CH IV : Ensembles et applications

Généralités sur les applications

I. Notion d'application

I.1. Définition et vocabulaire

Définition

Soient E et F deux ensembles.

Une **application** f de E dans F (notée $f : E \to F$) est un procédé permettant d'associer à chaque élément x de l'ensemble E, un et un seul élément y de l'ensemble F.

- Soit $x \in E$. L'élément $y \in F$ associé à x par f est appelé l'**image** de x par l'application f et est noté $y = f(x)$.
- L'ensemble E s'appelle l'**ensemble de départ** de l'application.
- L'ensemble F s'appelle l'**ensemble d'arrivée** de l'application.
- Si $y \in F$, deux cas se présentent.
  - × Soit il existe au moins un élément x de E dont y est l'image.
    On dit dans ce cas que x est un **antécédent** de y par f.
  - × Soit y n'admet pas d'antécédent par l'application f.
- On appelle **image** de f et on note $\text{Im}\left(f\right)$, l'ensemble des éléments y de F qui admettent des antécédents par f.

$$\boxed{\text{Im}\left(f\right) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}}$$

- Par définition, on a toujours $\boxed{\text{Im}\left(f\right) \ \subset \ F}$ mais pas forcément égalité.
- On note $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.
- Enfin, si $E = F$, l'application qui à chaque x élément de E associe ce même élément x est appelée l'**identité** sur E et se note id_E.

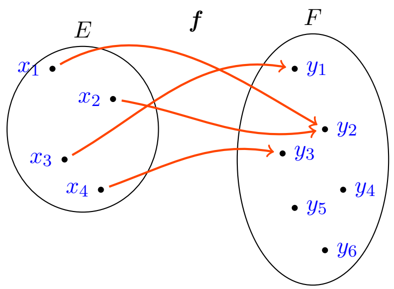
$$\begin{array}{rccc} \text{id}_E & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$$

Soit $f : E \to F$ une application. Il ne faut pas confondre :
- $\text{Im}(f)$ l'image de l'application f.
  (l'ensemble des images : $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$*)*
- F l'ensemble d'arrivée de l'application f.

Comme déjà précisé : $\text{Im}(f) \subset F$ mais pas forcément $\text{Im}(f) = F$.

Représentation graphique

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.



Sur ce dessin :

× $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

× $F = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$

× $\text{Im}\left(f\right) = \{y_1, y_2, y_3\} \ \subset \ F$

Il est important de noter que :

× de tout élément de E part une flèche. C'est le cas car, par définition, l'application f est définie sur E en entier.

× une flèche ne peut pointer que vers un élément de F. C'est le cas car, par définition, à tout élément de E on associe un seul élément de F.

× deux flèches différentes peuvent mener au même élément de F (rien ne l'interdit dans la définition).

× il peut exister des éléments de F qui ne sont pas atteints (rien ne l'interdit dans la définition).

Différence entre application et fonction.

- La définition d'application stipule que tout élément x de E admet une unique image par f, ce qui s'écrit : $\forall x \in E, \exists ! y \in F,\ y = f(x)$.

  (à ne pas confondre avec la notion de bijectivité !)
- Sur le schéma précédent, cela signifie que d'un élément x_i part forcément une flèche mais seulement une.
- Dans la définition de fonction, on relâche cette contrainte en exigeant seulement qu'un élément x de E admet **au plus** une image par f.

  D'un élément $x \in E$ peut ne pas partir de flèche, ce qui signifie alors que la fonction f n'est pas définie en x.
- Par exemple, on peut parler de la fonction inverse (notée $f : x \mapsto \frac{1}{x}$) sans préciser son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée et déterminer, dans un second temps, son ensemble de définition.
- Plus précisément, l'objet f suivant :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

  est une fonction mais pas une application puisque f n'est pas définie en 0. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Dans le programme officiel, il est précisé que « *[L]e programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application* ».
- Par ailleurs, il est précisé que l'ensemble des fonctions de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou encore F^E. Cette notation est cohérente (pourquoi ?) avec la notation $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui désigne l'ensemble des suites à coefficients réels.

