On note M le point du plan complexe d'affixe z.

$$\boxed{\text{Le point } M' \text{ d'affixe } \bar{z} \text{ est le symétrique de } M \text{ par rapport à l'axe des abscisses.}}$$

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On note M le point du plan complexe d'affixe z.
Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$. De plus, par définition de l'affixe d'un point :

$$M = (x, y)$$

On note M' le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisse.
On obtient :

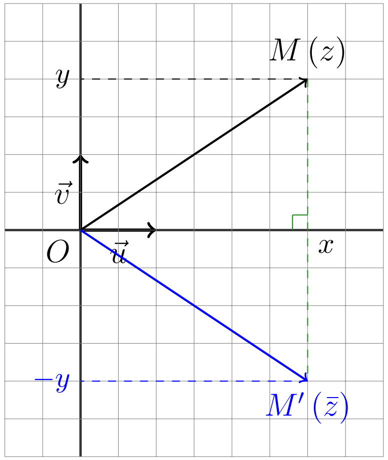
× d'une part, par définition de M' :

$$M' = (x, -y)$$

× d'autre part, par définition du conjugué :

$$\bar{z} \ = \ x - i\,y$$

Ainsi, le nombre complexe $\bar{z}$ est bien l'affixe du point M'. □



Proposition 15. (Affixe du milieu d'un segment)
Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.

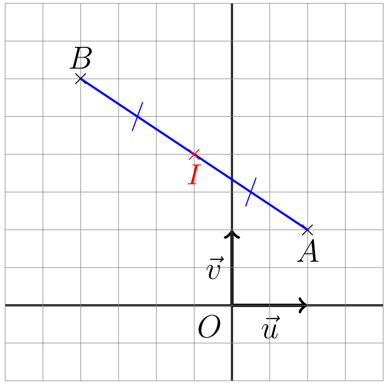
$$\boxed{\textit{Le milieu } I \textit{ du segment } [A, B] \textit{ a pour affixe } \frac{z_A + z_B}{2}.}$$

Exemple
On note A le point d'affixe $z_A = 1 + i$ et B le point d'affixe $z_B = -2 + 3\,i$.
Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment $[A, B]$.

Démonstration.

On note z_I l'affixe du point I. Alors :

$$\begin{aligned} z_I \ &= \ \frac{z_A + z_B}{2} \\ &= \ \frac{(1 + i) + (-2 + 3\,i)}{2} \\ &= \ -\frac{1}{2} + 2\,i \end{aligned}$$



□

III. Module et argument d'un nombre complexe

III.1. Module d'un nombre complexe

III.1.a) Définition et premières propriétés

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$.

On appelle **module** de z et on note $|z|$ le réel définie par : $\boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}}}$.

⚠ On n'utilisera **jamais** la notation « $\sqrt{\cdot}$ » dans $\mathbb{C}$.

Proposition 16.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.

Alors : $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{(x+iy)\,(x-iy)} = \sqrt{x^2 - (iy)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

□

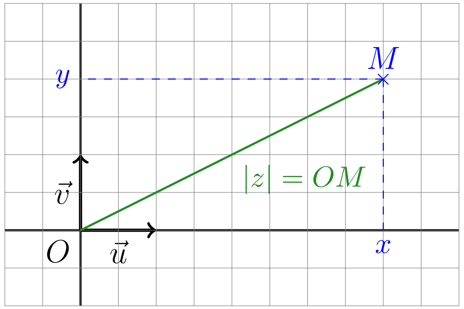
Remarque

- On utilisera plutôt :
  - la définition du module lorsqu'on manipule des produits de complexes,
  - la proposition 16 lorsqu'on manipule des sommes de complexes.
- Si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de z est sa valeur absolue. On dit que le module **coïncide** avec la valeur absolue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\boxed{z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}}$.

Proposition 17. (Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note M le point du plan complexe d'affixe z. Alors le module de z est la distance OM *:*

$$\boxed{|z| = OM}$$



III.1.b) Propriétés

Proposition 18. (Propriétés du module)

1) Positivité : $\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant 0}$.

2) Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0}$$

3) Compatibilité avec le produit : $\boxed{\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ |z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|}$.

a) En particulier : $\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ |-z| = |z|}$.

b) Conséquence : $\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |z^n| = |z|^n}$.

4) <u>*Compatibilité avec l'inverse :*</u> $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}}$.

5) <u>*Compatibilité avec le quotient :*</u> $\boxed{\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$.

6) $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \ |\bar{z}| = |z|}$

Démonstration.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$. D'après la proposition 16 :

$$|z| \ = \ \sqrt{x^2 + y^2} \ \geqslant \ 0$$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Raisonnons par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons : $z = 0$. Alors :

$$|z| \ = \ \sqrt{z \times \bar{z}} \ = \ \sqrt{0 \times \bar{z}} \ = \ \sqrt{0} \ = \ 0$$

($\Rightarrow$) Supposons : $|z| = 0$.
On sait qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$. Alors :

comme $|z| = 0$

alors $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$

donc $x^2 + y^2 = 0$

d'où $x^2 = 0 \text{ ET } y^2 = 0$ *(car $x^2 \geqslant 0$ et $y^2 \geqslant 0$)*

ainsi $x = 0 \text{ ET } y = 0$

On en déduit : $z = x + iy = 0 + i \times 0 = 0$.

3) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

- <u>Méthode 1</u> : en utilisant la définition du module.
  - × Tout d'abord :

$$|z_1\, z_2|^2 \ = \ z_1\, z_2 \times \overline{z_1\, z_2} \ = \ z_1\, z_2\, \overline{z_1}\, \overline{z_2} \ = \ z_1\, \overline{z_1} \times z_2\, \overline{z_2} \ = \ |z_1|^2\, |z_2|^2 \ = \ (|z_1|\, |z_2|)^2$$

  - × Or un module est positif, donc : $|z_1\, z_2| \in \mathbb{R}_+$ et $|z_1|\, |z_2| \in \mathbb{R}_+$.
    De plus la fonction $x \mapsto x^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$|z_1\, z_2| \ = \ |z_1|\, |z_2|$$

- <u>Méthode 2</u> : en utilisant la forme algébrique.
  Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors il existe $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

  - × D'une part :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2) \\ &= x_1\, x_2 + i\, x_1\, y_2 + i\, x_2\, y_1 + i^2\, y_1\, y_2 \\ &= (x_1\, x_2 - y_1\, y_2) + i\,(x_1\, y_2 + x_2\, y_1) \end{aligned}$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned} & |z_1\, z_2|^2 \\ = \ & \big|(x_1\, x_2 - y_1\, y_2) + i\,(x_1\, y_2 + x_2\, y_1)\big| \\ = \ & (x_1\, x_2 - y_1\, y_2)^2 + (x_1\, y_2 + x_2\, y_1)^2 \\ = \ & (x_1\, x_2)^2 - \cancel{2\, x_1\, x_2\, y_1\, y_2} + (y_1\, y_2)^2 + (x_1\, y_2)^2 + \cancel{2\, x_1\, y_2\, x_2\, y_1} + (x_2\, y_1)^2 \\ = \ & x_1^2\, x_2^2 + y_1^2\, y_2^2 + x_1^2\, y_2^2 + x_2^2\, y_1^2 \end{aligned}$$

× D'autre part :

$$\begin{aligned}|z_1|^2\,|z_2|^2 &= |x_1+iy_1|^2\,|x_2+iy_2|^2\\ &= (x_1^2+y_1^2)\,(x_2^2+y_2^2)\\ &= x_1^2\,x_2^2+x_1^2\,y_2^2+y_1^2\,x_2^2+y_1^2\,y_2^2\end{aligned}$$

× Finalement : $|z_1\,z_2|^2 = |z_1|^2\,|z_2|^2$.
Or un module est positif, donc : $|z_1\,z_2| \in \mathbb{R}_+$ et $|z_1|\,|z_2| \in \mathbb{R}_+$.
De plus la fonction $x \mapsto x^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$|z_1\,z_2| \;=\; |z_1|\,|z_2|$$

4) Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \frac{1}{z}\,\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{\bar z} = \frac{1}{z\,\bar z} = \frac{1}{|z|^2}$$

Or un module est positif, donc : $\left|\dfrac{1}{z}\right| \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{|z|} \geqslant 0$.
De plus la fonction $x \mapsto x^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\frac{1}{|z|^2}} = \frac{1}{\sqrt{|z|^2}} = \frac{1}{|z|} \qquad \textit{(car } |z| \geqslant 0\textit{)}$$

5) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \left|z_1 \times \frac{1}{z_2}\right|\\ &= |z_1| \times \left|\frac{1}{z_2}\right| && \textit{(par compatibilité du module avec le produit)}\\ &= |z_1 \times \frac{1}{|z_2|} && \textit{(par compatibilité du module avec l'inverse)}\\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\end{aligned}$$

6) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x+iy$. Alors : $\bar z = x - iy = x + i(-y)$. D'où :

$$|\bar z| \;=\; \sqrt{x^2+(-y)^2} \;=\; \sqrt{x^2+y^2} \;=\; |z|$$

□

Proposition 19. (Inégalité triangulaire)
Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

1) *On a :*

$$\boxed{|z_1+z_2| \;\leqslant\; |z_1|+|z_2|}$$

avec égalité **si et seulement si** *:*

$$(z_1 = 0 \ \texttt{OU}\ z_2 = 0)\ \texttt{OU}\ (\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, z_2 = \alpha\, z_1)$$

2) *De plus :*

$$\boxed{\big||z_1|-|z_2|\big| \;\leqslant\; |z_1 - z_2|}$$

Lemme 1.

a) $\forall u \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\,(u) \;\leqslant\; |u|$

b) $\forall u \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,(u) = |u| \;\Leftrightarrow\; u \in \mathbb{R}_+$

Démonstration. **(Lemme 1)**

a) Soit $u \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $u = a + i\,b$.

