CH XVII : Applications linéaires

I. Notion d'application linéaire

I.1. Définition

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \textit{(l'image d'une somme est la somme des images)} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E^2,\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \\ \textit{(l'image d'une multiplication par un scalaire est} \\ \textit{la multiplication scalaire de l'image)} \end{array}}$$

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.
- Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathscr{L}(E)$.
  Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E.

Théorème 1 (Caractérisation des applications linéaires)**.**

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \textit{L'application } f : E \to F \textit{ est linéaire} \\ \Leftrightarrow & \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y) \\ \Leftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y) \\ \Leftrightarrow & \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2,\ f(x + \mu \cdot y) = f(x) + \mu \cdot f(y) \\ & \textit{(éviter ces 2 dernières caractérisations qui introduisent une dissymétrie} \\ & \textit{de traitement des vecteurs } x \textit{ et } y \textit{ et masquent la notion de CL)} \end{array}}$$

Exercice

1. On considère l'application Φ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{C}^0\big([0,1]\big) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \end{array}$$

Montrer que Φ est une application linéaire.

2. On considère l'application u définie par :

$$\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$$

Montrer que u est une application linéaire.

I.2. Propriétés des applications linéaires

Propriété

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire.

Alors :

1) $\boxed{f(0_E) \ = \ 0_F}$

2) $\boxed{\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)}$

3) $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,$

$$\boxed{f(\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \cdots + \lambda_n \cdot f(x_n)}$$

(compatibilité de f avec les combinaisons linéaires)

Démonstration.

1) Soit $x \in E$. Alors : $f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0_E$.

2) Soit $x \in E$. Alors : $f(-x) = f((-1) \cdot x) = (-1) \cdot f(x) = -f(x)$.

3) Par récurrence sur $n \geqslant 1$. □

Remarque

- Une application linéaire est aussi appelé un morphisme d'espaces vectoriels. En mathématiques, il existe d'autres structures que celle d'espace vectoriel. On peut notamment citer la structure de groupe : $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe appelé groupe linéaire d'ordre n.

  On parle de groupe car cet ensemble est muni d'une loi de composition interne (notée multiplicativement) $\times : GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ qui vérifie :

  a. *Associativité*

  $\forall (x, y, z) \in \big(GL_n(\mathbb{K})\big)^3,\ x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$

  b. *Existence* d'un élément neutre

  $\exists\ 1_{GL_n(\mathbb{K})} \in GL_n(\mathbb{K}), \forall x \in GL_n(\mathbb{K}),\ x \times 1_{GL_n(\mathbb{K})} = 1_{GL_n(\mathbb{K})} \times x = x$

  c. *Existence* d'un inverse pour tout élément

  $\forall x \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists y \in GL_n(\mathbb{K}),\ x \times y \ = \ y \times x \ = \ 1_{GL_n(\mathbb{K})}$

  Si la loi $\times$ est commutative, on dit que le groupe est commutatif (ou abélien). Ici, on est dans le cas d'une groupe **non** commutatif.

- Une application linéaire est un morphisme d'espaces vectoriels. C'est une application qui est « compatible » avec les lois $+$ et $\cdot$ définies par la notion d'espace vectoriel.
  De la même manière, un morphisme de groupes est une application qui est compatible avec la loi $\times$ définie par la notion de groupe. Plus précisément, si $(G_1, \times_1)$ et $(G_2, \times_2)$ sont des groupes, $\varphi : G_1 \to G_2$ est un morphisme de groupes si :

  (i) $\forall (x, y) \in G_1 \times G_2,\ \varphi(x \times_1 y) = \varphi(x) \times_2 \varphi(y)$

  (ii) $\varphi(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

- L'application $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes.

- Un intérêt de la notion de morphisme est le transport de structures. Plus précisément, lorsque $\varphi : E \to F$ est un morphisme de `STRUCTURE` (remplacer ce terme par espace vectoriel ou groupe ou par tout autre structure) :

H est une sous-`STRUCTURE` de E	$\Rightarrow$	$\varphi(H)$ (image directe) est une sous-`STRUCTURE` de F

G est une sous-`STRUCTURE` de F	$\Rightarrow$	$\varphi^{-1}(G)$ (image réciproque) est une sous-`STRUCTURE` de E

  En particulier, lorsque $\varphi : E \to F$ est une application linéaire (un morphisme d'espaces vectoriels), alors $\varphi(E) = \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\varphi^{-1}(\{0_F\}) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- En utilisant la propriété ***3)*** du théorème précédent, on obtient immédiatement qu'une application linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et concave. En ajoutant la contrainte $f(0) = 0$, on en déduit que les seules applications linéaires $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de la forme $f : x \to \lambda x$ (fonctions représentées par des droites passant par l'origine).

Proposition 1.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) H *est un sev de* $E \ \Rightarrow\ f(H)$ *est un sev de* F

2) G *est un sev de* $F \ \Rightarrow\ f^{-1}(G)$ *est un sev de* E

Démonstration.

1) Supposons que H est un sous-espace vectoriel de E.

- Tout d'abord, par définition de $f(H)$: $f(H) \subset F$.
- Ensuite : $f(H) \neq \varnothing$ car $0_F \in f(H)$. En effet :
  - × comme H est un sous-espace vectoriel de E, alors : $0_E \in H$.
  - × comme f est linéaire : $0_F = f(0_E)$.

  Ainsi, il existe $x \in H$ tel que : $0_F = f(x)$.
- Démontrons que $f(H)$ est stable par combinaison linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(y_1, y_2) \in \big(f(H)\big)^2$.
  - × Comme $y_1 \in f(H)$, alors il existe $x_1 \in H$ tel que : $y_1 = f(x_1)$.
  - × Comme $y_2 \in f(H)$, alors il existe $x_2 \in H$ tel que : $y_2 = f(x_2)$.

  On en déduit :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 &= \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \\ &= f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \qquad \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \end{aligned}$$

  Or, comme $(x_1, x_2) \in H^2$ et H est un espace vectoriel, alors : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in H$.
  On a bien démontré qu'il existe $u \in H$ tel que : $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 = f(u)$.
  On en déduit : $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in f(H)$.

2) Supposons que G est un sous-espace vectoriel de F.

- Tout d'abord, par définition de $f^{-1}(G)$: $f^{-1}(G) \subset E$.
- Ensuite : $f^{-1}(G) \neq \varnothing$ car $0_E \in f^{-1}(G)$. En effet :
  - × comme f est linéaire : $f(0_E) = 0_F$.
  - × de plus, comme G est un sous-espace vectoriel de F, alors : $0_F \in G$.