Égalité de deux applications

- Deux applications $f : E_1 \to F_1$ et $g : E_2 \to F_2$ sont **égales** si :
  - × elles ont même ensemble de départ : $E_1 = E_2$,
  - × même ensemble d'arrivée $F_1 = F_2$,
  - × et vérifient : $\forall x \in E_1, f(x) = g(x)$.
- Par exemple, les objets f_1 et f_2 suivants :

$$f_1 \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \qquad f_2 \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R}_-^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

  sont des applications différentes et ce même si elles sont construites à l'aide du même procédé $x \mapsto \frac{1}{x}$.

I.2. Image(s) d'un ensemble par une application

I.2.a) Image directe d'un ensemble par une application

Définition

Soient E et F deux ensembles et soit $A \subset E$.

Soit $f : E \to F$.

- L'**image** (**directe**) de l'ensemble A par l'application f, notée $f(A)$, est l'ensemble des images par f des éléments de A. Autrement dit :

$$\boxed{f(A) \ = \ \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}} \ = \ \{f(x) \mid x \in A\} \ \subset \ F$$

  Autrement dit, pour tout $A \subset E$ et tout $y \in F$:

$$\boxed{y \in f(A) \ \Leftrightarrow \ \exists x \in A, y = f(x)}$$

- En particulier, on a : $\boxed{f(E) \ = \ \mathrm{Im}(f)}$

Propriété

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soient $A \in \mathscr{P}(E)$, $A_1 \in \mathscr{P}(E)$ et $A_2 \in \mathscr{P}(E)$.

a) $\boxed{f(A) \subset F}$ $\boxed{f(E) = \mathrm{Im}(f)}$ $\boxed{f\big(\varnothing\big) = \varnothing}$

b) $\boxed{A_1 \subset A_2 \ \Rightarrow\ f\big(A_1\big) \subset f\big(A_2\big)}$

c) $\boxed{f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)}$

d) $\boxed{f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)}$

Démonstration.

c. On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$.
Alors il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$.
Ceci signifie que $x \in A_1$ ou $x \in A_2$. Deux cas se présentent alors :

- × si $x \in A_1$: alors on a $y = f(x) \in f(A_1)$.
- × si $x \notin A_1$: alors, comme $x \in A_1 \cup A_2$, on a forcément $x \in A_2$.
  On en déduit que $y = f(x) \in f(A_2)$.

Ainsi, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

($\supset$) Soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
Ceci signifie que $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$. Deux cas se présentent alors :

- × si $y \in f(A_1)$: il existe donc $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$.
  Or $A_1 \subset A_1 \cup A_2$. Ainsi, $x \in A_1 \cup A_2$.
  D'où $y \in f(A_1 \cup A_2)$.
- × si $y \notin f(A_1)$: alors comme $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, on a forcément $y \in f(A_2)$. Il existe donc $x \in A_2$ tel que $y = f(x)$.
  Or $A_2 \subset A_1 \cup A_2$. Ainsi, $x \in A_1 \cup A_2$.
  D'où $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

Ainsi, $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

d. Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$.
Alors il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$.

- Comme $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, on a : $x \in A_1$ et donc $f(x) \in f(A_1)$.
- De même, $A_1 \cap A_2 \subset A_2$, et donc $f(x) \in f(A_2)$.

On en déduit que $f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

e. Il n'y a pas égalité. Il suffit d'exhiber un contre-exemple pour s'en convaincre.
Par exemple, on prend $A_1 = \mathbb{R}_-$, $A_2 = \mathbb{R}_+$ et $f : x \mapsto |x|$.
On a alors :

- $f(A_1 \cap A_2) = f(\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+) = f(\{0\}) = \{0\}$
- $f(A_1) = f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$ et $f(A_2) = f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.
  D'où $f(A_1) \cap f(A_2) = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$.

□

Exercice

On considère les fonctions :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

1. Déterminer les ensembles suivants.

a) $f\big([0,3]\big)$ ***b)*** $f\big([-1,2]\big)$ ***c)*** $f\big(\mathbb{R}\big)$

d) $f\big([-5,1] \cup [2,4[\big)$ ***e)*** $f\big([-5,-3[\cup [2,4[\big)$

2. Déterminer les ensembles suivants.

1. $g\big(\mathbb{R}\big)$ ***2.*** $g\big([0,\frac{\pi}{2}]\big)$ ***3.*** $g\big([-\frac{\pi}{4},0]\big)$ ***4.*** $g\big([-1,2]\big)$

5. $g\big([-\pi,-\frac{\pi}{2}[\cup [0,\frac{\pi}{2}]\big)$

I.2.b) Image réciproque d'un ensemble par une application

Définition

Soient E et F deux ensembles et soit $B \subset F$.