- Tout d'abord : $\mathrm{Re}\,(u) \;=\; a \;\leqslant\; |a|$
- Ensuite : $|a| = \sqrt{a^2}$. Or :

$$\begin{aligned}& a^2 \leqslant a^2+b^2 && \textit{(car } b^2 \geqslant 0\textit{)}\\ \text{donc}\quad & \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} && \textit{(par croissance de la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)}\\ \text{d'où}\quad & |a| \leqslant |u|\end{aligned}$$

- Ainsi, par transitivité :

$$\mathrm{Re}\,(u) \;\leqslant\; |a| \;\leqslant\; |u|$$

b) Soit $u \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $u = a + ib$. Raisonnons par double implication :

($\Leftarrow$) Supposons $u \in \mathbb{R}_+$. Alors : $b = 0$ et $a \in \mathbb{R}_+$. D'où :

$$|u| \;=\; \sqrt{a^2+b^2} \;=\; \sqrt{a^2} \;=\; a \qquad \textit{(car } a \geqslant 0\textit{)}$$

Ainsi : $|u| = \mathrm{Re}\,(u)$.

($\Rightarrow$) Supposons : $\mathrm{Re}\,(u) = |u|$. Alors :

- × $a = |u| \geqslant 0$. Ainsi : $a \in \mathbb{R}_+$.
- × De plus :

$$\begin{array}{rc} & a = \sqrt{a^2+b^2} \\ \text{donc} & a^2 = a^2 + b^2 \\ \text{d'où} & 0 = b^2 \\ \text{ainsi} & 0 = b \end{array}$$

Finalement, on obtient : $u = a + 0 = a$. Or $a \in \mathbb{R}_+$. On en déduit : $u \in \mathbb{R}_+$.

□

Démonstration. **(Proposition 19)**

1) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Deux cas se présentent :

- si $z_1 = 0$, alors l'inégalité est évidente.
- si $z_1 \neq 0$, on pose : $u = \dfrac{z_2}{z_1}$.

× Alors :

$$\begin{array}{cll} & |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| & \\ \Leftrightarrow & \dfrac{|z_1+z_2|}{|z_1|} \leqslant 1 + \dfrac{|z_2|}{|z_1|} & \\ \Leftrightarrow & \left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1}\right| \leqslant 1 + \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| & \textit{(par compatibilité du module avec le quotient)} \\ \Leftrightarrow & |1+u| \leqslant 1 + |u| & \\ \Leftrightarrow & |1+u|^2 \leqslant (1+|u|)^2 & \textit{(par stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \Leftrightarrow & (1+u)\,\overline{(1+u)} \leqslant 1 + 2\,|u| + |u|^2 & \\ \Leftrightarrow & (1+u)\,(1+\bar{u}) \leqslant 1 + 2\,|u| + |u|^2 & \textit{(par linéarité de la conjugaison)} \\ \Leftrightarrow & \cancel{1} + u + \bar{u} + \cancel{u\bar{u}} \leqslant \cancel{1} + 2\,|u| + \cancel{u\bar{u}} & \\ \Leftrightarrow & \dfrac{u+\bar{u}}{2} \leqslant |u| & \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Re}\,(u) \leqslant |u| & \end{array}$$

× Or, cette dernière inégalité est vraie d'après le point ***a)*** du Lemme 1. Par équivalence, on en déduit que la première inégalité est vraie. On ainsi démontré la première inégalité triangulaire :

$$\forall (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

- Démontrons maintenant le cas d'égalité.
  Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Deux cas se présentent :
  - × si $z_1 = 0$, alors l'égalité est vérifiée.

× si $z_1 \neq 0$, alors, avec le même raisonnement que précédemment, on obtient :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \mathrm{Re}\,(u) = |u| \iff u \in \mathbb{R}_+$$

où la dernière équivalence est obtenue avec le point ***b)*** du Lemme 1.
Ainsi, si $z_1 \neq 0$, l'égalité a lieu **si et seulement si** $\dfrac{z_2}{z_1} = u \in \mathbb{R}_+$, *i.e.* $z_2 = u\, z_1$.

2) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. On rappelle qu'on a démontré la première inégalité triangulaire :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2, \quad |u+v| \ \leqslant\ |u| + |v| \qquad (*)$$

- Tout d'abord :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \ \leqslant\ |z_1 - z_2| \iff -|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$$

- On applique l'inégalité $(*)$ à $u = z_1 - z_2$ et $v = z_2$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \big|(z_1 - z_2) + z_2\big| & \leqslant & |z_1 - z_2| + |z_2| \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ |z_1| & & |z_1 - z_2| + |z_2| \end{array}$$

Ainsi : $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$.

- On applique l'inégalité $(*)$ à $u = z_1 - z_2$ et $v = -z_1$. On obtient :

$$\begin{array}{cccccc} & \big|(z_1 - z_2) + (-z_1)\big| & \leqslant & |z_1 - z_2| + |-z_1| & & \\ & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ |z_2| \ = & |-z_2| & & |z_1 - z_2| + |-z_1| & = & |z_1 - z_2| + |z_1| \end{array}$$

Ainsi : $-|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| - |z_2|$.

- Finalement :

$$-|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$$

D'où :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \ \leqslant\ |z_1 - z_2|$$

□

Remarque

- On a utilisé dans cette preuve la propriété classique suivante.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$$

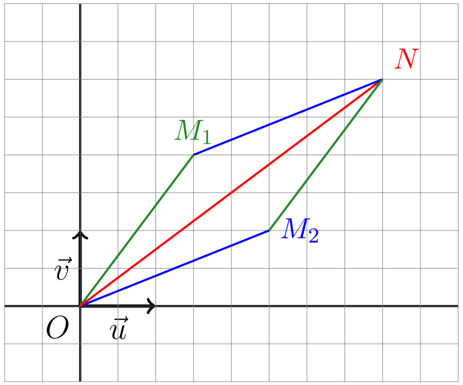
- On peut déduire de l'inégalité triangulaire la proposition suivante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors :

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} |z_k|}$$

(on démontre ce résultat par récurrence sur n)

- L'inégalité triangulaire s'interprète conformément à son nom. Les cas d'égalité sont apparents.
On note $M_1\,(z_1)$, $M_2\,(z_2)$ et $N\,(z_1 + z_2)$. L'inégalité triangulaire s'énonce géométriquement de la façon suivante :

$$ON \ \leqslant\ OM_1 + OM_2$$



III.1.c) Interprétations géométriques

Proposition 20.

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.

$$\boxed{AB = |z_B - z_A|}$$

Proposition 21.

Soit $a \in \mathbb{C}$. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On peut identitifier :

1) l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}$ avec le cercle de centre a et de rayon r.

2) l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ avec le disque ouvert de centre a et de rayon r.

3) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leqslant r\}$ avec le disque fermé de centre a et de rayon r.

Remarque

On cherchera souvent à travailler avec le carré des modules.
Notons par exemple $\mathcal{C}$ le cercle de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$. Alors, pour tout $z \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow |z-a| = r \\ &\Leftrightarrow |z-a|^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (z-a)\,\overline{(z-a)} = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\,\bar{z} - \bar{a}\,z - a\,\bar{z} + (a\,\bar{a} - r^2) = 0 \end{aligned}$$

Réciproquement, pour tout $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid z\,\bar{z} - \bar{a}\,z - a\,\bar{z} + b = 0\}$ peut s'identifier :

- soit à un cercle de centre a,
- soit au point d'affixe a,
- soit à l'ensemble vide.

III.2. Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Définition (Ensemble $\mathbb{U}$)

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

$$\boxed{\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}}$$

Proposition 22.

1) $\boxed{\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*}$

2) $\boxed{\mathbb{U} \neq \varnothing}$

3) $\mathbb{U}$ est stable par $\times$: $\boxed{\forall (z,z') \in \mathbb{U}^2, \quad z\,z' \in \mathbb{U}}$

4) $\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse : pour tout $z \in \mathbb{U}$, z^{-1} existe et $z^{-1} \in \mathbb{U}$. Plus précisément : $\forall z \in \mathbb{U}$, $\boxed{z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \bar{z}}$.

Remarque

On dit que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Démonstration.

1) Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors : $|z| = 1$. Donc $z \neq 0$. Ainsi : $z \in \mathbb{C}^*$.
On en déduit : $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$.

2) On remarque : $1 \in \mathbb{U}$. D'où : $\mathbb{U} \neq \varnothing$.

3) Soit $(z,z') \in \mathbb{U}^2$.

$$\begin{aligned} |z\,z'| &= |z|\,|z'| && \text{(par compatibilité du module avec le produit)} \\ &= 1 \times 1 && \text{(car } (z,z') \in \mathbb{U}^2\text{)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit : $z\,z' \in \mathbb{U}$.

4) Soit $z \in \mathbb{U}$. Comme $z \neq 0$, alors z^{-1} existe. De plus :

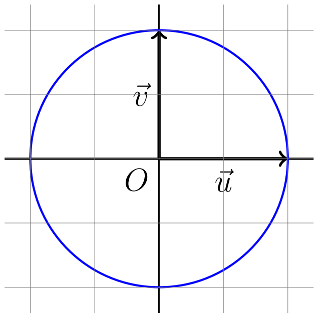
$$\begin{array}{rcll} |z^{-1}| & = & \left|\dfrac{1}{z}\right| & \\ & = & \dfrac{1}{|z|} & \textit{(par compatibilité du module avec l'inverse)} \\ & = & \dfrac{1}{1} & \textit{(car } z \in \mathbb{U}\textit{)} \\ & = & 1 & \end{array}$$

D'où : $z^{-1} \in \mathbb{U}$. Enfin :

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z} \quad \textit{(car } z \in \mathbb{U}\textit{)}$$

□

Proposition 23. (Interprétation géométrique de l'ensemble $\mathbb{U}$)
Dans le plan complexe, l'image de l'ensemble $\mathbb{U}$ est le cercle de centre l'origine O et de rayon 1.