  Ainsi : $f(0_E) \in G$. D'où : $0_E \in f^{-1}(G)$.
- Démontrons que $f^{-1}(G)$ est stable par combinaison linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(x_1, x_2) \in \big(f^{-1}(G)\big)^2$.
  - × Comme $x_1 \in f^{-1}(G)$, alors : $f(x_1) \in G$.
  - × Comme $x_2 \in f^{-1}(G)$, alors : $f(x_2) \in G$.

  On en déduit, puisque f est linéaire :

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)$$

  Or, comme $\big(f(x_1), f(x_2)\big) \in G^2$ et G est un espace vectoriel, alors : $\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \in G$.
  On a bien démontré : $f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \in G$.
  On en déduit : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in f^{-1}(G)$.

□

I.3. Exemple fondamental

Théorème 2.

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Soit $h \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.

Alors, il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *telle que* h *s'écrit sous la forme :*

$$h : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

Démonstration.
Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
Notons $\mathscr{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$ la base canonique de $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Le vecteur X se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}_E$.
  Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ tel que :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_p \cdot e_p$$

Par application de la fonction h, linéaire, on obtient :

$$h(X) \;=\; x_1 \cdot h(e_1) + \;\ldots\; + x_p \cdot h(e_p)$$

Cette écriture met en avant une propriété des applications linéaires sur les ev de dimension finie : les valeurs $h(e_1)$, …, $h(e_p)$ permettent de déterminer la valeur de $h(X)$.
Ainsi, h est entièrement déterminée par l'image de la base $\mathscr{B}_E$.

- Notons alors :

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \qquad \ldots \qquad h(e_p) = \begin{pmatrix} m_{1p} \\ m_{2p} \\ \vdots \\ m_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

- Alors :

$$h(X) \;=\; \begin{pmatrix} m_{11}\, x_1 + \ldots + m_{1p}\, x_p \\ m_{21}\, x_1 + \ldots + m_{2p}\, x_p \\ \vdots \\ m_{n1}\, x_1 + \ldots + m_{np}\, x_p \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1p} \\ m_{21} & \ldots & m_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \ldots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \;=\; MX$$

où $M = (m_{ij})_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$ □

Remarque

- Ce théorème stipule que « les applications linéaires de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont les matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ».
- Cela peut être vu comme une bonne ou une mauvaise nouvelle :
  - × on peut être un peu déçu qu'il n'y ait que si peu d'applications linéaires de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On aurait pu espérer une plus grande richesse de construction.
  - × la relative simplicité de l'objet étudié est rassurante.

  On verra qu'il n'y a en réalité pas de raison d'être déçu car la notion d'applications linéaires permet des développements suffisamment riches.

II. Structure de l'ensemble des applications linéaires

II.1. L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$

Théorème 3.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- *L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est muni :*
  - × *d'une loi de composition interne, notée $+$*
    Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $v \in \mathscr{L}(E, F)$, $u + v$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$u + v : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) +_F v(x) \end{array}$$

  - × *d'une loi de composition externe, notée $\cdot$*
    Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot u$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$\lambda \cdot u : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & \lambda \cdot_F u(x) \end{array}$$

- *L'espace $\mathscr{L}(E, F)$ muni de $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel.*

II.2. Composition d'applications linéaires

II.2.a) Propriété de la loi $\circ$

Théorème 4.

Soient E, F, G et H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1) $\forall u \in \mathscr{L}(E),\ \ u \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ u = u.$

Par ailleurs, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on introduit la notation :

$$\begin{cases} u^0 = \mathrm{id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u^k \circ u\ (= u \circ u^k) \end{cases}$$

(La notation $u^2(x) = u(u(x))$ ne doit pas être confondue avec l'élévation au carré ! $u(x) \times u(x)$ n'a pas de sens dans le cadre d'espaces vectoriels)

2) $\forall u \in \mathscr{L}(E,F),\ \ \forall v \in \mathscr{L}(F,G),\ \ v \circ u \in \mathscr{L}(E,G).$

3) $\forall u \in \mathscr{L}(E,F),\ \ \forall v \in \mathscr{L}(F,G), \forall w \in \mathscr{L}(G,H),\ \ w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u.$

(associativité de la loi $\circ$)

II.2.b) Comportement de la loi $\circ$ vis à vis des lois $+$ et $\cdot$

Théorème 5.

Soient E, F, G et H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1) $\forall u \in \mathscr{L}(E,F),\ \ \forall (v_1,v_2) \in \big(\mathscr{L}(F,G)\big)^2,\ \ (v_1+v_2)\circ u\ =\ v_1 \circ u + v_2 \circ u.$

(distributivité à droite de la loi $\circ$ par rapport à la loi $+$)

2) $\forall (u_1,u_2) \in \big(\mathscr{L}(E,F)\big)^2,\ \ \forall v \in \mathscr{L}(F,G),\ \ v\circ(u_1+u_2)\ =\ v\circ u_1 + v \circ u_2.$

(distributivité à gauche de la loi $\circ$ par rapport à la loi $+$)

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \forall u \in \mathscr{L}(E,F),\ \ \forall v \in \mathscr{L}(F,G),\ \ v\circ(\lambda\cdot u) = (\lambda\cdot v)\circ u = \lambda\cdot(v\circ u).$

Remarque

- Si E est un espace vectoriel, on a vu que l'espace $\mathscr{L}(E)$ est naturellement muni des lois $+$, $\cdot$ qui en font un espace vectoriel.
- On voit de plus que $\mathscr{L}(E)$ est muni de la loi $\circ$ qui se comporte bien vis à vis des lois $+$ et $\cdot$. Ajouté aux lois $+$ et $\cdot$, la loi $\circ$ munit l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ d'une structure nommée **algèbre**. Cette algèbre est dite non commutative car la loi $\circ$ n'est pas commutative (si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$, on n'a pas nécessairement $u \circ v = v \circ u$).

Exercice

Soit E un espace vectoriel réel.
Soient u et v des endomorphismes de E tels que u et v commutent :

$$u \circ v = v \circ u$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel k, u^k et v commutent :

$$u^k \circ v = v \circ u^k$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

II.3. Notion d'isomorphisme, d'automorphisme

II.3.a) Définition

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application $u : E \to F$ est un **isomorphisme de E dans F** si :
  - ***(i)*** $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  - ***(ii)*** u est bijective.

  S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont isomorphes.
- Une application $u : E \to E$ est un **automorphisme de E** si :
  - ***(i)*** $u \in \mathscr{L}(E)$ (autrement dit, u est un endomorphisme de E).
  - ***(ii)*** u est bijective.

