# CH XVII : Applications linéaires - Endomorphismes et matrices carrées

## I. Notion d'application linéaire

### I.1. Définition

**Définition**

Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si :

$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
*(l'image d'une somme est la somme des images)*

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E^2,\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$
*(l'image d'une multiplication par un scalaire est la multiplication scalaire de l'image)*

- L'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ est noté $\mathscr{L}(E,F)$.
- Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathscr{L}(E)$.
  Une application linéaire de $E$ dans $E$ est appelée **endomorphisme** de $E$.

**Théorème 1** (Caractérisation des applications linéaires)**.**

*Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

*L'application $f : E \to F$ est linéaire*

$\Leftrightarrow\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$

$\Leftrightarrow\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$

$\Leftrightarrow\ \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2,\ f(x + \mu \cdot y) = f(x) + \mu \cdot f(y)$

*(éviter ces 2 dernières caractérisations qui introduisent une dissymétrie de traitement des vecteurs $x$ et $y$ et masquent la notion de CL)*

**Exercice**

***1.*** On considère l'application $\Phi$ définie par :

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0\big([0,1]\big) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \end{array}$$

Montrer que $\Phi$ est une application linéaire.

***2.*** On considère l'application $u$ définie par :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Montrer que $u$ est une application linéaire.

### I.2. Propriétés des applications linéaires

**Propriété**

Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire.

Alors :

***1)*** $\boxed{f(0_E) \ = \ 0_F}$

***2)*** $\boxed{\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)}$

***3)*** $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$

$$\boxed{f(\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(x_n)}$$

*(compatibilité de $f$ avec les combinaisons linéaires)*

*Démonstration.*

***1)*** Soit $x \in E$. Alors : $f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0_E$.

***2)*** Soit $x \in E$. Alors : $f(-x) = f((-1) \cdot x) = (-1) \cdot f(x) = -f(x)$.

***3)*** Par récurrence sur $n \geqslant 1$. □

**Remarque**

- Une application linéaire est aussi appelé un morphisme d'espaces vectoriels. En mathématiques, il existe d'autres structures que celle d'espace vectoriel. On peut notamment citer la structure de groupe : $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe appelé groupe linéaire d'ordre $n$.

  On parle de groupe car cet ensemble est muni d'une loi de composition interne (notée multiplicativement) $\times : GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ qui vérifie :

  ***a.*** *Associativité*
  $\forall (x, y, z) \in \big(GL_n(\mathbb{K})\big)^3,\ x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$

  ***b.*** *Existence* d'un élément neutre
  $\exists\ 1_{GL_n(\mathbb{K})} \in GL_n(\mathbb{K}), \forall x \in GL_n(\mathbb{K}),\ x \times 1_{GL_n(\mathbb{K})} = 1_{GL_n(\mathbb{K})} \times x = x$

  ***c.*** *Existence* d'un inverse pour tout élément
  $\forall x \in GL_n(\mathbb{K}), \exists y \in GL_n(\mathbb{K}), x \times y = y \times x = 1_{GL_n(\mathbb{K})}$

  Si la loi $\times$ est commutative, on dit que le groupe est commutatif (ou abélien). Ici, on est dans le cas d'une groupe **non** commutatif.

- Une application linéaire est un morphisme d'espaces vectoriels. C'est une application qui est « compatible » avec les lois $+$ et $\cdot$ définies par la notion d'espace vectoriel.
  De la même manière, un morphisme de groupes est une application qui est compatible avec la loi $\times$ définie par la notion de groupe. Plus précisément, si $(G_1, \times_1)$ et $(G_2, \times_2)$ sont des groupes, $\varphi : G_1 \to G_2$ est un morphisme de groupes si :

  ***(i)*** $\forall (x, y) \in G_1 \times G_2,\ \varphi(x \times_1 y) = \varphi(x) \times_2 \varphi(y)$

  ***(ii)*** $\varphi(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

- L'application $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes.

- Un intérêt de la notion de morphisme est le transport de structures. Plus précisément, lorsque $\varphi : E \to F$ est un morphisme de `STRUCTURE` (remplacer ce terme par espace vectoriel ou groupe ou par tout autre structure) :

  | | | |
  |---|---|---|
  | $H$ est une sous-`STRUCTURE` de $E$ | $\Rightarrow$ | $\varphi(H)$ (image directe) est une sous-`STRUCTURE` de $F$ |

  | | | |
  |---|---|---|
  | $G$ est une sous-`STRUCTURE` de $F$ | $\Rightarrow$ | $\varphi^{-1}(G)$ (image réciproque) est une sous-`STRUCTURE` de $E$ |

  En particulier, lorsque $\varphi : E \to F$ est une application linéaire (un morphisme d'espaces vectoriels), alors $\varphi(E) = \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\varphi^{-1}(\{0_F\}) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- En utilisant la propriété ***3)*** du théorème précédent, on obtient immédiatement qu'une application linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et concave. En ajoutant la contrainte $f(0) = 0$, on en déduit que les seules applications linéaires $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de la forme $f : x \to \lambda x$ (fonctions représentées par des droites passant par l'origine).