III.3. Argument d'un nombre complexe

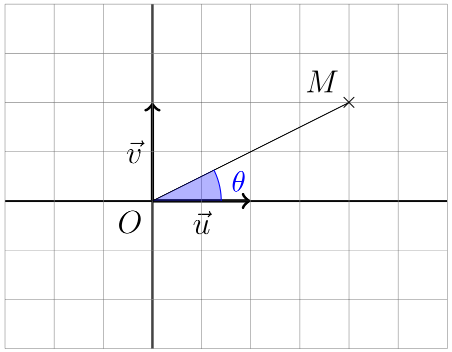
III.3.a) Définition et premières propriétés

Définition (Angle orienté)
Soit M un point du plan complexe distinct de O.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ définissent un angle orienté noté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.

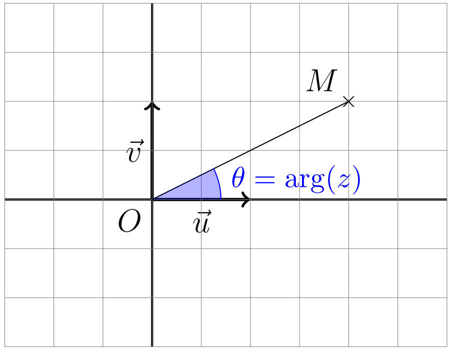
Proposition 24.
Soit M un point du plan complexe distinct de O.
L'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ a une infinité de mesures.
Notons θ l'une d'entre elles. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le réel $\theta + 2\,k\,\pi$ est aussi une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$. On notera :

$$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta \ [2\pi]}$$

(cela se lit : « l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ est congru à θ modulo $2\,\pi$)



Définition (Argument d'un nombre complexe)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note M son image dans le plan complexe.
On appelle **argument de** z, et on note $\arg(z)$ toute mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.



Proposition 25.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- *Le nombre complexe z admet une infinité d'argument.*
  Plus précisément, si le réel θ est un argument de z, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2\,k\,\pi$ est un argument de z. On notera :

$$\boxed{\arg(z) \ \equiv \ \theta \ [2\pi]}$$

- *La mesure d'angle appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est appelée* **argument principal de** *z.*

⚠ L'argument d'un nombre complexe n'étant pas unique, on parle d'UN argument d'un nombre complexe. Prenons par exemple le nombre complexe : $z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
Alors un argument de z est $\frac{\pi}{3}$, mais aussi $\frac{\pi}{3} + 2\pi$, $\frac{\pi}{3} - 4\pi$, etc.

⚠ Le nombre complexe 0 n'admet pas d'argument !

Exemple Donner un argument des nombres complexes i et $-i$.

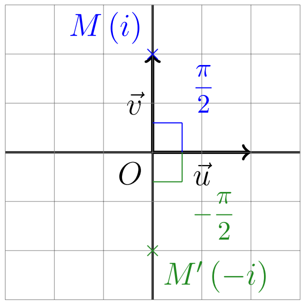
Démonstration.

- Notons $z = i$ et M le point d'affixe z. Alors : $M = (0, 1)$. On en déduit : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Ainsi :

$$\arg(i) \ \equiv \ \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

- Notons $z' = i$ et M' le point d'affixe z'. Alors : $M' = (0, -1)$. On en déduit : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Ainsi :

$$\arg(-i) \ \equiv \ -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$



□

Proposition 26.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$. On note θ un argument de z. Alors :

$$\boxed{\cos(\theta) \;=\; \frac{x}{|z|}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin(\theta) \;=\; \frac{y}{|z|}}$$

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$. On note M le point d'affixe z et θ un argument de z.

- Par définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned} & < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM} > \\ = \;& \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{OM}\| \times \cos\left((\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\right) \\ = \;& \|\overrightarrow{u}\| \times |z| \times \cos(\theta) && \textit{(par définition du module et d'un argument de } z\textit{)} \\ = \;& 1 \times |z| \cos(\theta) && \textit{(car } (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \textit{ est un repère (ortho)normé)} \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ainsi, par propriété du produit scalaire :

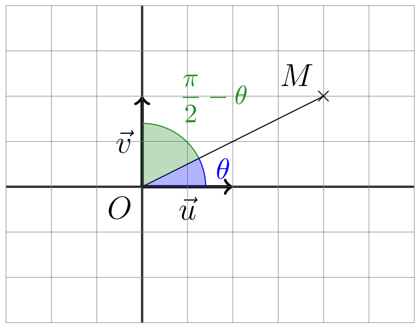
$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM} > = \; 1 \times x + 0 \times y \;=\; x$$

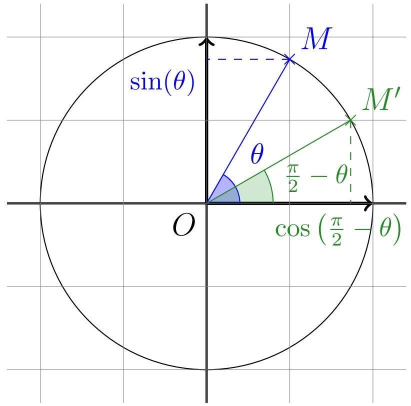
On en déduit : $x = |z| \cos(\theta)$. Or, comme $z \neq 0$, alors : $|z| \neq 0$. D'où :

$$\cos(\theta) \;=\; \frac{x}{|z|}$$

- Par définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned} & < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM} > \\ = \;& \|\overrightarrow{v}\| \times \|\overrightarrow{OM}\| \times \cos\left((\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM})\right) \\ = \;& 1 \times |z| \times \cos\left((\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM})\right) && \textit{(mêmes arguments que le point précédent)} \\ = \;& |z| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ = \;& |z| \sin(\theta) \end{aligned}$$





Par ailleurs :

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ainsi, par propriété du produit scalaire :

$$< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM} > = \; 0 \times x + 1 \times y \;=\; y$$

On en déduit : $y = |z| \sin(\theta)$. Or, comme $z \neq 0$, alors : $|z| \neq 0$. D'où :

$$\sin(\theta) \;=\; \frac{y}{|z|}$$

$\square$

Exercice 6

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 1 + i$.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z' = -1+i\sqrt{3}$.

Démonstration.

1. Commençons par déterminer le module de z.

$$|z| \;=\; \sqrt{1^2+1^2} \;=\; \sqrt{2}$$

On note θ un argument de z. On obtient alors :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit : $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Remarquons : $z = \sqrt{2}\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2. Commençons par déterminer le module de z'.

$$|z'| \;=\; \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} \;=\; \sqrt{4} \;=\; 2$$

On note θ' un argument de z'. On obtient alors :

$$\cos(\theta') = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta') = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit : $\arg(z) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Remarquons : $z = 2\ \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

□

Proposition 27.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

1) *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}^*$. $\boxed{\arg(\lambda\, z) = \begin{cases} \arg(z)\ [2\pi] & si\ \lambda > 0 \\ \arg(z) + \pi\ [2\pi] & si\ \lambda < 0 \end{cases}}$

En particulier : $\boxed{\arg(-z) \;=\; \arg(z) + \pi\ [2\pi]}$

2) $\boxed{\arg(\bar{z}) \;=\; -\arg(z)\ [2\pi]}$

3) $\boxed{z \in \mathbb{R}^* \;\Leftrightarrow\; \big(\arg(z) \equiv 0\ [2\pi]\ \texttt{OU}\ \arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]\big) \;\Leftrightarrow\; \arg(z) \equiv 0\ [\pi]}$

Plus précisément :

$$\boxed{z \in \mathbb{R}_+^* \quad\Leftrightarrow\quad \arg(z) \equiv 0\ [2\pi]}$$

4) $\boxed{z \in i\,\mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \left(\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\ \texttt{OU}\ \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right) \;\Leftrightarrow\; \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]}$

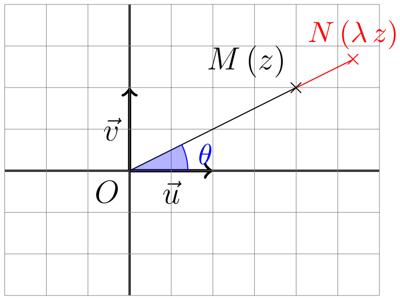
Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note M l'image de z.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On note N l'image de $\lambda\, z$. Deux cas se présentent :

× si $\lambda > 0$, alors : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$. On en déduit :

$$\arg(\lambda\, z) \;\equiv\; \arg(z)\ [2\pi]$$

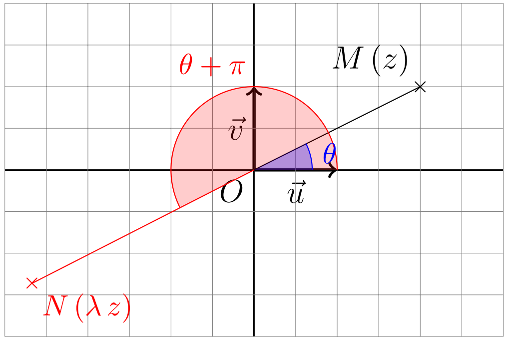


× si $\lambda < 0$, on note N' l'image de $|\lambda|\, z$. Alors N' est le symétrique de N par rapport à O. D'où :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON}) &\equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON'}) + \pi \ [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) + \pi \ [2\pi] \quad \textit{(d'après le point précédent)} \end{aligned}$$

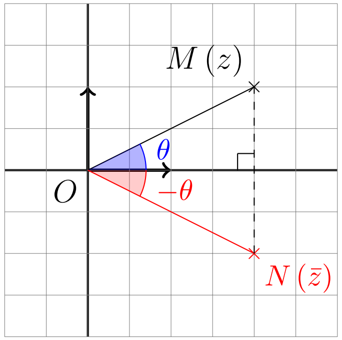
On en déduit :

$$\arg(\lambda\, z) \ \equiv \ \arg(z) + \pi \ [2\pi]$$



2) On note M' l'image de $\bar{z}$. Alors M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses. On en déduit : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$. Ainsi :

$$\arg(\bar{z}) \ \equiv \ -\arg(z) \ [2\pi]$$



3) Comme $z \in \mathbb{C}$, alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\, y$. On note θ un argument de z.