II.3.b) Application réciproque, cas général

Rappels sur les applications (pas forcément linéaires)

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soit $f : E \to F$ une application (pas nécessairement linéaire).

Rappelons que :

$$\begin{aligned} & f : E \to F \text{ est bijective} \\ \Leftrightarrow\ & f \text{ est injective et surjective} \\ \Leftrightarrow\ & \text{tout élément } y \in F \text{ admet un et un seul antécédent } x \in E \text{ par } f \\ \Leftrightarrow\ & \forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x) \end{aligned}$$

Définition

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soit $f : E \to F$ une application (pas nécessairement linéaire).

Supposons que f est bijective.

- On appelle **application réciproque de f** et on note $f^{-1} : F \to E$, l'application définie par :

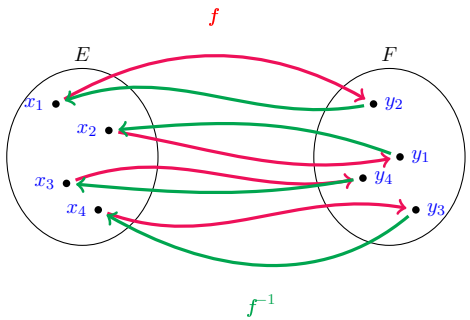
$$\begin{array}{rcccl} f^{-1} & : & F & \to & E \\ & & y & \mapsto & f^{-1}(y) : \text{l'unique antécédent} \\ & & & & \text{de } y \text{ par l'application } f \end{array}$$

- On en déduit immédiatement :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \boxed{y = f(x) \ \Leftrightarrow\ f^{-1}(y) = x}$$

Représentation graphique.

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application bijective.



- Une application $f : E \to F$ bijective établit une correspondance un à un entre des éléments de E vers les éléments de F.
- Son application réciproque f^{-1} établit la même correspondance mais dans l'autre sens : des éléments de F vers les éléments de E.

Exercice

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

1. a) Démontrer : $\left.\begin{array}{l} f \text{ est injective} \\ g \text{ est injective} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f : E \to G$ est injective

b) Démontrer : $g \circ f$ est injective $\Rightarrow$ f injective

2. a) Démontrer : $\left.\begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ g \text{ est surjective} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f : E \to G$ est surjective

b) Démontrer : $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ g surjective

Théorème 6.

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soit $f : E \to F$ une application bijective (pas nécessairement linéaire).

On note $f^{-1} : F \to E$ sa bijection réciproque.

1. *L'application f^{-1} est bijective et de réciproque f :* $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$

2. a) $\forall x \in E, \forall y \in F,$ $\boxed{y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$

b) $\boxed{\forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y}$

c) $\boxed{\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x}$

Démonstration.

1. Démontrons que l'application $f^{-1} : F \to E$ est bijective. Il s'agit de démontrer que tout élément $u \in E$ admet un unique antécédent par f^{-1}.

Soit $u \in E$. Notons $v = f(u)$. Cela équivaut à : $u = f^{-1}(v)$. Cette dernière égalité signifie, par définition, que v est un antécédent de u par f^{-1}.
Cet antécédent est forcément unique car, si $w = f^{-1}(v)$ alors $v = f(w)$ ce qui démontre, par injectivité de f : $u = w$.

2. a) C'est l'équivalence obtenue dès la définition de la notion de bijection réciproque.

b) Soit $y \in F$. Par définition, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par la fonction f.
Ainsi, en appliquant f à $f^{-1}(y)$, on obtient y.

c) Soit $x \in E$. Par définition, x est l'unique antécédent de $f(x)$ par la fonction f.
Autrement dit : $x = f^{-1}\big(f(x)\big)$. □

Théorème 7.

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \textit{Les applications } f \textit{ et } g \textit{ sont bijectives et} \\ \textit{réciproques l'une de l'autre :} \\ \qquad g = f^{-1} \quad \textit{et} \quad f = g^{-1} \end{array}}$$

Démonstration.

a. On sait que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Or id_E est une bijection de E dans E.
Donc $g \circ f$ est bijective. On en déduit que $g \circ f$ est notamment surjective.
Ainsi g est surjective.

De même, $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Or id_F est une bijection de F dans F.
Donc $f \circ g$ est bijective. On en déduit que $f \circ g$ est notamment injective.
Ainsi g est injective.

On en déduit que g est bijective.
On démontre de la même manière que f est bijective.

b. La réciproque de f est par définition l'application qui à $y \in F$ associe son unique antécédent par f.
Soit $y \in F$. Alors $f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{id}_F(y) = y$.
L'élément $g(y)$ est un antécédent de y par f.
Comme f est bijective, cet élément est unique. D'où $g(y) = f^{-1}(y)$.
Ainsi : $\forall y \in F,\ g(y) = f^{-1}(y)$. Autrement dit : $g = f^{-1}$. □

II.3.c) Application réciproque d'un isomorphisme

Théorème 8.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Supposons que u est un isomorphisme de E dans F.

Alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
(en particulier, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$)

Démonstration.

- L'application $u^{-1} : F \to E$ est bijective en tant que réciproque de l'application $u : E \to F$ qui est elle-même bijective.
- Il reste à démontre que $u^{-1} : F \to E$ est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in F^2$.
  L'application u étant surjective :
  - × il existe $x_1 \in E$ tel que : $y_1 = u(x_1)$.
    Ce qu'on peut aussi écrire : $x_1 = u^{-1}(y_1)$.
  - × il existe $x_2 \in E$ tel que : $y_2 = u(x_2)$.
    Ce qu'on peut aussi écrire : $x_2 = u^{-1}(y_2)$.

  On en déduit que :

$$\begin{aligned} u^{-1}(\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) &= u^{-1}\Big(\lambda_1 \cdot u(x_1) + \lambda_2 \cdot u(x_2)\Big) \\ &= u^{-1}\Big(u(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)\Big) \\ &= \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \\ &= \lambda_1 \cdot u^{-1}(y_1) + \lambda_2 \cdot u^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

  Ainsi, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$. □

Théorème 9.

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$.

Supposons que u et v sont des isomorphismes.

1) *Alors $v \circ u : E \to G$ est un isomorphisme de E.*
(on a notamment $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$)

2) *De plus :* $\boxed{(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}}$

Démonstration.