**Proposition 1.**

*Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
*Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*

***1)*** $\boxed{H \text{ est un sev de } E \ \Rightarrow\ f(H) \text{ est un sev de } F}$

***2)*** $\boxed{G \text{ est un sev de } F \ \Rightarrow\ f^{-1}(G) \text{ est un sev de } E}$

*Démonstration.*

***1)*** Supposons que $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

- Tout d'abord, par définition de $f(H)$ : $f(H) \subset F$.
- Ensuite : $f(H) \neq \varnothing$ car $0_F \in f(H)$. En effet :
  - $\times$ comme $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors : $0_E \in H$.
  - $\times$ comme $f$ est linéaire : $0_F = f(0_E)$.

  Ainsi, il existe $x \in H$ tel que : $0_F = f(x)$.
- Démontrons que $f(H)$ est stable par combinaison linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(y_1, y_2) \in \big(f(H)\big)^2$.
  - $\times$ Comme $y_1 \in f(H)$, alors il existe $x_1 \in H$ tel que : $y_1 = f(x_1)$.
  - $\times$ Comme $y_2 \in f(H)$, alors il existe $x_2 \in H$ tel que : $y_2 = f(x_2)$.

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) & \\ & = & f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \end{array}$$

  Or, comme $(x_1, x_2) \in H^2$ et $H$ est un espace vectoriel, alors : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in H$.
  On a bien démontré qu'il existe $u \in H$ tel que : $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 = f(u)$.
  On en déduit : $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in f(H)$.

***2)*** Supposons que $G$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

- Tout d'abord, par définition de $f^{-1}(G)$ : $f^{-1}(G) \subset E$.
- Ensuite : $f^{-1}(G) \neq \varnothing$ car $0_E \in f^{-1}(G)$. En effet :
  - $\times$ comme $f$ est linéaire : $f(0_E) = 0_F$.
  - $\times$ de plus, comme $G$ est un sous-espace vectoriel de $F$, alors : $0_F \in G$.

  Ainsi : $f(0_E) \in G$. D'où : $0_E \in f^{-1}(G)$.
- Démontrons que $f^{-1}(G)$ est stable par combinaison linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(x_1, x_2) \in \big(f^{-1}(G)\big)^2$.
  - $\times$ Comme $x_1 \in f^{-1}(G)$, alors : $f(x_1) \in G$.
  - $\times$ Comme $x_2 \in f^{-1}(G)$, alors : $f(x_2) \in G$.

  On en déduit, puisque $f$ est linéaire :

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \quad = \quad \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)$$

  Or, comme $\big(f(x_1), f(x_2)\big) \in G^2$ et $G$ est un espace vectoriel, alors : $\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \in G$.
  On a bien démontré : $f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \in G$.
  On en déduit : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in f^{-1}(G)$.

□

## I.3. Exemple fondamental

**Théorème 2.**

*Soient* $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
*Soit* $h \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.
*Alors, il existe une matrice* $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *telle que* $h$ *s'écrit sous la forme :*

$$h \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

*Démonstration.*
Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
Notons $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ la base canonique de $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Le vecteur $X$ se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}_E$.
  Autrement dit, il existe un unique $p$-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ tel que :

$$X \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \ = \ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ + \ \dots \ + x_p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ = \ x_1 \cdot e_1 + \ \dots \ + x_p \cdot e_p$$

Par application de la fonction $h$, linéaire, on obtient :

$$h(X) \ = \ x_1 \cdot h(e_1) + \ \ldots \ + x_p \cdot h(e_p)$$

*Cette écriture met en avant une propriété des applications linéaires sur les ev de dimension finie : les valeurs $h(e_1)$, ..., $h(e_p)$ permettente de déterminer la valeur de $h(X)$.*
*Ainsi, $h$ est entièrement déterminée par l'image de la base $\mathscr{B}_E$.*

- Notons alors :

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \qquad \ldots \qquad h(e_p) = \begin{pmatrix} m_{1p} \\ m_{2p} \\ \vdots \\ m_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