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R}^* &\Leftrightarrow y = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{y}{|z|} = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta \equiv 0 \ [2\pi] \quad \texttt{OU} \quad \theta \equiv \pi \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \theta \equiv 0 \ [\pi] \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R}^* &\Leftrightarrow \Big(\arg(z) \equiv 0 \ [2\pi] \quad \texttt{OU} \quad \arg(z) \equiv \pi \ [2\pi] \Big) \\ &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0 \ [\pi] \end{aligned}$$

4) On raisonne comme dans le point précédent :

$$\begin{aligned} z \in i\,\mathbb{R} &\Leftrightarrow x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{x}{|z|} = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \quad \texttt{OU} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} z \in i\,\mathbb{R} &\Leftrightarrow \Big(\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \quad \texttt{OU} \quad \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \Big) \\ &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \end{aligned}$$

□

III.3.b) Propriétés des arguments

Proposition 28. (Propriétés des arguments)
Soit $(z, z_1, z_2) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^3$.

1) $\boxed{\arg(z_1\, z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]}$

2) $\boxed{\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]}$

3) $\boxed{\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]}$

Démonstration.

1) Soit $(z_1, z_2) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^2$. Alors il existe $(r_1, r_2) \in \,]0, +\infty[^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$z_1 = r_1 \left(\cos(\theta_1) + i\,\sin(\theta_1)\right) \qquad \text{et} \qquad z_2 = r_2 \left(\cos(\theta_2) + i\,\sin(\theta_2)\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned} & z_1\, z_2 \\ = \ & \Big(r_1 \left(\cos(\theta_1) + i\,\sin(\theta_1)\right)\Big) \Big(r_2 \left(\cos(\theta_2) + i\,\sin(\theta_2)\right)\Big) \\ = \ & r_1\, r_2 \big(\cos(\theta_1)\,\cos(\theta_2) + i\,\cos(\theta_1)\,\sin(\theta_2) + i\,\sin(\theta_1)\,\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\,\sin(\theta_2)\big) \\ = \ & r_1\, r_2 \Big(\big(\cos(\theta_1)\,\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\,\sin(\theta_2)\big) + i\,\big(\sin(\theta_1)\,\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\,\cos(\theta_1)\big)\Big) \\ = \ & r_1\, r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\sin(\theta_1 + \theta_2)\right) \end{aligned}$$

L'écriture ci-dessus est donc une forme trigonométrique du complexe $z_1\, z_2$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \arg(z_1\, z_2) & \equiv \theta_1 + \theta_2 & [2\pi] \\ & \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) & [2\pi] \end{aligned}$$

(notons que l'on retrouve bien : $|z_1\, z_2| = r_1\, r_2 = |z_1|\,|z_2|$*)*

2) Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- D'une part :

$$\arg\left(\frac{z}{z}\right) = \arg(1) \equiv 0\ [2\pi] \qquad \textit{(car } 1 \in \mathbb{R}_+^* \textit{)}$$

- D'autre part, d'après le point précédent :

$$\arg\left(\frac{z}{z}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) \equiv \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \ [2\pi]$$

Ainsi, par transitivité des congruences : $\arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv 0\ [2\pi]$. D'où :

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$$

3) Soit $(z_1, z_2) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^2$.

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) & = \arg\left(z_1 \times \frac{1}{z_2}\right) & & \\ & \equiv \arg(z_1) + \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) & [2\pi] & \quad \textit{(d'après 1))} \\ & \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) & [2\pi] & \quad \textit{(d'après 2))} \end{aligned}$$

□

Remarque

- Notons que l'on retrouve pour la fonction arg exactement la même propriété que pour la fonction ln. En effet, pour tout $(a, b) \in \,]0, +\infty[^2$:
  1) $\ln(a\, b) = \ln(a) + \ln(b)$
  2) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
  3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

- Cette propriété est appelée propriété de **morphisme**. On peut en donner une définition légèrement plus générale.
  On appelle morphisme de $(I, \times)$ dans $(J, +)$ une application $f : I \to J$ telle que :
  $$\forall (a,b) \in I^2, \quad f(a \times b) = f(a) + f(b)$$
  Ainsi, l'application arg est un morphisme de $(\mathbb{R}, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$, et l'application ln est un morphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
- On peut en fait donner une définition de morphisme bien plus générale. On en énonce ici une version non rigoureuse (car sans précision exacte du cadre qui est pour l'instant un peu trop hors de notre programme).
  On appelle morphisme de $(G_1, *)$ (l'ensemble G_1 est muni d'une loi interne notée $*$) dans $(G_2, \star)$ (l'ensemble G_2 est muni d'une loi interne notée $\star$) une application $f : G_1 \to G_2$ telle que :
  $$\forall (a,b) \in G_1^2, \quad f(a * b) = f(a) \star f(b)$$
  Ainsi, l'application exp est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, +)$. En effet la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ vérifie :
  $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$$

Proposition 29.

1) $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \ [2\pi]}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$, $\boxed{\arg\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} \arg(z_i) \ [2\pi]}$

Démonstration.

1) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \ [2\pi]$.

- ▶ **Initialisation** :
  - × d'une part : $\arg(z^0) = \arg(1) \equiv 0 \ [2\pi]$ (car $1 \in \mathbb{R}_+^*$)
  - × d'autre part : $0 \times \arg(z) = 0$

  Ainsi : $\arg(z^0) \equiv 0 \times \arg(z) \ [2\pi]$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\arg(z^{n+1}) \equiv (n+1) \arg(z) \ [2\pi]$)
  $$\begin{array}{rcll} \arg(z^{n+1}) & = & \arg(z \times z^n) & \\ & \equiv & \arg(z) + \arg(z^n) \quad [2\pi] & \textit{(d'après la proposition précédente)} \\ & \equiv & \arg(z) + n \arg(z) \quad [2\pi] & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & \equiv & (n+1) \arg(z) \quad [2\pi] & \end{array}$$
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \ [2\pi]$.

2) Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$

où $\mathscr{P}(n) : \forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$, $\arg\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} \arg(z_i) \ [2\pi]$.

- ▶ **Initialisation** : soit $z_1 \in \mathbb{C}^*$.
  - D'une part : $\arg\left(\prod_{i=1}^{1} z_i\right) = \arg(z_1)$.
  - D'autre part : $\sum_{i=1}^{1} \arg(z_i) = \arg(z_1)$.

  Ainsi : $\arg\left(\prod_{i=1}^{1} z_i\right) = \sum_{i=1}^{1} \arg(z_i)$.

  D'où $\mathscr{P}(1)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^{n+1}$, $\arg\left(\prod\limits_{i=1}^{n+1} z_i\right) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n+1} \arg(z_i)\ [2\pi]$)
Soit $(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^{n+1}$.

$$\begin{aligned} & \arg\left(\prod_{i=1}^{n+1} z_i\right) \\ = \quad & \arg\left(\prod_{i=1}^{n} z_i \times z_{n+1}\right) \\ \equiv \quad & \arg\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right) + \arg(z_{n+1}) \quad [2\pi] && \textit{(d'après la proposition précédente)} \\ \equiv \quad & \sum_{i=1}^{n} \arg(z_i) + \arg(z_{n+1}) \quad [2\pi] && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ \equiv \quad & \sum_{i=1}^{n+1} \arg(z_i) \quad [2\pi] \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^n$, $\arg\left(\prod\limits_{i=1}^{n} z_i\right) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \arg(z_i)\ [2\pi]$. □

Exercice 7
On considère les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{3} + i$ et $z_2 = -4\,i$.
Déterminer une écriture trigonométrique des nombres complexes :

1. $z_1\,z_2$ ***2.*** z_1^{2020}

Démonstration.
Commençons par déterminer une écriture trigonométrique de z_1 et z_2.

- Déterminons d'abord $|z_1|$.

$$|z_1| \ = \ \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} \ = \ \sqrt{4} \ = \ 2$$

Ainsi :

$$z_1 \ = \ 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) \ = \ 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

D'où : $\arg(z_1) = \dfrac{5\pi}{6}$.

- Déterminons $|z_2|$.

$$|z_2| \ = \ |-4\,i| \ = \ |-4|\,|i| \ = \ 4 \times 1 \ = \ 4$$

Ainsi :

$$z_2 \ = \ 4\big(0 + (-1)\,i\big) \ = \ 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

D'où : $\arg(z_2) = -\dfrac{\pi}{2}$.

1. Tout d'abord :

$$|z_1\,z_2| \ = \ |z_1|\,|z_2| \ = \ 2 \times 4 \ = \ 8$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \arg(z_1\,z_2) \ & \equiv \ \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi] \\ & \equiv \ \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ & \equiv \ \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} \quad [2\pi] \\ & \equiv \ \frac{2\pi}{6} \quad [2\pi] \end{aligned}$$

Finalement : $z_1\,z_2 = 8\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

2. Tout d'abord :

$$|z_1^{2020}| \;=\; |z_1|^{2020} \;=\; 2^{2020}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
\arg\left(z_1^{2020}\right) &\equiv 2020 \arg(z_1) && [2\pi] \\
&\equiv 2020\ \frac{5\pi}{6} && [2\pi] \\
&\equiv \frac{5050\,\pi}{3} && [2\pi] \\
&\equiv \frac{(841 \times 3 \times 2 + 4)\,\pi}{3} && [2\pi] \\
&\equiv \frac{4\pi}{3} + 841 \times 2\pi && [2\pi] \\
&\equiv \frac{4\pi}{3} && [2\pi]
\end{aligned}$$

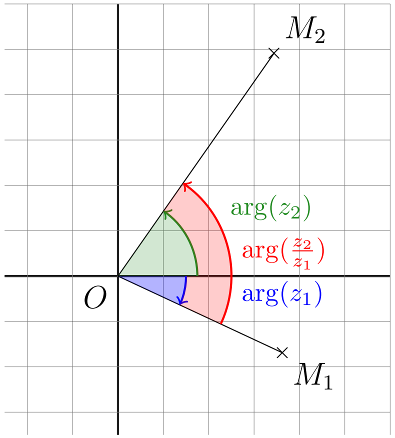
Finalement : $z_1^{2020} = 2^{2020} \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$. □

III.3.c) Interprétations géométriques

- Soit $(z_1, z_2) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^2$. On note M_1 l'image de z_1 et M_2 l'image de z_2.
  - × Le réel $\arg(z_1)$ est, par définition d'un argument, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1})$.
    De même : $\arg(z_2) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_2})\ [2\pi]$.
  - × Ainsi :

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) &\equiv \arg(z_2) - \arg(z_1) && [2\pi] \\
&\equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_2}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}) && [2\pi] \\
&\equiv (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) && [2\pi]
\end{aligned}$$

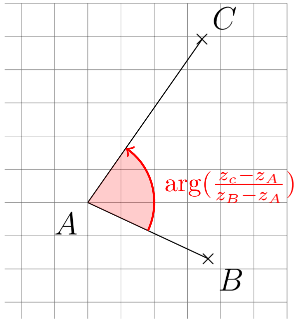
  Le réel $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ est donc une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$.