Soit $f : E \to F$.

- L'**image réciproque** de l'ensemble B par l'application f, noté $f^{-\mathbb{1}}(B)$, est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B. Autrement dit :

$$\boxed{f^{-\mathbb{1}}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}}$$

Autrement dit, pour tout $B \subset F$, et pour tout $x \in E$:

$$x \in f^{-\mathbb{1}}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Soit $f : E \to F$ une application

Soient B une partie de F et soit $y \in F$.

Il ne faut pas confondre :

- $f^{-\mathbb{1}}(B)$ qui est l'image réciproque de l'ensemble B par l'application f. Par définition, cela désigne un **ensemble** (c'est l'ensemble des antécédénts par f des éléments de B).
- $f^{-1}(y)$ qui est l'image de y par f^{-1}, la bijection réciproque (on y reviendra) de f dans le cas où f est bijective.
  Par définition, $f^{-1}(y)$ est un **élément** de E.

Il convient donc de remarquer que la même notation est utilisée pour deux objets très différents. C'est le contexte qui permet de déterminer quel est l'objet concerné :

$f^{-\mathbb{1}}\big(\text{« ensemble de } F \text{ »}\big)$ est un ensemble de E

$f^{-1}\big(\text{« élément de } F \text{ »}\big)$ est un élément de E

Propriété

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soient $B \in \mathscr{P}(F)$, $B_1 \in \mathscr{P}(F)$ et $B_2 \in \mathscr{P}(F)$.

a) $\boxed{f^{-\mathbb{1}}(B) \subset E}$ $\boxed{f^{-\mathbb{1}}(F) = E}$ $\boxed{f^{-\mathbb{1}}\big(\varnothing\big) = \varnothing}$

b) $\boxed{B_1 \subset B_2 \ \Rightarrow\ f^{-\mathbb{1}}\big(B_1\big) \subset f^{-\mathbb{1}}\big(B_2\big)}$

c) $\boxed{f^{-\mathbb{1}}(B_1 \cup B_2) = f^{-\mathbb{1}}(B_1) \cup f^{-\mathbb{1}}(B_2)}$

d) $\boxed{f^{-\mathbb{1}}(B_1 \cap B_2) = f^{-\mathbb{1}}(B_1) \cap f^{-\mathbb{1}}(B_2)}$

Exercice

On considère les fonctions :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

1. Déterminer les ensembles suivants.

a) $f^{-\mathbb{1}}\big([0,9]\big)$ ***b)*** $f^{-\mathbb{1}}\big([-1,2[\big)$ ***c)*** $f^{-\mathbb{1}}\big(\mathbb{R}\big)$ ***d)*** $f^{-\mathbb{1}}\big(\mathbb{R}_-\big)$

e) $f^{-\mathbb{1}}\big([-5,1[\ \cup\ ]2,4]\big)$

2. Déterminer les ensembles suivants.

1. $g^{-\mathbb{1}}\big(\mathbb{R}\big)$ ***2.*** $g^{-\mathbb{1}}\big([0,1]\big)$ ***3.*** $g^{-\mathbb{1}}\big([0,\frac{1}{2}]\big)$ ***4.*** $g^{-\mathbb{1}}\big([-1,2]\big)$

5. $g^{-\mathbb{1}}\big([3,5]\big)$

II. Restriction

Définition

Soient E et F deux ensembles et A une partie de E.

Soit $f : E \to F$ une application.

- La **restriction** de f à A, notée $f_{|A}$, est l'application de A dans F définie par :

$$f_{|A} \quad : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

- Autrement dit, on a : $\boxed{\forall x \in A,\ f_{|A}(x) \ = \ f(x)}$
- On a alors : $\boxed{\mathrm{Im}\left(f_{|A}\right) = f(A)}$

Soit $x \in E$ et $A \subset E$.
Il ne faut pas confondre les objets $f(x)$ et $f(A)$ qui sont de nature très différente :

× $f(x)$ est un élément de F,

× $f(A)$ est un ensemble (sous-ensemble de F).