- L'application $v \circ u$ est linéaire ($v \circ u \in \mathscr{L}(E)$) en tant que composée de deux applications linéaires.
- Il reste à démontrer que $v \circ u$ est bijective.
  Pour ce faire, on applique le théorème 7 à $g = u^{-1} \circ v^{-1} : E \to E$ et $f = v \circ u : E \to E$. Vérifions que l'on est dans le cadre d'application de ce théorème.

$$\begin{aligned} g \circ f &= (u^{-1} \circ v^{-1}) \circ (v \circ u) \\ &= u^{-1} \circ (v^{-1} \circ v) \circ u \\ &= u^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ u \\ &= u^{-1} \circ u \\ &= \mathrm{id}_E \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f \circ g &= (v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v^{-1}) \\ &= v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1} \\ &= v \circ \mathrm{id}_F \circ v^{-1} \\ &= v \circ v^{-1} \\ &= \mathrm{id}_E \end{aligned}$$

  Ainsi f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. □

III. Noyau et image d'une application linéaire

III.1. Noyau d'une application linéaire

III.1.a) Définition

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- On appelle **noyau de** f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble :

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\mathrm{Ker}(f) & = & \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} \\ & = & \{machin \in E \mid f\big(machin\big) = 0_F\}\end{array}}$$

- En particulier, on retiendra, pour tout $x \in E$: $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f) \ \Leftrightarrow\ f(x) = 0_F}$

$$\forall machin \in E, \quad \boxed{machin \in \mathrm{Ker}(f) \ \Leftrightarrow\ f\big(machin\big) = 0_F}$$

Remarque

Par définition, $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\big(\{0_F\}\big)$, image réciproque de l'ensemble $\{0_F\}$ (attention, il ne s'agit en aucun cas de dire que f est bijective !). Si on en croit le résultat énoncé dans la remarque initiale du cours, on va pouvoir démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E (c'est bien le cas).

III.1.b) Structure du noyau d'une application linéaire

Théorème 10.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

On peut remarquer : $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0_F)$, ou passer par la définition.

1) $\mathrm{Ker}(f) \subseteq E$ par définition.

2) $\mathrm{Ker}(f) \neq \varnothing$ car $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$. En effet : $f(0_E) = 0_F$.

3) Stabilité de $\mathrm{Ker}(f)$ par combinaisons linéaires

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(x_1, x_2) \in (\mathrm{Ker}(f))^2$.

$$\begin{array}{rclcll} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) & + & \lambda_2 \cdot f(x_2) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot 0_F & + & \lambda_2 \cdot 0_F & \textit{(car } x_1 \in \mathrm{Ker}(f) \\ & & & & & \textit{et } x_2 \in \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \\ & = & 0_F & & & \end{array}$$

□

Exemple

Reprenons l'exemple fondamental.

- Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\begin{array}{rcl} f : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & MX \end{array}$.

  Alors $\mathrm{Ker}(f) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = 0\}$.
  Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des solutions du système homogène $MX = 0$.
  (n inconnues et p équation)

- Il faut savoir reconnaître les ensembles représentant des noyaux.

  Par exemple, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid x = 2y \text{ et } z = -y \right\} = \mathrm{Ker}(f)$ où l'application linéaire f est définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x - 2y \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

- L'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$ est un ev.

  En effet, c'est le noyau de l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_1(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & 3x_1 + 2x_2 - x_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

III.1.c) Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau

Théorème 11.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{\textit{L'application } f \textit{ injective} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}}$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons f injective. Démontrons que : $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.

($\supset$) Comme f linéaire, $f(0_E) = 0_F$.
Ce qui démontre que : $\operatorname{Ker}(f) \supset \{0_E\}$.

($\subset$) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Ainsi :

$$f(x) = 0_F = f(0_E)$$

L'application f étant injective, $x = 0_E$.
Ce qui démontre : $x \in \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Démontrons que f est injective.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

On a alors : $f(x) - f(y) = 0_F$, ce qui s'écrit :

$$f(x - y) = 0_F$$

Ainsi, $x - y \in \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$, d'où $x - y = 0_E$ et $x = y$. □

III.2. Image d'une application linéaire

III.2.a) Définition

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **image de** f et on note $\operatorname{Im}(f)$ l'ensemble :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\} \\ &= \{f(x) \in F \mid x \in E\} \\ &= \{f(\textit{truc}) \in F \mid \textit{truc} \in E\} \end{aligned}}$$

- En particulier, on retiendra, pour tout $y \in F$: $\boxed{y \in \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow y = f(\ldots)}$

$$\forall \textit{truc} \in F, \quad \boxed{\textit{truc} \in \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow \exists\, \textit{bidule} \in E, \textit{truc} = f\big(\textit{bidule}\big)}$$

III.2.b) Structure de l'image d'une application linéaire

Théorème 12.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

On peut remarquer : $\operatorname{Im}(f) = f(E)$ ou passer par la définition.

1) $\operatorname{Im}(f) \subseteq F$ par définition.

2) $\operatorname{Im}(f) \neq \varnothing$ car $0_F \in \operatorname{Im}(f)$. En effet : $0_F = f(0_E)$.

3) Stabilité de $\mathrm{Im}(f)$ par combinaisons linéaires
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in (\mathrm{Im}(f))^2$.
Ainsi, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que : $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 &= \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \\ &= f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \qquad \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in \mathrm{Im}(f)$. □

MÉTHODO **Démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel**

Pour démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on peut donc utiliser l'une des propriétés suivantes.

1) Revenir à la définition et vérifier tous les axiomes.
Long et pénible – à éviter.

2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel F d'un ev E.
Méthode classique (fonctionne toujours !) à connaître absolument.

3) Montrer que F s'écrit sous la forme : $F = \mathrm{Vect}\,(a_1, \ldots, a_m)$.
Plus élégant et rapide.

4) Montrer que F s'écrit sous la forme : $F = \mathrm{Ker}(f)$
où f est une application linéaire.
Plus élégant et rapide.

5) Montrer que F s'écrit sous la forme : $F = \mathrm{Im}(f)$
où f est une application linéaire.
Tout aussi élégant et rapide.

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Démontrer : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

2. *a)* Démontrer : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.
b) Démontrer : $\mathrm{Im}(f) \supset \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.

À RETENIR

Démontrer qu'un vecteur $y \in F$ est dans l'image de f, c'est l'écrire sous la forme :

$$y = f(\ldots)$$

Exemple

Reprenons l'exemple fondamental.

- Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$.
  Alors $\mathrm{Im}(f) = \{Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ Y = MX\}$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des seconds membres Y tels que le système $MX = Y$ admet une solution.
- Il faut savoir reconnaître les ensembles écrits comme des images.
  Par exemple, $F = \left\{ \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \right\} = \mathrm{Im}(f)$
  où l'application linéaire f est définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \\ & & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

III.2.c) Caractérisation de la surjectivité d'une application

Théorème 13.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{f \textit{ surjective} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F}$$

Démonstration.
On ne fait que rappeler ici le résultat obtenu dans le chapitre Ensembles et applications. □

IV. Applications linéaires en dimension finie

IV.1. Image d'une application linéaire en dimension finie

IV.1.a) Détermination pratique de l'image d'une application linéaire

Théorème 14.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) *L'application f est entièrement déterminée par sa valeur sur $\mathscr{B}$.*
Autrement dit, si l'on connaît la valeur de $f(e_1)$, ..., $f(e_p)$, on connaît la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in E$.

2) $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_p))}$

Démonstration.
Démonstration du point ***2)***.

($\subset$) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Le vecteur x se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}$. Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ tel que :

$$x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_p \cdot e_p$$

Ainsi, par linéarité de f :

$$y = f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \cdots + x_p \cdot f(e_p)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.

($\supset$) Soit $y \in \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_p))$. Il existe alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$y = \lambda_1 \cdot f(e_1) + \ldots + \lambda_p \cdot f(e_p) = f\Big(\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p\Big)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f)$.

□

IV.1.b) Caractérisation de l'injectivité / surjectivité / par image d'une famille libre / génératrice / base

Théorème 15.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$\Leftrightarrow$	*L'application f est injective* *L'image par f de toute famille libre finie de E est une famille (finie) libre de F.*

$\Leftrightarrow$	*L'application f est surjective* *L'image par f de toute famille génératrice finie de E est une famille (finie) génératrice de F.*

$\Leftrightarrow$	*L'application f est bijective* *L'image par f de toute base finie de E est une base (finie) de F.*

On déduit de ce dernier résultat :

$\dim(E) = \dim(F)$	$\Leftrightarrow$	*Il existe une application linéaire bijective entre E et F*

Exercice

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.
On note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.
Soit F un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

a) Démontrer que si f est injective alors : $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.

b) Démontrer que si f est surjective alors : $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.

c) Démontrer que si f est bijective alors : $\dim(E) = \dim(F)$.

IV.2. Rang d'une application linéaire

IV.2.a) Rang d'une famille de vecteur

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On note : $n = \dim(E)$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

On appelle **rang** de la famille $(e_1, \dots, e_p)$, noté $\mathrm{rg}((e_1, \dots, e_p))$ la dimension de $\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)$. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{rg}((e_1, \dots, e_p)) = \dim\left(\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)\right)}$$

Exemple

On considère la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ avec $u = (1, 3, -3)$, $v = (4, 2, -3)$ et $w = (-1, 7, -6)$.

1. Calculer $-3u + v + w$.

$$-3 \cdot u + v + w \;=\; -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$.

- La famille $\mathcal{F}$ est liée d'après la question précédente.
  La dimension de $\mathrm{Vect}\,(u, v, w)$ est donc au plus 2.
- De plus la famille (u, v) est libre, car les vecteurs u et v ne sont pas proportionnels.
  Donc la dimension de $\mathrm{Vect}\,(u, v, w)$ est au moins 2.

Finalement la dimension de $\mathrm{Vect}\,(u, v, w)$ est 2, *i.e.* le rang de la famille $\mathcal{F}$ est 2.

Proposition 2.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On note : $n = \dim(E)$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. $\boxed{\mathrm{rg}((e_1, \dots, e_p)) \leqslant p}$ *($p = \mathrm{Card}((e_1, \dots, e_p))$)*

2. $\boxed{\mathrm{rg}((e_1, \dots, e_p)) \leqslant n}$ *($n = \dim(E)$)*

Proposition 3.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On note : $n = \dim(E)$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. Soit $\lambda \neq 0$, $\boxed{\mathrm{rg}((e_1, \dots, e_i, \dots, e_p)) = \mathrm{rg}((e_1, \dots, \lambda \cdot e_i, \dots, e_p))}$.

2. Soit $\mu \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{rg}((e_1, \dots, e_i, \dots, e_p)) = \mathrm{rg}((e_1, \dots, e_i + \mu \cdot e_j, \dots, e_p))}$.

Proposition 4.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On note : $n = \dim(E)$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

$$\boxed{e_{r+1} = \dots = e_p = 0_E \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg}((e_1, \dots, e_p)) \leqslant r}$$

Exemples

1. On considère la famille (e_1) constituée d'un unique vecteur. Alors :
- × si $e_1 = 0_E$, alors $\mathrm{rg}((e_1)) = 0$
- × si $e_1 \neq 0_E$, alors $\mathrm{rg}((e_1)) = 1$

2. On considère la famille (e_1, e_2) constituée de 2 vecteurs. Alors :
- × si $e_1 = e_2 = 0_E$, alors $\mathrm{rg}((e_1, e_2)) = 0$.
- × si $e_1 \neq 0_E$ ou $e_2 \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $e_1 = \lambda \cdot e_2$ (*i.e.* si e_1 et e_2 sont colinéaires), alors $\mathrm{rg}((e_1, e_2)) = 1$.
- × si e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, alors $\mathrm{rg}((e_1, e_2)) = 2$.

3. On considère une famille $(e_1, \dots, e_p)$ de 3 vecteurs ou plus. Alors on simplifie la famille de vecteurs au maximum, grâce aux opérations des Propositions 3 et 4 et on utilise la définition du rang.

IV.2.b) Rang d'une matrice

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note C_1, …, C_p ses colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_p \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

On appelle **rang de la matrice** A, noté $\mathrm{rg}(A)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, \ldots, C_p))}$$

Proposition 5.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $\boxed{\mathrm{rg}(A) \leqslant p}$
2. $\boxed{\mathrm{rg}(A) \leqslant n}$
3. *Si A est une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, alors :* $\mathrm{rg}(A) = \min(n, p)$

Démonstration.
Toutes ces propriétés se démontrent en revenant à la définition du rang d'une matrice, puis rang d'une famille de vecteurs.. □

Théorème 16.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)}$$

Proposition 6.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. *En notant $C_1, \cdots, C_p$ les colonnes de A, alors :*
   - × $\forall \lambda \neq 0$, $\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} | & \cdots & | & \cdots & | \\ C_1 & \cdots & \lambda \cdot C_i & \cdots & C_p \\ | & \cdots & | & \cdots & | \end{pmatrix}\right)}$
   - × $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} | & \cdots & | & \cdots & | \\ C_1 & \cdots & C_i + \mu \cdot C_j & \cdots & C_p \\ | & \cdots & | & \cdots & | \end{pmatrix}\right)}$

   Donc les opérations élémentaires sur les colonnes laissent invariant $\mathrm{rg}(A)$.
2. *En notant $L_1, \cdots, L_n$ les lignes de A, alors :*
   - × $\forall \lambda \neq 0$, $\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} — & L_1 & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & \lambda \cdot L_i & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & L_n & — \end{pmatrix}\right)}$
   - × $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} — & L_1 & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & L_i + \mu \cdot L_j & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & L_n & — \end{pmatrix}\right)}$

   Donc les opérations élémentaires sur les lignes laissent invariant $\mathrm{rg}(A)$, *i.e.* **on peut déterminer** $\mathrm{rg}(A)$ **à l'aide du pivot de Gauss**.