Proposition 30.
Soit $(z_1, z_2) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^2$. On note M_1 l'image de z_1 et M_2 l'image de z_2.

$$\boxed{\textit{Le réel } \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \textit{ est une mesure de l'angle } (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})}.$$

- Soient A, B et C trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.
  - × Dans ce cas, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $z_C - z_A$.
    Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donc : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.
  - × On est par exemple dans la situation suivante :



Proposition 31.
Soient A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Alors :

$$\boxed{A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés} \quad \Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi]}$$

Remarque
Rappelons qu'on a toutes les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A,\ B \text{ et } C \text{ alignés} \quad & \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ z_c - z_A = \lambda\,(z_B - z_A) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \lambda \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi] \end{aligned}$$

Proposition 32.
Soient A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Alors :

$$\boxed{\text{L'angle } \widehat{CAB} \text{ est droit} \quad \Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]}$$

IV. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

IV.1. Définitions

On définit la fonction f suivante :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & \theta & \mapsto & \cos(\theta) + i\,\sin(\theta) \end{array}$$

- Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$. D'après les formules d'addition de cos et sin, on obtient :
$$f(\theta_1)\,f(\theta_2) \ = \ f(\theta_1 + \theta_2)$$
(ce point sera détaillé en **Partie I-2)***)*
- On reconnaît la propriété de morphisme de la fonction exponentielle réelle. Par analogie, on adopte la notation :
$$f : \theta \mapsto \mathrm{e}^{i\,\theta}$$

Définition
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note : $\boxed{\mathrm{e}^{i\,\theta} \ = \ \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)}$

Proposition 33.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
- $\boxed{|e^{i\,\theta}| = 1}$
- $\boxed{\arg(e^{i\,\theta}) \equiv \theta\ [2\pi]}$

Démonstration.
Par définition d'une écriture trigonométrique :
× tout d'abord :
$$|\mathrm{e}^{i\,\theta}| \ = \ |\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)| \ = \ \big|1 \times \big(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)\big)\big| \ = \ 1$$
× ensuite :
$$\arg(\mathrm{e}^{i\,\theta}) \ = \ \arg\big(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)\big) \ \equiv \ \theta\ [2\pi]$$
□

Définition (Forme exponentielle d'un nombre complexe)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ de module r et d'argument θ.
Une **écriture (ou forme) exponentielle** de z est :

$$\boxed{z \ = \ r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}}$$

⚠ Un nombre complexe admet une infinité d'écritures exponentielles, puisqu'il admet une infinité d'arguments. On parle donc d'`UNE` écriture exponentielle d'un nombre complexe.

Remarque
L'écriture précédente est aussi appelée *forme trigonométrique d'un nombre complexe*. En effet, seul un jeu de notation sépare cette écriture de l'écriture trigonométrique définie dans le Chapitre 5.

IV.2. Propriétés

Proposition 34.
L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{U} \\ t & \mapsto & e^{i\,t} \end{array}$ *est :*

- *surjective,*
- *non injective.*

Démonstration.

- Rappelons la définition de surjectivité de f :

$$\forall z \in \mathbb{U},\ \exists t \in \mathbb{R},\ z = f(t)$$

Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors : $|z| = 1$.
Par définition de l'écriture trigonométrique, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z \ = \ |z| \left(\cos(t) + i\,\sin(t)\right) \ = \ 1 \times \mathrm{e}^{i\,t} \ = \ f(t)$$

Ainsi, f est surjective.

- Rappelons la définition d'injectivité de f :

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2,\ \left(f(t_1) = f(t_2) \ \Rightarrow \ t_1 = t_2\right)$$

On doit donc démontrer :

$$\texttt{NON}(\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2,\ \left(f(t_1) = f(t_2) \ \Rightarrow \ t_1 = t_2\right))$$

c'est-à-dire :

$$\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2,\ \left(f(t_1) = f(t_2) \ \texttt{ET} \ t_1 \neq t_2\right)$$

On note $t_1 = 0$ et $t_2 = 2\pi$, alors :

$$f(t_2) \ = \ \mathrm{e}^{i\,2\pi} \ = \ \cos(2\pi) + i\,\sin(2\pi) \ = \ 1$$

De même : $f(t_1) = 1$. Ainsi :

$$f(t_1) = f(t_2) \ \texttt{ET} \ t_1 \neq t_2$$

La fonction f n'est donc pas injective.

□

Malgré l'absence d'injectivité, on peut obtenir la proposition suivante :

Proposition 35.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\boxed{e^{i\,x} = e^{i\,y} \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv y\ [2\pi]}$$

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note : $z = \mathrm{e}^{i\,x}$ et $w = \mathrm{e}^{i\,y}$. Par propriété des écritures trigonométriques :

$$z = w \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} |z| = |w| \\ \arg(z) \equiv \arg(w)\ [2\pi] \end{array} \right.$$

Or : $z = \mathrm{e}^{i\,x} = 1 \times \big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)$ et $w = \mathrm{e}^{i\,y} = 1 \times \big(\cos(y) + i\,\sin(y)\big)$.
Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{i\,x} = \mathrm{e}^{i\,y} & \Leftrightarrow & z = w \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} |z| = |w| \\ \arg(z) \equiv \arg(w)\ [2\pi] \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 1 = 1 \\ x \equiv y\ [2\pi] \end{array} \right. \qquad \textit{(par définition d'une écriture trigonométrique)} \\ & \Leftrightarrow & x \equiv y\ [2\pi] \end{array}$$

□

Proposition 36.
Soit $(t, t') \in \mathbb{R}^2$.

1) $\boxed{e^{i\,t} \times e^{i\,t'} = e^{i\,(t+t')}}$

2) $\boxed{\left(e^{i\,t}\right)^{-1} = e^{-i\,t}}$

3) $\boxed{\dfrac{e^{i\,t}}{e^{i\,t'}} = e^{i\,(t-t')}}$

Démonstration.
Soit $(t, t') \in \mathbb{R}^2$.

1) On calcule :

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{e}^{i\,t} \times \mathrm{e}^{i\,t'} \\ = & \big(\cos(t) + i\,\sin(t)\big)\,\big(\cos(t') + i\,\sin(t')\big) \\ = & \cos(t)\,\cos(t') - \sin(t)\,\sin(t') + i\,\big(\sin(t)\,\cos(t') + \sin(t')\,\cos(t)\big) \\ = & \cos(t + t') + i\,\sin(t + t') \qquad \textit{(par formules d'addition)} \\ = & \mathrm{e}^{i\,(t+t')} \end{array}$$

2) D'une part :

$$\begin{array}{rcl} \left(\mathrm{e}^{i\,t}\right)^{-1} & = & \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\,t}} = \dfrac{1}{\cos(t) + i\,\sin(t)} \\ & = & \dfrac{\cos(t) - i\,\sin(t)}{\big(\cos(t) + i\,\sin(t)\big)\,\big(\cos(t) - i\,\sin(t)\big)} \\ & = & \dfrac{\cos(t) - i\,\sin(t)}{\big|\cos(t) + i\,\sin(t)\big|^2} \\ & = & \cos(t) - i\,\sin(t) \end{array}$$

D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{-i\,t} & = & \cos(-t) + i\,\sin(-t) \\ & = & \cos(t) - i\,\sin(t) \qquad \textit{(par parité de } \cos \textit{ et imparité de } \sin\textit{)} \end{array}$$

On en déduit : $\left(\mathrm{e}^{i\,t}\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-i\,t}$.

3) Enfin :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{e}^{i\,t}}{\mathrm{e}^{i\,t'}} & = & \mathrm{e}^{i\,t}\,\left(\mathrm{e}^{i\,t'}\right)^{-1} \\ & = & \mathrm{e}^{i\,t} \times \mathrm{e}^{-i\,t'} \qquad \textit{(d'après 2))} \\ & = & \mathrm{e}^{i\,(t-t')} \qquad \textit{(d'après 1))} \end{array}$$

□

Proposition 37 (Formule de Moivre)**.**
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\left(e^{i\,t}\right)^n = e^{i\,n\,t}}$
- *Autrement dit :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\big(\cos(t) + i\,\sin(t)\big)^n = \cos(n\,t) + i\,\sin(n\,t)}$

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $\left(\mathrm{e}^{i\,t}\right)^n = \mathrm{e}^{i\,n\,t}$.