III. Composée de deux applications

Définition

Soient E, F et G trois ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

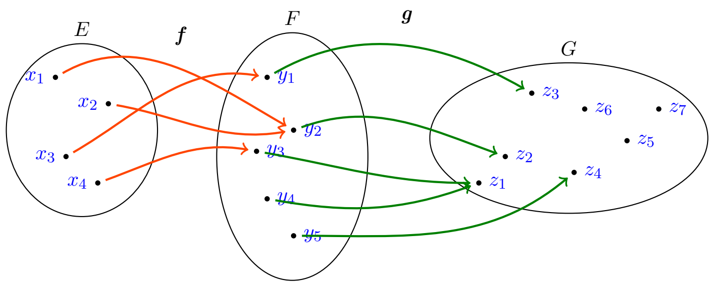
- La **composée** de f par g, notée $g \circ f$, est l'application :

$$g \circ f \quad : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g\big(f(x)\big) \end{array} \right.$$

- Autrement dit, on a : $\boxed{\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)}$

Représentation graphique

Soient E, F et G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications.



Remarque

Les ensembles de départ et d'arrivée des applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$ ont un rôle crucial pour la bonne définition de $g \circ f$. Plus précisément :

$$\boxed{g \circ f \text{ est bien définie} \ \Leftrightarrow \ f(E) \subset F}$$

La loi $\circ$ n'est pas **commutative**.
Ceci signifie que, de manière générale, $f \circ g \neq g \circ f$.
Deux raisons possibles à cela.

1) D'après la remarque précédente, $g \circ f$ peut-être définie sans que $f \circ g$ le soit (et inversement).

2) Même si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies (c'est par exemple le cas lorsque $E = F = G$), les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont généralement différentes.

Exemple
Considérons les applications suivantes :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies. Toutefois :

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f\big(g(x)\big) \\ &= f\big(x^2\big) \\ &= x^2 + 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) \\ &= g(x+1) \\ &= (x+1)^2 \end{aligned}$$

Les deux applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont différentes. Par exemple :

$$(f \circ g)(2) = 2^2 + 1 = 5 \neq 9 = (2+1)^2 = (g \circ f)(2)$$

Exercice
On considère les deux applications f et g de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ dans lui-même définies par leurs tables de valeurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	6	4	7	8	9	3	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(x)$	1	2	7	4	5	6	3	8	9

Représenter de la même façon les applications $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ g$.

Les applications $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ g$ sont données par :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g \circ g(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g \circ f(x)$	6	4	3	8	9	7	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f \circ f(x)$	3	8	5	1	2	7	9	6	4

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f \circ g(x)$	6	4	5	8	9	3	7	1	2

Propriété
Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} f & \circ & \mathrm{id}_E & = & f \\ \mathrm{id}_F & \circ & f & = & f \end{array}}$$

Propriété
Soient E, F, G trois ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application.
Soit $g : F \to G$ une application.
Soit $h : G \to H$ une application.
On a alors : $\boxed{h \circ (g \circ f) \ = \ (h \circ g) \circ f}$
(la loi $\circ$ est associative)

Remarque
Avec les notations précédentes, on a :

- $h \circ g : F \to H$,
- $g \circ f : E \to G$,
- $h \circ g \circ f : E \to H$.
  (la notation $h \circ g \circ f$ est autorisée du fait de l'associativité de la loi $\circ$)

IV. Caractère injectif, surjectif, bijectif des applications

IV.1. Injectivité

Définition

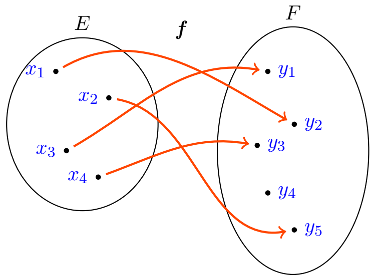
Soient E et F deux ensembles.

- Une application $f : E \to F$ est **injective** si tout couple d'éléments distincts de E fournit deux images distinctes par f.

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)}$$

Représentation graphique

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application.