Démonstration.

1. On revient à la définition de $\mathrm{rg}(A)$ et on applique la Proposition 3.
2. On applique le Théorème 16, puis on revient à la définition de $\mathrm{rg}({}^tA)$ et on applique la Proposition 3. □

Proposition 7.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. *Si A possède au plus r colonnes non nulles ($r \leqslant p$), alors* $\mathrm{rg}(A) \leqslant r$
2. *Si A possède au plus r lignes non nulles ($r \leqslant n$), alors* $\mathrm{rg}(A) \leqslant r$.

Exemples

1. Si $A \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors
   - × Si $A = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, alors $\mathrm{rg}(A) = 0$.
   - × Si $A \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, alors $\mathrm{rg}(A) = 1$
2. Si $A \in \mathscr{M}_{n,2}(\mathbb{K})$, alors
   - × Si $A = 0_{\mathscr{M}_{n,2}(\mathbb{K})}$, alors $\mathrm{rg}(A) = 0$.
   - × Si les 2 colonnes de A sont proportionnelles (et l'une des 2 est non nulle), alors $\mathrm{rg}(A) = 1$.
   - × Si les 2 colonnes de A ne sont pas proportionnelles, alors $\mathrm{rg}(A) = 2$.
3. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $p \geqslant 3$, alors on simplifie la matrice A par pivot de Gauss puis on revient à la définition du rang d'une matrice.

Remarque

On saura adapter les exemples précédents dans les cas $A \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, $A \in \mathscr{M}_{2,p}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 3$.

Exemples

Déterminer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Théorème 17.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\boxed{A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = n}$
2. $\boxed{A \text{ n'est pas inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) < n}$

IV.2.c) Rang d'une application linéaire

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle rang de l'application f et on note $\mathrm{rg}(f)$:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\,\mathrm{Im}(f)\,\big)$$

Remarque

Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) &= \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\ &= \dim\Big(\mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))\,\Big) \\ &= \mathrm{rg}\,\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big) \end{aligned}$$

IV.2.d) Théorème du rang

Théorème 18.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose E de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) *Le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Ker}(f)$ *admet un supplémentaire dans E qui est isomorphe à* $\mathrm{Im}(f)$. *Autrement dit :*

$$\boxed{\exists G \subset E,\ E = \mathrm{Ker}(f) \oplus G \quad \text{où} \quad \dim(G) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)}$$

(on a même : $f(G) = \mathrm{Im}(f)$)

2) *On en déduit :*

$$\boxed{\begin{aligned} \dim(E) &= \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\ &= \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \mathrm{rg}(f) \end{aligned}}$$

Démonstration.

- Comme $\left| \begin{array}{l} \times \ \mathrm{Ker}(f) \text{ sev de } E \\ \times \ E \text{ de dimension finie} \end{array} \right.$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un espace vectoriel de dimension finie notée r ($\leqslant \dim(E) = n$).
  On note alors $\mathscr{B}_K = \big(e_1, \ldots, e_r\big)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
  En particulier, $\big(e_1, \ldots, e_r\big)$ est une famille libre de E.
  On la complète en une base $\mathscr{B} = \big(e_1, \ldots, e_r, u_1, \ldots, u_{n-r}\big)$ de E.
- Démontrons alors que $\mathcal{F} = \Big(f(u_1), \ldots, f(u_{n-r})\Big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$:
  - × démontrons que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
    Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r}$.
    Supposons : $\lambda_1 \cdot f(u_1) + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot f(u_{n-r}) = 0_F$.
    Alors : $f\big(\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot u_{n-r}\big) = 0_F$.
    Ainsi, $\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot u_{n-r} \in \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)$.
    On en conclut qu'il existe $\big(\alpha_1, \ldots, \alpha_r\big) \in \mathbb{R}^r$ tel que :
    $$\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot u_{n-r} \ = \ \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_r \cdot e_r$$
    Autrement dit :
    $$\alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_r \cdot e_r \ - \ \lambda_1 \cdot u_1 - \ldots - \lambda_{n-r} \cdot u_{n-r} \ = \ 0_E$$
    Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, c'est en particulier une famille libre et on en conclut :
    $$\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$$
    Ainsi : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$ et $\mathcal{F}$ est une famille libre de E.
  - × démontrons que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
    Il suffit de remarquer que comme $\mathscr{B}$ est une base de E :
    $$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_r), f(u_1), \ldots, f(u_{n-r})) \\ & = & \mathrm{Vect}\,(0_F, \ldots, 0_F, f(u_1), \ldots, f(u_{n-r})) \\ & = & \mathrm{Vect}\,(f(u_1), \ldots, f(u_{n-r})) \\ & = & \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) \end{array}$$
- En notant $G = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_{n-r})$, on a démontré :
  - × $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus G$,
    (puisque $\mathscr{B} = \big(e_1, \ldots, e_r, u_1, \ldots, u_{n-r}\big)$ est une base de E).
  - × de plus :
    $$\begin{array}{rcll} \dim(G) & = & \mathrm{Card}\,\big(u_1, \ldots, u_{n-r}\big) & \\ & = & n - r & \\ & = & \mathrm{Card}\,\big(f(u_1), \ldots, f(u_{n-r})\big) & \\ & = & \dim\Big(\mathrm{Im}(f)\Big) & \textit{(car } \mathcal{F} \textit{ est une base de } \mathrm{Im}(f)\textit{)} \end{array}$$

□

Remarque

- Il faut bien lire ce théorème. En aucun cas il ne stipule que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires. Pour une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$, une telle affirmation n'a pas de sens. Si $\mathrm{Ker}(f)$ est bien un sous-espace vectoriel de E, $\mathrm{Im}(f)$ en revanche est un sous-espace vectoriel de F.
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Im}(f)$ est bien un sous-espace vectoriel de E.
  L'écriture $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ est alors parfois vérifiée. C'est le cas en particulier pour les projecteurs (applications qui vérifient $p \circ p = p$). On peut d'ailleurs caractériser les applications pour lesquelles cette décomposition est réalisée. On peut par exemple démontrer :
  $$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\,\big(f^2\big)$$

Exercice

L'application dérivée de $\mathbb{K}_3[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$.

b. Déterminer le noyau.

c. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(\Phi)$.

d. Vérifier que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{K}_2[X]$.