- **Initialisation** :
  - × d'une part : $\left(\mathrm{e}^{i\,t}\right)^0 = 1$
  - × d'autre part : $\mathrm{e}^{i \times 0 \times t} = \mathrm{e}^0 = 1$

  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left(\mathrm{e}^{i\,t}\right)^{n+1} = \mathrm{e}^{i\,(n+1)\,t}$)

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{e}^{i\,t}\right)^{n+1} &= \mathrm{e}^{i\,t}\left(\mathrm{e}^{i\,t}\right)^n \\
&= \mathrm{e}^{i\,t} \times \mathrm{e}^{i\,n\,t} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \mathrm{e}^{i\,(t+n\,t)} \ = \ \mathrm{e}^{i\,(n+1)\,t}
\end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\mathrm{e}^{i\,t}\right)^n = \mathrm{e}^{i\,n\,t}$. □

Exemple
Déterminer une forme exponentielle du nombre complexe $z = -3\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{4}}$.

Démonstration.
On remarque :

$$z \ = \ -3\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{4}} \ = \ (-1) \times 3\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{4}} \ = \ \mathrm{e}^{i\,\pi} \times 3\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{4}} \ = \ 3\,\mathrm{e}^{i\,(\pi+\frac{\pi}{4})} \ = \ 3\,\mathrm{e}^{i\,\frac{5\pi}{4}}$$

□

Proposition 38 (Formules d'Euler)**.**
Soit $t \in \mathbb{R}$.

1) $\boxed{\cos(t) = \dfrac{e^{i\,t} + e^{-i\,t}}{2}}$ *2)* $\boxed{\sin(t) = \dfrac{e^{i\,t} - e^{-i\,t}}{2\,i}}$

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

1) Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{e}^{i\,t} + \mathrm{e}^{-i\,t}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\,\big(\cos(t) + i\,\sin(t) + \cos(-t) + i\,\sin(-t)\big) \\
&= \frac{1}{2}\,\big(\cos(t) + \cancel{i\,\sin(t)} + \cos(t) - \cancel{i\,\sin(t)}\big) && \textit{(par parité de } \cos \textit{ et imparité de } \sin\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\,2\,\cos(t) \ = \ \cos(t)
\end{aligned}$$

2) De même :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{e}^{i\,t} - \mathrm{e}^{-i\,t}}{2\,i} \\
&= \frac{1}{2\,i}\,\Big(\cos(t) + i\,\sin(t) - \big(\cos(-t) + i\,\sin(-t)\big)\Big) \\
&= \frac{1}{2\,i}\,\Big(\cancel{\cos(t)} + i\,\sin(t) - \big(\cancel{\cos(t)} - i\,\sin(t)\big)\Big) && \textit{(par parité de } \cos \textit{ et imparité de } \sin\textit{)} \\
&= \frac{1}{2\,i}\,2\,i\,\sin(t) \ = \ \sin(t)
\end{aligned}$$

□

Exercice 8
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer, si elle existe, une forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1) $z = 1 + \mathrm{e}^{i\,\theta}$ *2)* $w = 1 - \mathrm{e}^{i\,\theta}$

Démonstration.

1) On met en facteur l'exponentielle de l'angle moitié.

$$z \;=\; 1+\mathrm{e}^{i\,\theta} \;=\; \mathrm{e}^{0}+\mathrm{e}^{i\,\theta} \;=\; \mathrm{e}^{i\,\frac{0+\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right) \;=\; 2\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta}{2}}$$

Trois cas se présentent :

× si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, alors une forme exponentielle de z est :

$$z \;=\; 2\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta}{2}}$$

× si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$, alors : $z = 0$. Ainsi, z n'admet pas de forme exponentielle.

× si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$, alors :

$$z \;=\; -2\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\times(-1)\times\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta}{2}} \;=\; -2\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\times\mathrm{e}^{i\,\pi}\times\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta}{2}}$$

Donc : $z = -2\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\times\mathrm{e}^{i\,(\pi+\frac{\theta}{2})}$. Cette dernière écriture est une forme exponentielle de z.

2) On met en facteur l'exponentielle de l'angle moitié.

$$w \;=\; 1-\mathrm{e}^{i\,\theta} \;=\; \mathrm{e}^{0}-\mathrm{e}^{i\,\theta} \;=\; \mathrm{e}^{i\,\frac{0+\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right) \;=\; -2\,i\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta}{2}}$$

On en déduit :

$$w \;=\; 2\,(-i)\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta}{2}} \;=\; 2\times\mathrm{e}^{-i\,\frac{\pi}{2}}\times\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta}{2}} \;=\; 2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\,(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$$

Trois cas se présentent :

× si $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, alors une forme exponentielle de w est :

$$w \;=\; 2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\,(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$$

× si $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$, alors : $w = 0$. Ainsi, w n'admet pas de forme exponentielle.

× si $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$, alors :

$$\begin{aligned} w &= -2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\times(-1)\times\mathrm{e}^{i\,(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}} \\ &= -2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\times\mathrm{e}^{i\,\pi}\times\mathrm{e}^{i\,(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})} \\ &= -2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\times\mathrm{e}^{i\,(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

Cette dernière écriture est une forme exponentielle de w.

□

Remarque

On retiendra cette méthode de mise en facteur de l'exponentielle de l'angle moitié lorsqu'on souhaite obtenir une forme exponentielle ou trigonométrique d'une somme ou d'une différence d'éléments de $\mathbb{U}$.

Soit $(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2$.

- Pour la somme :

$$\mathrm{e}^{i\,\theta}+\mathrm{e}^{i\,\varphi} \;=\; \mathrm{e}^{i\,\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta-\varphi}{2}}+\mathrm{e}^{i\,\frac{\varphi-\theta}{2}}\right) \;=\; 2\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta+\varphi}{2}}$$

- Pour la différence :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\,\theta}-\mathrm{e}^{i\,\varphi} &= \mathrm{e}^{i\,\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta-\varphi}{2}}-\mathrm{e}^{i\,\frac{\varphi-\theta}{2}}\right) \\ &= 2\,i\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta+\varphi}{2}} \\ &= 2\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\,(\frac{\theta+\varphi}{2}+\frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

V. Applications à la trigonométrie : transformation d'expressions trigonométriques

V.1. Un premier calcul classique

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\,\theta)$$

MÉTHODO **Calcul de C_n**

1) on remarque : $C_n = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)$.

2) on note alors : $S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$. Puis on calcule S_n.

3) on obtient alors C_n avec la relation : $C_n = \text{Re}\,(S_n)$.

Détaillons cette démarche.

1) Tout d'abord :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\,\theta) = \sum_{k=0}^{n} \text{Re}\left(e^{ik\theta}\right) = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)$$

2) On note alors : $S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$. Or :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k$$

Deux cas se présentent.

- si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors : $e^{i\theta} = 1$. D'où :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

- si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors : $e^{i\theta} \neq 1$. D'où :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\,\frac{n+1}{2}\,\theta}}{e^{i\,\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{-i\,(n+1)\,\frac{\theta}{2}} - e^{i\,(n+1)\,\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\,\frac{\theta}{2}} - e^{i\,\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{i\,n\,\frac{\theta}{2}} \times \frac{\cancel{-2\imath}\,\sin\left((n+1)\,\frac{\theta}{2}\right)}{\cancel{-2\imath}\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \textit{(par formules d'Euler)} \\ &= \frac{\sin\left((n+1)\,\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times e^{i\,n\,\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

3) On en déduit que :

- si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors : $C_n = \text{Re}\,(S_n) = n+1$.
- si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors :

$$C_n = \text{Re}\,(S_n) = \frac{\sin\left((n+1)\,\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \cos\left(n\ \frac{\theta}{2}\right)$$

Exercice 9
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\,\theta)$

2) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\,\theta)$

V.2. Factorisation et linéarisation

On s'intéresse dans cette partie à la transformation d'expressions trigonométriques. Plus précisément, on cherche à passer d'expressions factorisées à des expressions linéarisées, et vice versa.

Définition
Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit qu'une expression trigonométrique $E(x)$ est :

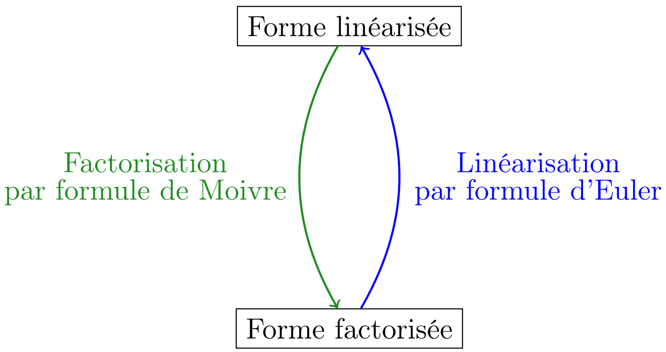
× **factorisée** si c'est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\cos^p(x)\ \sin^q(x), \qquad \text{où } (p,q) \in \mathbb{N}^2$$

× **linéarisée** si c'est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\cos(p\,x) \text{ et } \sin(q\,x), \qquad \text{où } (p,q) \in \mathbb{N}^2$$

On pourra retenir le schéma ci-dessous que nous détaillerons dans les sous-parties suivantes.



V.2.a) Une application de la formule de Moivre : la factorisation d'expressions trigonométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Objectif : On souhaite factoriser $\cos(n\,x)$ et $\sin(n\,x)$.

- Pour $\cos(n\,x)$:

1) On applique la formule de Moivre.

$$\cos(n\,x) \;=\; \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{inx}\right) \;=\; \mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^n\right) \;=\; \mathrm{Re}\left(\big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^n\right)$$

2) On applique la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \times \big(i\,\sin(x)\big)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, i^k \cos^{n-k}(x) \sin^k(x)\end{aligned}$$

3) On sépare la somme obtenue selon les termes d'indice pair et impair.

$$\big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^n$$
$$= \sum_{\substack{k\,=\,0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}\, i^k \cos^{n-k}(x) \sin^k(x) + \sum_{\substack{k\,=\,0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}\, i^k \cos^{n-k}(x) \sin^k(x)$$

Or :

× d'une part :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k\,=\,0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}\, i^k \cos^{n-k}(x) \sin^k(x) &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}\, i^{2p} \cos^{n-2p}(x) \sin^{2p}(x) \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}\, (-1)^p \cos^{n-2p}(x) \sin^{2p}(x) \\ &= S_n^{(1)}\end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité est obtenue en remarquant, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $i^{2p} = \left(i^2\right)^p = (-1)^p$.