Exemple d'application injective et non injective.

1) L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est injective.

En effet, si x_1 et x_2 sont deux éléments de E tels que $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$.

2) L'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est non injective.

En effet, $-1 \neq 1$ et $g(-1) = 1 = g(1)$.

3) En revanche, $g_{|\mathbb{R}_+}$ est bien injective.

Propriété

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

$$\boxed{f \text{ injective } \Leftrightarrow \text{ Tout élément } y \in F \text{ admet au plus un antécédent par } f}$$

Démonstration.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons par l'absurde que f est injective et qu'il existe un élément $y \in F$ admettant strictement plus d'un antécédent par f.
Alors il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = y = f(x_2)$.
Ceci contredit l'injectivité de f.

($\Leftarrow$) Supposons que tout élément $y \in F$ admet au plus un antécédent par f.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $x_1 \neq x_2$. Notons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
Alors on a forcément $y_1 \neq y_2$ car sinon y_1 posséderait deux antécédents distincts x_1 et x_2. □

Démontrer qu'une application est injective

On peut utiliser la définition équivalente, stipulant qu'une application est injective si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$

Cette définition est l'écriture contraposée de la définition initiale.
(on a même : $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$)

```
Démontrons que f : E → F injective.

 Soit (x1, x2) ∈ E².
 On suppose que f(x1) = f(x2).  ...démonstration
 ...
 Alors x1 = x2.
 On a donc démontré que f est injective.
```

Propriété

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ est injective} \\ g \text{ est injective} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \circ f : E \to G \text{ est injective}}$$

Autrement dit, la composée de deux applications injectives est injective.

Démonstration.
Supposons f et g injectives et démontrons que $g \circ f : E \to G$ est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
Autrement dit : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
Or, comme g est injective, on en déduit que : $f(x_1) = f(x_2)$.
Or, comme f est injective, on en déduit que : $x_1 = x_2$.

Ainsi $g \circ f$ est injective. □

Propriété

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

$$\boxed{g \circ f \text{ est injective} \quad \Rightarrow \quad f \text{ injective}}$$

Démonstration.
Supposons $g \circ f$ injective et démontrons que $f : E \to F$ est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
On a alors : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
(égalité obtenue en composant chaque membre de l'égalité précédente par g)
Autrement dit : $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
Or, comme $g \circ f$ est injective, on en déduit que : $x_1 = x_2$.

Ainsi f est injective. □

Propriété

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

$$\boxed{f \text{ strictement croissante} \quad \Rightarrow \quad f \text{ est injective}}$$

Démonstration.
Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \neq x_2$.
Quitte à renommer x_1 et x_2, on peut supposer que : $x_1 > x_2$.
Or, la fonction f est strictement croissante. On a donc : $f(x_1) > f(x_2)$.
Ainsi : $f(x_1) \neq f(x_2)$.

On en conclut que f est injective. □

IV.2. Surjectivité

Définition

Soient E et F deux ensembles.

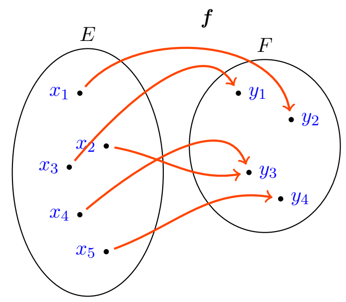
- Une application f de E dans F est **surjective** si tout élément de F admet au moins un antécédent par f.

$$\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E, \ y = f(x)}$$

- Autrement dit, f surjective si : $\boxed{\operatorname{Im}(f) = F}$

Représentation graphique

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application surjective.



Exemple d'applications surjectives et non surjectives.

1) L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est surjective. En effet, tout élément y de $\mathbb{R}$ est atteint par f puisque $y = f(y)$.

2) L'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est non surjective. En effet, -1 ne peut s'écrire comme le carré d'un réel (il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $-1 = x^2$).

3) En revanche, $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est bien surjective. En effet, tout $y \in \mathbb{R}_+$ peut s'écrire sous la forme $y = h(\sqrt{y})$. On a bien $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

Démontrer qu'une application est surjective

La propriété définissant la surjectivité fournit le schéma de rédaction suivant.