IV.2.e) Rang et composée

Proposition 8.

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)} \quad \textit{et} \quad \boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)}$$

Ce que l'on peut résumer en : $\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min\big(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\big)}$.

Démonstration.

- Démontrons : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$.
  - × On remarque : $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
    En effet, soit $z \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que :
    $$z \;=\; (g \circ f)(x) \;=\; g\big(f(x)\big)$$
    Ainsi : $z \in \mathrm{Im}(g)$.
  - × On sait : $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$. Donc : $\dim\big(\mathrm{Im}(g \circ f)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{Im}(g)\big)$.
    Ainsi :
    $$\mathrm{rg}(g \circ f) \;\leqslant\; \mathrm{rg}(g)$$
- Démontrons : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$.
  - × Par définition de l'image d'une application linéaire :
    $$\begin{aligned} \mathrm{Im}(g \circ f) &= (g \circ f)(E) \\ &= g\big(f(E)\big) \\ &= g\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\ &= g_{|\mathrm{Im}(f)}(\mathrm{Im}(f)) \\ &= \mathrm{Im}(g_{|\mathrm{Im}(f)}) \end{aligned}$$
  - × On sait que :
    - l'application $g_{|\mathrm{Im}(f)}$ est linéaire car g l'est,
    - l'ensemble E est de dimension finie.

    Ainsi, par théorème du rang :
    $$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) & = & \dim\big(\mathrm{Im}(g_{|\mathrm{Im}(f)})\big) & + & \dim\big(\mathrm{Ker}(g_{|\mathrm{Im}(f)})\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \mathrm{rg}(f) & & \dim\big(\mathrm{Im}(g \circ f)\big) & & \end{array}$$
    On en déduit :
    $$\mathrm{rg}(g \circ f) \;=\; \dim\big(\mathrm{Im}(g \circ f)\big) \;=\; \mathrm{rg}(f) - \dim\big(\mathrm{Ker}(g_{|\mathrm{Im}(f)})\big) \;\leqslant\; \mathrm{rg}(f)$$

□

Proposition 9. *(Invariance du rang par composition par un isomorphisme)*

Soient E, F, G et H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soit $f \in \mathscr{L}(F,G)$.

1) *Pour tout isomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$:* $\boxed{\mathrm{rg}(f \circ \varphi) = \mathrm{rg}(f)}$

2) *Pour tout isomorphisme $\psi \in \mathscr{L}(G,H)$:* $\boxed{\mathrm{rg}(\psi \circ f) = \mathrm{rg}(f)}$

Démonstration.

À faire. □

IV.2.f) Caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité par détermination du rang

Théorème 19.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- *f est injective* $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
- *f est surjective* $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Démonstration.
Application directe du théorème du rang. □

Théorème 20 (Caractérisation des isomorphismes)**.**

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{f \text{ est bijective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ est injective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ est surjective}}$$

$$\boxed{f \text{ est bijective} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}(f) = \dim(F)}$$

Dans ce cas, f est un isomorphisme de E vers F.

Exercice

1. L'application linéaire :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (c, a+d, b-c, c) \end{array} \right.$$

est-elle un isomorphisme ? un automorphisme ?

2. Notons $E = \mathbb{K}[X]$ et φ l'endomorphisme de E défini par $\varphi : P \mapsto XP(X)$.

a) Démontrer que φ est injective.

b) L'application φ est-elle surjective ?

IV.3. Formes linéaires et hyperplans

Rappel

- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de dimension $\dim(E) - 1$.
- De manière générale, on appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de codimension 1. Autrement dit, F est un hyperplan de E si :
  - × F est un sous-espace vectoriel de E,
  - × il existe G, sous-espace vectoriel de E **de dimension** 1, tel que :

$$E = F \oplus G$$

(ou encore s'il existe $u \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = F \oplus \mathrm{Vect}\,(u)$)

IV.3.a) Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie.

- Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

IV.3.b) Caractérisation des hyperplans de E en dimension finie

Théorème 21.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\boxed{\begin{array}{r} H \text{ est un} \\ \text{hyperplan de } E \end{array} \;\Leftrightarrow\; \exists \varphi \in \big(\mathscr{L}(E, \mathbb{K})\big) \setminus \{0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}\},\ H = \mathrm{Ker}(\varphi)}$

2. *Soient $\varphi_1 \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et $\varphi_2 \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ deux formes linéaires.*
On suppose que ces formes linéaires sont non nulles.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{K}^*,\ \varphi_1 = a \cdot \varphi_2}$$

(autrement dit, deux formes linéaires définissent le même hyperplan ssi elles sont colinéaires)

Démonstration.

1. ($\Rightarrow$) Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H.
C'est une famille libre de H et donc de E, que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ de E. Notons alors $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ la forme linéaire définie par :

$$\varphi(e_1) = 0, \ldots, \varphi(e_{n-1}) = 0, \varphi(e_n) = 1$$

Alors : $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{n-1}) = H$.

($\Leftarrow$) Le théorème du rang montre que le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E est un hyperplan de E.

2. ($\Rightarrow$) On suppose $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$. Comme φ_1 est une forme linéaire non nulle, alors $\mathrm{Ker}(\varphi_1)$ est un hyperplan de E. C'est donc un espace vectoriel de dimension $n-1$ dont on note $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base. On complète cette famille $\mathcal{F}$ en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ de E. Par hypothèse :

$$\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{n-1}) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$$

Ainsi, pour $i \in \{1, 2\}$: $\varphi_i(e_1) = \ldots = \varphi(e_{n-1}) = 0$.
Comme les deux formes linéaires sont non nulles, alors il existe $c \neq 0$ et $d \neq 0$ tels que : $\varphi_1(e_n) = c$ et $\varphi_2(e_n) = d$. On a alors : $\varphi_1 = \frac{c}{d} \cdot \varphi_2$.

($\Leftarrow$) Sens clair. □

IV.3.c) Équations d'un hyperplan dans une base

Théorème 22.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}$ une base de E.