- Alors :

$$h(X) \ = \ \begin{pmatrix} m_{11}\ x_1 + \ldots + m_{1p}\ x_p \\ m_{21}\ x_1 + \ldots + m_{2p}\ x_p \\ \vdots \\ m_{n1}\ x_1 + \ldots + m_{np}\ x_p \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1p} \\ m_{21} & \ldots & m_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \ldots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \ = \ MX$$

où $M = (m_{ij})_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$ □

**Remarque**

- Ce théorème stipule que « les applications linéaires de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont les matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ».
- Cela peut être vu comme une bonne ou une mauvaise nouvelle :
  - × on peut être un peu déçu qu'il n'y ait que si peu d'applications linéaires de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On aurait pu espérer une plus grande richesse de construction.
  - × la relative simplicité de l'objet étudié est rassurante.

  On verra qu'il n'y a en réalité pas de raison d'être déçu car la notion d'applications linéaires permet des développements suffisamment riches.

# II. Structure de l'ensemble des applications linéaires

## II.1. L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$

**Théorème 3.**

*Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

- *L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires de $E$ dans $F$ est muni :*
  - × *d'une loi de composition interne, notée $+$*
    *Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $v \in \mathscr{L}(E, F)$, $u + v$ est l'application linéaire de $E$ dans $F$ définie par :*

$$u + v : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) +_F v(x) \end{array}$$

  - × *d'une loi de composition externe, notée $\cdot$*
    *Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot u$ est l'application linéaire de $E$ dans $F$ définie par :*

$$\lambda \cdot u : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & \lambda \cdot_F u(x) \end{array}$$

- *L'espace $\mathscr{L}(E, F)$ muni de $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel.*

## II.2. Composition d'applications linéaires

### II.2.a) Propriété de la loi $\circ$

**Théorème 4.**

*Soient $E$, $F$, $G$ et $H$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

***1)*** $\forall u \in \mathscr{L}(E), \quad u \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ u = u$.

*Par ailleurs, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on introduit la notation :*

$$\begin{cases} u^0 = \mathrm{id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N}, \ u^{k+1} = u^k \circ u \ (= u \circ u^k) \end{cases}$$

*(La notation $u^2(x) = u(u(x))$ ne doit pas être confondue avec l'élévation au carré ! $u(x) \times u(x)$ n'a pas de sens dans le cadre d'espaces vectoriels)*

***2)*** $\forall u \in \mathscr{L}(E,F), \ \forall v \in \mathscr{L}(F,G), \ v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

***3)*** $\forall u \in \mathscr{L}(E,F), \ \forall v \in \mathscr{L}(F,G), \forall w \in \mathscr{L}(G,H), \ w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$.
*(associativité de la loi $\circ$)*

### II.2.b) Comportement de la loi $\circ$ vis à vis des lois $+$ et $\cdot$

**Théorème 5.**

*Soient $E$, $F$, $G$ et $H$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

***1)*** $\forall u \in \mathscr{L}(E,F), \ \forall (v_1, v_2) \in \big(\mathscr{L}(F,G)\big)^2, \ (v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u$.
*(distributivité à droite de la loi $\circ$ par rapport à la loi $+$)*

***2)*** $\forall (u_1, u_2) \in \big(\mathscr{L}(E,F)\big)^2, \ \forall v \in \mathscr{L}(F,G), \ v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$.
*(distributivité à gauche de la loi $\circ$ par rapport à la loi $+$)*

***3)*** $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall u \in \mathscr{L}(E,F), \ \forall v \in \mathscr{L}(F,G), \ v \circ (\lambda \cdot u) = (\lambda \cdot v) \circ u = \lambda \cdot (v \circ u)$.

**Remarque**

- Si $E$ est un espace vectoriel, on a vu que l'espace $\mathscr{L}(E)$ est naturellement muni des lois $+$, $\cdot$ qui en font un espace vectoriel.
- On voit de plus que $\mathscr{L}(E)$ est muni de la loi $\circ$ qui se comporte bien vis à vis des lois $+$ et $\cdot$. Ajouté aux lois $+$ et $\cdot$, la loi $\circ$ munit l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ d'une structure nommée **algèbre**. Cette algèbre est dite non commutative car la loi $\circ$ n'est pas commutative (si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$, on n'a pas nécessairement $u \circ v = v \circ u$).