> `Démontrons que` $f : E \to F$ `surjective.`
>
> `Soit` $y \in F$`.`
> `Exhibons` $x \in E$ `tel que` $y = f(x)$`.`
> ... *démonstration* ...
> `Alors` $y = f(x)$`.`
> `On a donc démontré que` f `est surjective.`

Remarque

- L'élément y nommé au début de la démonstration est un élément de l'ensemble F. Le but de la démonstration est de démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, ce qui signifie que $y \in \mathrm{Im}(f)$ $(= f(E))$.
- On démontre donc que tout élément $y \in F$ vérifie $y \in \mathrm{Im}(f)$.
  Autrement dit : $F \subset \mathrm{Im}(f)$.
- Comme on a toujours $\mathrm{Im}(f) \subset F$, on démontre ainsi : $\mathrm{Im}(f) = F$.

> On l'a déjà dit : il ne faut pas confondre F et $\mathrm{Im}(f)$.
> Ces deux ensembles ne sont égaux que si f est surjective.

Exercice 1 *(un grand classique)*

Soit E un ensemble.

Démontrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
On pourra considérer l'ensemble $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$ pour une certaine application φ.

Propriété

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ g \text{ est surjective} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad g \circ f : E \to G \text{ est surjective}$$

Autrement dit, la composée de deux applications surjectives est surjective.

Démonstration.
Supposons f et g surjectives et démontrons que $g \circ f$ est surjective.

Soit $y \in G$.
Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Comme $g : F \to G$ est surjective, il existe $u \in F$ tel que $y = g(u)$.
Comme $f : E \to F$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $u = f(x)$.
On a alors : $y = g(u) = g(f(x)) = g \circ f(x)$.

Ainsi $g \circ f$ est surjective. □

Propriété

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

$$\boxed{g \circ f \text{ est surjective } \Rightarrow \ g \text{ surjective}}$$

Démonstration.
Supposons $g \circ f$ surjective et démontrons que g est surjective.

Soit $y \in G$.
Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$.
Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $u \in E$ tel que $y = g \circ f(u) = g(f(u))$.
Notons $x = f(u)$. Alors $x \in F$ et x vérifie $y = g(x)$.

Ainsi f est surjective. □

Propriété

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

$$\boxed{\text{Alors l'application } \begin{array}{rccc} \tilde{f} & : & E & \to & f(E) \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array} \text{ est surjective.}}$$

Démonstration.

Soit $y \in f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$.
Alors, par définition de $f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = \tilde{f}(x)$.

Ainsi $\tilde{f}$ est surjective. □

Remarque

- C'est une manière classique de rendre une fonction surjective.
- Cette propriété est notamment utilisé dans le théorème de la bijection.

  Plus précisément, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est telle que :

  × f est strictement croissante sur $[a, b]$,

  × f est continue sur $[a, b]$,

  alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $f([a, b])$. En effet :

  a) Comme f est strictement croissante, elle est injective.

  b) On rend alors cette fonction surjective modifiant son ensemble d'arrivée.
  Plus précisément, $f : [a, b] \to f([a, b])$ est surjective.
- Notez que nous n'avons pas eu besoin dans la démonstration précédente du caractère continue de la fonction f. Dès lors, à quoi sert cette hypothèse ?

  (i) Si f est continue, alors $f([a, b])$ est l'image d'un intervalle par une fonction continue. C'est donc un intervalle.

  (ii) Sous l'hypothèse de continuité de f on a la propriété :

  $$f \text{ injective } \Rightarrow \ f \text{ strictement monotone}$$

  La réciproque étant toujours vérifiée, on obtient une caractérisation des applications strictement monotones. Si f est continue, on a :

  $$f \text{ injective } \Leftrightarrow \ f \text{ strictement monotone}$$

IV.3. Bijectivité

Définition

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

- On dit que l'application $f : E \to F$ est **bijective** ou définit une **bijection** de E dans F si f est injective et surjective.
- Ainsi, l'application $f : E \to F$ est **bijective** si tout élément $y \in F$ admet un et un seul antécédent $x \in E$ par f. Autrement dit :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists! x \in E,\ y = f(x)}$$

Remarque

Si $f : E \to F$ est une application bijective :

× f est une application : donc à tout élément x de E correspond un et un seul élément y de F,

× f est bijective : donc à tout élément y de F est associé un unique élément x de E par f (x est l'antécédent de y par f).