1. *Les hyperplans de E sont les parties de E définies par une équation linéaire non nulle sur les coordonnées des vecteurs de E dans la base $\mathscr{B}$.*

Autrement dit, pour tout hyperplan H de E, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, un n-uplet différent de $(0, \ldots, 0)$ tel que :

$$H = \left\{ x \in E \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n \ = \ 0 \text{ où } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K} \\ \text{sont les coordonnées de } x \text{ dans la base } \mathscr{B} \end{array} \right\}$$

2. *Deux telles équations définissent le même hyperplan ssi elles sont proportionnelles.*

Démonstration.
C'est l'interprétation matricielle du corollaire précédent. □

Exemple

1. L'ensemble $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. Il s'écrit naturellement comme le noyau de la forme linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_1 + x_2 + x_3 \end{array}$$

2. $\mathscr{S}_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \mid a_{1,2} = a_{2,1} \right\} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ & & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} & \mapsto & a_{1,2} - a_{2,1} \end{array}$$

3. $\mathbb{K}_{n-1}[X] = \{a_1 P_0 + \ldots + a_n P_n \mid a_n = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque

- L'ensemble :

$$\mathscr{S}_3(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \mid a_{1,2} = a_{2,1} \text{ et } a_{1,3} = a_{3,1} \text{ et } a_{2,3} = a_{3,2} \right\}$$

  `N'`est `PAS` un hyperplan de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.
  Ce sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ s'écrit comme intersection de trois hyperplans :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_3(\mathbb{K}) \quad = \quad & \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid a_{1,2} = a_{2,1} \right\} \\ \cap \quad & \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid a_{1,3} = a_{3,1} \right\} \\ \cap \quad & \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid a_{2,3} = a_{3,2} \right\} \end{aligned}$$

  C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ de dimension $9 - 3 = 6$.

- De manière générale, si :
  - × E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
  - × F un sous-espace vectoriel de E défini par un système de $k \in [\![1, n]\!]$ équations linéaires sur les coordonnées des vecteurs de E dans $\mathscr{B}$,

  alors : $\dim(F) = \dim(E) - \left(\begin{array}{l} \text{nombre d'équations linéairement} \\ \text{indépendantes} \end{array} \right)$

- En particulier, si φ_1, ..., φ_k, sont des vecteurs linéairement indépendants de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$:

$$F \;=\; \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_k)$$

  alors : $\dim(F) = \dim(E) - k$.

IV.4. Détermination d'une application linéaire en dimension finie

Proposition 10.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Supposons que E est de dimension finie n. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ une de ses bases.

Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f_i \;=\; \varphi(e_i)$$

Remarque

On pourra retenir cette proposition sous la forme suivante :

> Une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de E.

Proposition 11.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E vérifiant : $E = E_1 \oplus E_2$.

Soit $\varphi_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$. Soit $\varphi_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.

Il existe une unique application $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ coïncidant avec φ_1 sur E_1 et avec φ_2 sur E_2.

Démonstration.
À faire. □

V. Projecteurs et symétrie

V.1. Définitions

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ($E = F \oplus G$).

Ainsi, tout élément $x \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de E et d'un élément de F.

On note alors $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs tel que $x = x_F + x_G$.

1) On appelle alors projection sur F parallèlement à G, l'endomorphisme p :

$$\begin{array}{rcccl} p & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & x_F \end{array}$$

2) On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'endomorphisme s :

$$\begin{array}{rcccl} s & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$$

V.2. Caractérisation des projecteurs et symétries

Théorème 23.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Propriété caractéristique

1)
$$\boxed{\begin{array}{rcl} p \text{ est un projecteur de } E & \Leftrightarrow & p \circ p = p \\ & \Leftrightarrow & E = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(p) \end{array}}$$

Dans ce cas, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

2)
$$\boxed{\begin{array}{rcl} s \text{ est une symétrie de } E & \Leftrightarrow & s \circ s = \mathrm{id}_E \\ & \Leftrightarrow & E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \end{array}}$$

Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Proposition 12.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$.

$$p \text{ projecteur} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(p)$$

Si p est un projecteur, on obtient donc en particulier : $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

VI. Sous-espace stable par un endomorphisme

VI.1. Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que F est **stable** (ou **stabilisé**) par f si $f(F) \subset F$.
  Autrement dit : $\boxed{F \text{ est stable par } f \;\Leftrightarrow\; \forall x \in F,\ f(x) \in F}$.
- Si f stabilise F, la restriction de f à F est à valeurs dans F.
  On appelle alors **endomorphisme induit** par f sur F la restriction de f à F au départ et à l'arrivée. Plus précisément, il s'agit de l'application :

$$\begin{array}{rcccc} f\|_F & : & F & \to & F \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple

1. La dérivation $P \mapsto P'$ dans $\mathbb{R}[X]$ stabilise tous les sous-espaces $\mathbb{R}_n[X]$, où $n \in \mathbb{N}$. Ce n'est pas le cas de la multiplication $P \mapsto QP$ par un polynôme Q de degré $\geqslant 1$.
2. La transposition $M \mapsto {}^tM$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ stabilise les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, mais pas les sous-espaces $\mathcal{T}_n^{\pm}(\mathbb{K})$.

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit p un projecteur de E.

On note $\mathcal{C}(p) = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ p = p \circ f\}$ le *commutant* de p.

1. Montrer : $f \in \mathcal{C}(p) \Leftrightarrow f$ stabilise $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.
2. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(p)$ lorsque E est de dimension finie.

VI.2. Quelques sous-espaces stables en général

Théorème 24.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$.

Sous-espaces stables d'un endomorphisme

1) Les sous-espaces $\{0_E\}$, E, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par f.

2) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$\boxed{\mathrm{Ker}\big(P(f)\big) \text{ et } \mathrm{Im}\big(P(f)\big) \text{ sont stables par } f}$$

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\boxed{\mathrm{Ker}\big(f - \lambda\,\mathrm{id}_E\big) \text{ est stable par } f}$

Stabilité de l'ensemble des endomorphismes qui stabilisent un sous-espace de E

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

F est stable par f et g	$\Rightarrow$	• $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, *$F$ est stable par $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$* • *$F$ est stable par $f \circ g$ et $g \circ f$*

Sous-espaces stables de deux endomorphismes qui commutent

Les endomorphismes f et g commutent	$\Rightarrow$	• $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont stables par g* • $\mathrm{Ker}(g)$ *et* $\mathrm{Im}(g)$ *sont stables par f*

Exemple
Soit $f \in (E)$.

1. Soit $v \in E$ non nul.
   La droite $\mathrm{Vect}\,(v)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.
2. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle.
   L'hyperplan $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.