× d'autre part :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}(x) \sin^k(x)$$

$$= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} i^{2p+1} \cos^{n-2p-1}(x) \sin^{2p+1}(x)$$

$$= i \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \cos^{n-2p-1}(x) \sin^{2p+1}(x)$$

$$= i\, S_n^{(2)}$$

L'avant-dernière égalité est obtenue en remarquant, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $i^{2p+1} = i \times i^{2p} = i\,(-1)^p$.

Enfin, comme $\left(S_n^{(1)}, S_n^{(2)}\right) \in \mathbb{R}^2$, on en déduit :

$$\cos(n\,x) \ = \ \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{inx}\right) \ = \ S_n^{(1)} \ = \ \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}(x) \sin^{2p}(x)$$

- Pour $\sin(n\,x)$:

1) On applique la formule de Moivre.

$$\sin(n\,x) \ = \ \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{inx}\right) \ = \ \mathrm{Im}\left(\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^n\right) \ = \ \mathrm{Im}\left(\big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^n\right)$$

2) On applique la formule du binôme de Newton comme précédemment.

3) En reprenant les calculs des points *2)* et *3)* pour l'étude de $\cos(n\,x)$, on en déduit :

$$\sin(n\,x) \ = \ \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{inx}\right) \ = \ S_n^{(2)}$$

$$= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \cos^{n-2p-1}(x) \sin^{2p+1}(x)$$

Remarque

- On vient de démontrer qu'il existe un polynôme T_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\,x) = T_n\big(\cos(x)\big)$$

En effet, d'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos(n\,x) &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}(x) \sin^{2p}(x) \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}(x) \left(\sin^2(x)\right)^p \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}(x) \left(1 - \cos^2(x)\right)^p
\end{aligned}$$

Ainsi : $T_n(X) \ = \ \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}(X) \left(1 - \cos^2(X)\right)^p$.

Le polynôme T_n est appelé **polynôme de Tchebychev de $1^{\text{ère}}$ espèce**.

- De même il existe un polynôme Q_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(n\,x) = \sin(x) + Q_n\big(\cos(x)\big)$$

De plus, si n est impair, alors, pour tout $p \in [\![0, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor]\!]$, $n-2p-1$ est pair. Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que : $n - 2p - 1 = 2\,q$. D'où

$$\cos^{n-2p-1}(x) \ = \ \cos^{2q}(x) \ = \ \left(\cos^2(x)\right)^q \ = \ \left(1 - \sin^2(x)\right)^q$$

On en déduit que, si n est impair, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(n\,x) = P_n\big(\sin(x)\big)$$

Exercice 10
Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser l'expression $\cos(4\,x)$.

Démonstration.
1) On applique la formule de Moivre.

$$\cos(4\,x) \;=\; \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i4x}\right) \;=\; \mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^4\right) \;=\; \mathrm{Re}\left(\big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^4\right)$$

2) Par formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
& \big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big)^4 \\
= \;& \sum_{k=0}^{4} \binom{k}{4} \cos^{4-k}(x)\; \big(i\,\sin(x)\big)^k \\
= \;& i^4\,\sin^4(x) + 4\,i^3\,\cos(x)\,\sin^3(x) + 6\,i^2\,\cos^2(x)\,\sin^2(x) + 4\,i\,\cos^3(x)\,\sin(x) + \cos^4(x) \\
= \;& \big(\sin^4(x) - 6\,\cos^2(x)\,\sin^2(x) + \cos^4(x)\big) + i\,\big(-4\,\cos(x)\,\sin^3(x) + 4\,\cos^3(x)\,\sin(x)\big)
\end{aligned}$$

On en conclut :

$$\cos(4\,x) \;=\; \sin^4(x) - 6\,\cos^2(x)\,\sin^2(x) + \cos^4(x)$$

$\square$

V.2.b) Une application de la formule d'Euler : la linéarisation d'expressions trigonométriques

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$.
Objectif : On souhaite linéariser $\cos^n(x)$, $\sin^n(x)$ et $\cos^p(x)\,\sin^q(x)$.

- Pour $\cos^n(x)$:

1) On applique la formule d'Euler.

$$\cos^n(x) \;=\; \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^n \;=\; \frac{1}{2^n}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)^n$$

2) On applique la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned}
\cos^n(x) &= \frac{1}{2^n}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)^n \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{e}^{-i(n-k)x} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{i(2k-n)x}
\end{aligned}$$

3) On remarque : $\cos^n(x) \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\cos^n(x) &= \mathrm{Re}\left(\cos^n(x)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{i(2k-n)x}\right) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i(2k-n)x}\right) && \textit{(car } \frac{1}{2^n} \in \mathbb{R} \textit{ et } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \binom{n}{k} \in \mathbb{R}\textit{)} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\big((2k-n)x\big) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\big((n-2k)x\big) && \textit{(car } \cos \textit{ est paire)}
\end{aligned}$$

- Pour $\sin^n(x)$:

1) On applique la formule d'Euler.

$$\sin^n(x) \;=\; \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^n \;=\; \frac{1}{(2i)^n}\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right)^n$$

2) On applique la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned}\sin^n(x) &= \frac{1}{(2i)^n}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^n \\ &= \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\, e^{-ikx}\, e^{i(n-k)x} \\ &= \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\, e^{i(n-2k)x}\end{aligned}$$

3) L'idée est alors de rassembler dans la somme, pour tout $k \in [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$, les termes numéro k et $n-k$. On obtient :

$$\begin{aligned}&\binom{n}{k}(-1)^k\, e^{i(n-2k)x} + \binom{n}{n-k}(-1)^{n-k}\, e^{i\left(n-2(n-k)\right)} \\ =\ &\binom{n}{k}(-1)^k\, e^{i(n-2k)x} + \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\, e^{i(2k-n)x} \\ =\ &\binom{n}{k}(-1)^k\, e^{i(n-2k)x} + (-1)^n\binom{n}{k}(-1)^k\, e^{-i(n-2k)x} \\ &\textit{(car } (-1)^{-k} = (-1)^k\textit{)}\end{aligned}$$

On note cette somme $S_{n,k}$. Deux cas se présentent alors :

- si n est pair, alors :

$$\begin{aligned}S_{n,k} &= \binom{n}{k}(-1)^k\, e^{i(n-2k)x} + \binom{n}{k}(-1)^k\, e^{-i(n-2k)x} \\ &= \binom{n}{k}(-1)^k\left(e^{i(n-2k)x} + e^{-i(n-2k)x}\right) \\ &= 2\binom{n}{k}(-1)^k\cos\left((n-2k)x\right)\end{aligned}$$

- si n est impair, alors :

$$\begin{aligned}S_{n,k} &= \binom{n}{k}(-1)^k\, e^{i(n-2k)x} - \binom{n}{k}(-1)^k\, e^{-i(n-2k)x} \\ &= \binom{n}{k}(-1)^k\left(e^{i(n-2k)x} - e^{-i(n-2k)x}\right) \\ &= 2i\binom{n}{k}(-1)^k\sin\left((n-2k)x\right)\end{aligned}$$

Exercice 11

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^3(x)$.

Démonstration.

1) On applique la formule d'Euler.

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3$$

2) Par formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= -\frac{1}{2^3\, i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{2^3\, i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) \\ &= -\frac{1}{2^3\, i}\left(2i\,\sin(3x) - 3\times 2i\,\sin(x)\right) \\ &= -\frac{1}{2^3\, i}\, 2i\,\left(\sin(3x) - 3\,\sin(x)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(3\,\sin(x) - \sin(3\,x)\right)\end{aligned}$$

□

- Pour $\cos^p(x)\ \sin^q(x)$.
  - × si $p < q$.
    1) On rassemble le produit $\cos(x)\ \sin(x)$ sous la plus grande puissance possible (ici p car $p < q$). Puis on utilise une formule de duplication.

$$\begin{aligned} \cos^p(x)\ \sin^q(x) &= \big(\cos(x)\ \sin(x)\big)^p\ \sin^{q-p}(x) \\ &= \left(\frac{1}{2}\ \sin(2x)\right)^p\ \sin^{q-p}(x) \end{aligned}$$

    2) On linéarise ensuite :
       - × d'une part : $\big(\sin(2x)\big)^p$.
       - × d'autre part : $\sin^{q-p}(x)$.
  - × si $p \geqslant q$.
    1) On rassemble le produit $\cos(x)\ \sin(x)$ sous la plus grande puissance possible (ici q car $p \geqslant q$). Puis on utilise une formule de duplication.

$$\begin{aligned} \cos^p(x)\ \sin^q(x) &= \cos^{p-q}(x)\ \big(\cos(x)\ \sin(x)\big)^q \\ &= \cos^{p-q}(x)\ \left(\frac{1}{2}\ \sin(2x)\right)^q \end{aligned}$$

    2) On linéarise ensuite :
       - × d'une part : $\big(\sin(2x)\big)^q$.
       - × d'autre part : $\cos^{p-q}(x)$.

  Notons que cette manière de procéder allège les calculs puisqu'on a abaissé l'une des 2 puissances du produit initial.

Exercice 12
Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x)\ \sin^4(x)$.

Démonstration.

1) Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \cos^3(x)\ \sin^4(x) &= \big(\cos(x)\ \sin(x)\big)^3\ \sin(x) \\ &= \left(\frac{1}{2}\ \sin(2\,x)\right)^3\ \sin(x) \\ &= \frac{1}{2^3}\ \sin^3(2x)\ \sin(x) \end{aligned}$$

2) Or d'après l'éxercice 11 :

$$\sin^3(2x) = \frac{1}{4}\ \big(3\ \sin(2x) - sin(6x)\big)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &\cos^3(x)\ \sin^4(x) \\ =\ & \frac{1}{2^3}\ \sin^3(2x)\ \sin(x) \\ =\ & \frac{1}{2^5}\ \big(3\ \sin(2x) - \sin(6x)\big)\ \sin(x) \\ =\ & \frac{1}{2^5}\ \big(3\ \sin(2x)\ \sin(x) - \sin(6x)\ \sin(x)\big) \\ =\ & \frac{1}{2^5}\left(3 \times \frac{1}{2}\ \big(\cos(2x-x) - \cos(2x+x)\big) - \frac{1}{2}\ \big(\cos(6x-x) - \cos(6x+x)\big)\right) \\ =\ & \frac{1}{2^6}\ \big(3\ \cos(x) - 3\ \cos(3x) - \cos(5x) + \cos(7x)\big) \end{aligned}$$

□

Remarque
La forme linéarisée d'une expression trigonométrique permet d'intégrer et de dériver facilement autant de fois que l'on veut.

Exercice 13
Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\ dx$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \cos^4(x)$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\ dx$ est donc bien définie.
- Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Linéarisons $\cos^4(x)$.
  1) On applique la formule d'Euler.
  $$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4$$
  2) On applique la formule du binôme de Newton.
  $$\cos^4(x) = \frac{1}{2^4}\left(e^{4ix}+4\,e^{2ix}+6+4\,e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)$$
  3) Ainsi :
  $$\begin{aligned}\cos^4(x) &= \frac{1}{2^4}\left(2\ \cos(4x)+4\times 2\ \cos(2x)+6\right)\\ &= \frac{1}{2^3}\left(\cos(4x)+4\ \cos(2x)+3\right)\end{aligned}$$
- On en déduit :
  $$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\ dx\\ =\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2^3}\left(\cos(4x)+4\ \cos(2x)+3\right)\ dx\\ =\ &\frac{1}{2^3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x)\ dx+4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\ dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\ dx\right) \quad \textit{(par linéarité de l'intégrale)}\\ =\ &\frac{1}{2^3}\left(\left[\frac{1}{4}\ \sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+4\left[\frac{1}{2}\ \sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+3\ \left[\ x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\\ =\ &\frac{1}{2^3}\left(\cancel{\frac{1}{4}\ \sin\left(4\ \frac{\pi}{2}\right)}+\cancel{2\ \sin\left(2\ \frac{\pi}{2}\right)}+3\ \frac{\pi}{2}\right)\\ =\ &\frac{1}{2^3}\times\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 14
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos^3(k\,x)$. Démontrer :

1) si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors : $S_n = n+1$.

2) si $x \not\equiv 0\ [2\pi]$ et $x \equiv 0\ [\frac{2\pi}{3}]$, alors :
$$S_n = \frac{1}{4}\left(3\ \frac{\sin\left((n+1)\ \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ \cos\left(n\ \frac{x}{2}\right)+n+1\right)$$

3) si $x \not\equiv 0[\frac{2\pi}{3}]$, alors :
$$S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin\left((n+1)\ \frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}\ \cos\left(n\ \frac{3x}{2}\right)+3\ \frac{\sin\left((n+1)\ \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ \cos\left(n\ \frac{x}{2}\right)\right)$$

(on pourra utiliser les méthodes de cette Partie **V.2.b)** *et de la Partie* **V.1***)*

VI. Démonstration des formules trigonométriques (BONUS)

Proposition 39.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \;=\; 1$$

Démonstration.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$.
De plus :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} = x \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{|z|} = y$$

On en déduit :

$$1 \;=\; |z|^2 \;=\; x^2 + y^2 \;=\; \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)$$

□

Proposition 40. (Formules d'addition)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1) $\cos(a - b) \;=\; \cos(a)\,\cos(b) \;+\; \sin(a)\,\sin(b)$

2) $\cos(a + b) \;=\; \cos(a)\,\cos(b) \;-\; \sin(a)\,\sin(b)$

3) $\sin(a - b) \;=\; \sin(a)\,\cos(b) \;-\; \sin(b)\,\cos(a)$

4) $\sin(a + b) \;=\; \sin(a)\,\cos(b) \;+\; \sin(b)\,\cos(a)$

Démonstration.

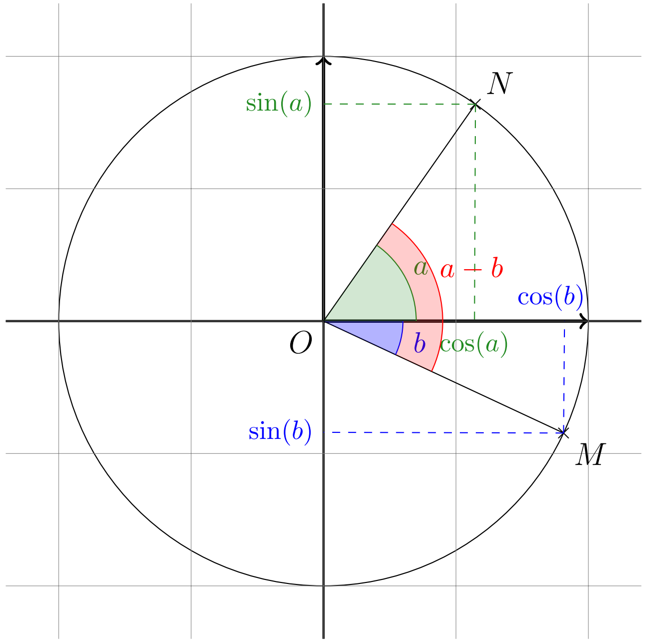
1) On considère les points M et N d'affixes respectives $z_M = \cos(b) + i\,\sin(b)$ et $z_N = \cos(a) + i\,\sin(a)$.

- Remarquons tout d'abord que, d'après la proposition précédente :

$$|z_M| \;=\; |z_N| \;=\; 1$$

Ainsi, $(z_M, z_N) \in \mathbb{U}^2$. On en déduit que M et N sont situés sur le cercle trigonométrique (cercle de centre O et de rayon 1).

On obtient la configuration suivante :



- Notons de plus :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) &\equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) \quad [2\pi] \\ &\equiv a - b \quad [2\pi]\end{aligned}$$

On obtient alors :

× d'une part :

$$\begin{aligned} & < \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} > \\ = \; & \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\| \times \cos\big((\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})\big) \\ = \; & 1 \times 1 \times \cos\big((\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})\big) \qquad \textit{(car } (z_M, z_N) \in \mathbb{U}^2\textit{)} \\ = \; & \cos(a - b) \end{aligned}$$

× d'autre part, par définition de l'affixe d'un vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$< \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} > = \cos(b)\ \cos(a) + \sin(b)\ \sin(a)$$

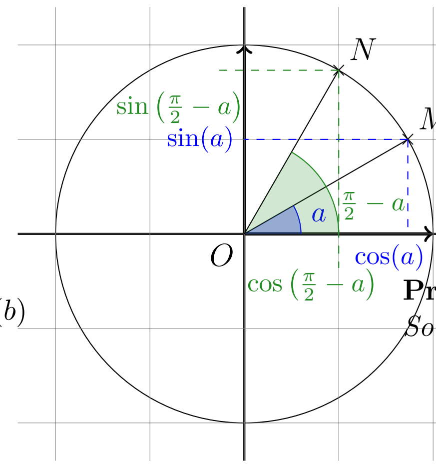
On en déduit bien : $\cos(a-b) = \cos(a)\ \cos(b) + \sin(a)\ \sin(b)$.

2) On utilise la formule précédente :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos\big(a-(-b)\big) \\ &= \cos(a)\ \cos(-b) + \sin(a)\ \sin(-b) \\ &= \cos(a)\ \cos(b) + \sin(a)\ \big(-\sin(b)\big) && \textit{(car } \cos \textit{ est paire et } \sin \textit{ est impaire)} \\ &= \cos(a)\ \cos(b) - \sin(a)\ \sin(b) \end{aligned}$$

3) On utilise la formule *2)* :

$$\begin{aligned} & \sin(a-b) \\ = \ & \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) \\ = \ & \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) \\ = \ & \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\ \cos(b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\ \sin(b) \\ = \ & \sin(a)\ \cos(b) - \cos(a)\ \sin(b) \end{aligned}$$



4) On utilise la formule *3)* :

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin\big(a-(-b)\big) \\ &= \sin(a)\ \cos(-b) - \sin(-b)\ \cos(a) \\ &= \sin(a)\ \cos(b) + \sin(b)\ \cos(a) && \textit{(car } \cos \textit{ est paire et } \sin \textit{ est impaire)} \end{aligned}$$

□

Exercice 15
Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à l'aide d'une formule d'addition.

Démonstration.
On remarque :

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\,\pi - 3\,\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\ (1+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

□

Proposition 41. (Formules de duplication)
Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cos(2\,a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\,\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\,\sin^2(a) \\ \sin(2\,a) &= 2\,\sin(a)\ \cos(a) \end{aligned}$$

Démonstration.
Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\cos(2\,a) &= \cos(a+a) \\
&= \cos(a)\,\cos(a) - \sin(a)\,\sin(a) && \textit{(par formule de duplication)} \\
&= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\
&= \cos^2(a) - \big(1 - \cos^2(a)\big) \\
&= 2\,\cos^2(a) - 1 \\
&= 2\,\big(1 - \sin^2(a)\big) - 1 \\
&= 1 - 2\,\sin^2(a)
\end{aligned}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
\sin(2\,a) &= \sin(a+a) \\
&= \sin(a)\,\cos(a) + \sin(a)\,\cos(a) \\
&= 2\,\sin(a)\,\cos(a)
\end{aligned}$$

□

Exercice 16
Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à l'aide d'une formule de duplication.

Démonstration.
On remarque :

$$\frac{\pi}{6} = 2\,\frac{\pi}{12}$$

Or :

× d'une part :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

× d'autre part :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(2\,\frac{\pi}{12}\right) \\
&= 2\,\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$2\,\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, on obtient finalement :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

□