On en conclut qu'il y a « autant » d'éléments dans E que dans F.

Définition

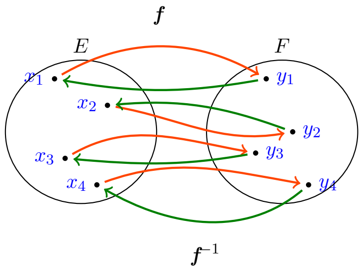
Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application **bijective**.

- La (bijection) réciproque associée à f, notée $f^{-1} : F \to E$, est l'application de F dans E qui, à chaque y de F, associe son unique antécédent x par f.
- On a alors : $\boxed{\forall x \in E, \forall y \in F,\ x = f^{-1}(y) \ \Leftrightarrow\ y = f(x)}$
  ($f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f)

Représentation graphique

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application bijective.



Exemple d'application bijective et non bijective.

1) L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est bijective car elle est à la fois injective et surjective.

2) L'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas bijective. En fait, elle n'est ni injective ni surjective.

3) En revanche, $t : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est bien bijective puisqu'elle est à la fois injective est surjective. Tout $y \in \mathbb{R}_+$ s'écrit d'une unique manière comme un carré : $y = (\sqrt{y})^2 = t(y)$.

Propriétés

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application **bijective**.

a. L'application réciproque f^{-1} est bijective et $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$

b. ***1)*** $\boxed{\forall x \in E, \forall y \in F,\ (y = f(x) \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y))}$

2) $\boxed{\forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) \ = \ y}$

3) $\boxed{\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) \ = \ x}$

Proposition 1.

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des applications.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont bijectives.} \\ \text{De plus : } g = f^{-1} \text{ et } f = g^{-1} \end{array}}$$

Démonstration.

a. On sait que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Or id_E est une bijection de E dans E.
Donc $g \circ f$ est bijective. On en déduit que $g \circ f$ est notamment surjective.
Ainsi g est surjective.

De même, $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Or id_F est une bijection de F dans F.
Donc $f \circ g$ est bijective. On en déduit que $f \circ g$ est notamment injective.
Ainsi g est injective.

On en déduit que g est bijective.
On démontre de la même manière que f est bijective.

b. La réciproque de f est par définition l'application qui à $y \in F$ associe son unique antécédent par f.
Soit $y \in F$. Alors $f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{id}_F(y) = y$.
L'élément $g(y)$ est un antécédent de y par f.
Comme f est bijective, cet élément est unique. D'où $g(y) = f^{-1}(y)$.
Ainsi : $\forall y \in F,\ g(y) = f^{-1}(y)$.
Autrement dit : $g = f^{-1}$. □

Proposition 2.

Soient E, F et G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

- *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections,*
  alors la composée $g \circ f : E \to G$ est une bijection, et on a :

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

Démonstration.
Le caractère associatif de la loi $\circ$ (parenthésage comme bon nous semble) nous permet d'écrire :

$$\begin{array}{rlcrl} & (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) & \qquad & & (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\ = & g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} & & = & f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ = & g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} & & = & f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ = & g \circ \mathrm{id}_F \circ g^{-1} & & = & f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f \\ = & (g \circ \mathrm{id}_F) \circ g^{-1} & & = & (f^{-1} \circ \mathrm{id}_F) \circ f \\ = & g \circ g^{-1} \ = \ \mathrm{id}_G & & = & f^{-1} \circ f \ = \ \mathrm{id}_E \end{array}$$

D'après la proposition 1, $g \circ f$ est bijective, de réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Méthodologie : déterminer la réciproque d'une application

- Par une étude théorique : via la proposition 1.

  Exercice
  Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$.
  Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

- Par calcul : en inversant l'égalité $y = f(x)$

  Exercice
  On considère l'application :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{-5\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x-3}{x+5} \end{array}$$

  a. Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

  b. Répondre aux mêmes questions pour h : $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}\right.$

Exercice
Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$.
Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que : $\begin{array}{rcl} (f \circ f) \circ f &=& \mathrm{id}_E \\ f \circ (f \circ f) &=& \mathrm{id}_E \end{array}$.
Par la proposition 1, on en conclut que f est bijective et que $f^{-1} = f \circ f$. $\square$

Exercice
On considère l'application :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{-5\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x-3}{x+5} \end{array}$$

a. Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

On souhaite démontrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \exists\, !\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\},\ y = g(x)$$

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On résout l'équation $y = g(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Pour ce faire, on raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{lrcll} & y &=& g(x) & (1) \\ \Leftrightarrow & y &=& \dfrac{2x-3}{x+5} & (2) \\ \Leftrightarrow & y(x+5) &=& 2x-3 & (3) \\ \Leftrightarrow & x(y-2) &=& -3-5y & (4) \\ \Leftrightarrow & x &=& \dfrac{3+5y}{2-y} & (5) \end{array}$$

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Notons $x = \dfrac{3+5y}{2-y}$.

- Alors $x \neq -5$. En effet, on aurait sinon : $-5 = \dfrac{3+5y}{2-y}$.

  Et donc $-10 + 5y = 3 + 5y$ et ainsi $-10 = 3$ ce qui est impossible.
- D'autre part, on a :

$$g(x) = \frac{2x-3}{x+5} = \frac{2\,\frac{3+5y}{2-y} - 3}{\frac{3+5y}{2-y} + 5} = \frac{\frac{2(3+5y)-3(2-y)}{2-y}}{\frac{3+5y+5(2-y)}{2-y}} = \frac{13y}{\cancel{2-y}} \times \frac{\cancel{2-y}}{13} = y$$

L'unicité de x est donnée par le raisonnement par équivalence précédent.
Ainsi, $g : \mathbb{R}\backslash\{-5\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\}$ est bijective.

Sa bijection réciproque est : $g^{-1} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-5\} \\ x & \mapsto & \dfrac{3+5x}{2-x} \end{array} \right.$

b. Répondre aux mêmes questions pour $h : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$

On souhaite démontrer que :

$$\forall y \in\,]-1,1[, \exists\, !\, x \in \mathbb{R},\ y = h(x)$$

Soit $y \in\,]-1,1[$. On résout l'équation $y = h(x)$ d'inconnue x. Pour ce faire, on raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{lrcll} & y &=& h(x) & (1) \\ \Leftrightarrow & y &=& \dfrac{x}{1+|x|} & (2) \\ \Leftrightarrow & y(1+|x|) &=& x & (3) \\ \Leftrightarrow & |x|\ y - x &=& -y & (4) \\ \Leftrightarrow & x(\mathrm{sgn}(x)\ y - 1) &=& -y & (5) \\ \Leftrightarrow & x &=& \dfrac{-y}{\mathrm{sgn}(x)\ y - 1} & (6) \end{array}$$

On a introduit la fonction *signe* qui est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sgn} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

(en particulier, on a : $\operatorname{sgn}(x)\ x = |x|$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*)*

On remarque enfin que, comme $1+|x| > 0$, si $y = \dfrac{x}{1+|x|}$ alors on a $\operatorname{sgn}(y) = \operatorname{sgn}(x)$.

On en déduit que :

$$y = h(x) \Leftrightarrow x = \frac{-y}{\operatorname{sgn}(y)\ y - 1} = \frac{-y}{|y| - 1}$$

Soit $y \in]-1, 1[$.

Notons $x = \dfrac{-y}{|y|-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x}{1+|x|} = \frac{\frac{-y}{|y|-1}}{1 + \left|\frac{-y}{|y|-1}\right|} = \frac{-y}{|y|-1} \times \frac{1}{1 + \frac{|-y|}{||y|-1|}} = \frac{-y}{|y|-1} \times \frac{1}{1 + \frac{|y|}{1-|y|}} \\ &= \frac{-y}{|y|-1} \times \frac{1}{\frac{1}{1-|y|}} = \frac{-y}{-1} = y \end{aligned}$$

($||y|-1| = 1 - |y|$ *car* $|y| < 1$*)*

L'unicité de x est donnée par le raisonnement par équivalence précédent.

Ainsi, $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ est bijective.

Sa bijection réciproque est : $h^{-1} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]-1, 1[\\ x & \mapsto & \dfrac{-x}{|x|-1} \end{array} \right.$