**Exercice**
Soit $E$ un espace vectoriel réel.
Soient $u$ et $v$ des endomorphismes de $E$ tels que $u$ et $v$ commutent :

$$u \circ v = v \circ u$$

***1.*** Montrer que, pour tout entier naturel $k$, $u^k$ et $v$ commutent :

$$u^k \circ v = v \circ u^k$$

***2.*** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

## II.3. Notion d'isomorphisme, d'automorphisme

### II.3.a) Définition

**Définition**

Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application $u : E \to F$ est un **isomorphisme de** $E$ **dans** $F$ si :
  - *(i)* $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  - *(ii)* $u$ est bijective.

  S'il existe un isomorphisme de $E$ dans $F$, on dit que $E$ et $F$ sont isomorphes.
- Une application $u : E \to E$ est un **automorphisme de** $E$ si :
  - *(i)* $u \in \mathscr{L}(E)$ (autrement dit, $u$ est un endomorphisme de $E$).
  - *(ii)* $u$ est bijective.

### II.3.b) Application réciproque, cas général

**Rappels sur les applications (pas forcément linéaires)**

Soient $E$ et $F$ des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soit $f : E \to F$ une application (pas nécessairement linéaire).

Rappelons que :

$$\begin{aligned} & f : E \to F \text{ est bijective} \\ \Leftrightarrow\ & f \text{ est injective et surjective} \\ \Leftrightarrow\ & \text{tout élément } y \in F \text{ admet un et un seul antécédent } x \in E \text{ par } f \\ \Leftrightarrow\ & \forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x) \end{aligned}$$

**Définition**

Soient $E$ et $F$ des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soit $f : E \to F$ une application (pas nécessairement linéaire).

Supposons que $f$ est bijective.

- On appelle **application réciproque de** $f$ et on note $f^{-1} : F \to E$, l'application définie par :

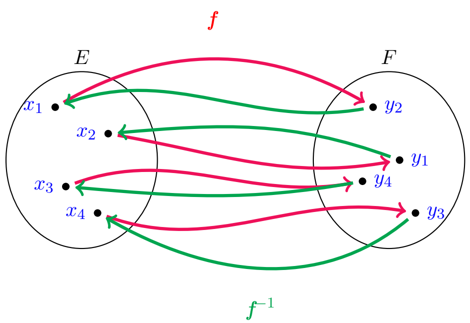
$$f^{-1} : \begin{array}{ccl} F & \to & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) : \text{l'unique antécédent} \\ & & \text{de } y \text{ par l'application } f \end{array}$$

- On en déduit immédiatement :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \boxed{y = f(x) \ \Leftrightarrow\ f^{-1}(y) = x}$$

**Représentation graphique.**

Soient $E$, $F$ des ensembles et $f : E \to F$ une application bijective.




- Une application $f : E \to F$ bijective établit une correspondance un à un entre des éléments de $E$ vers les éléments de $F$.
- Son application réciproque $f^{-1}$ établit la même correspondance mais dans l'autre sens : des éléments de $F$ vers les éléments de $E$.

**Exercice**

Soient $E$, $F$, $G$ des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

**1.** ***a)*** Démontrer : $\left.\begin{array}{l} f \text{ est injective} \\ g \text{ est injective} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f : E \to G \text{ est injective}$

***b)*** Démontrer : $g \circ f$ est injective $\Rightarrow$ $f$ injective

**2.** ***a)*** Démontrer : $\left.\begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ g \text{ est surjective} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f : E \to G \text{ est surjective}$

***b)*** Démontrer : $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ $g$ surjective

**Théorème 6.**

*Soient $E$ et $F$ des ensembles (pas nécessairement des ev).*

*Soit $f : E \to F$ une application bijective (pas nécessairement linéaire).*

*On note $f^{-1} : F \to E$ sa bijection réciproque.*

**1.** *L'application $f^{-1}$ est bijective et de réciproque $f$ :* $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$

**2.** ***a)*** $\forall x \in E, \forall y \in F,$ $\boxed{y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$

***b)*** $\boxed{\forall y \in F, \ f(f^{-1}(y)) = y}$

***c)*** $\boxed{\forall x \in E, \ f^{-1}(f(x)) = x}$

*Démonstration.*

**1.** Démontrons que l'application $f^{-1} : F \to E$ est bijective. Il s'agit de démontrer que tout élément $u \in E$ admet un unique antécédent par $f^{-1}$.
Soit $u \in E$. Notons $v = f(u)$. Cela équivaut à : $u = f^{-1}(v)$. Cette dernière égalité signifie, par définition, que $v$ est un antécédent de $u$ par $f^{-1}$.
Cet antécédent est forcément unique car, si $w = f^{-1}(v)$ alors $v = f(w)$ ce qui démontre, par injectivité de $f$ : $u = w$.

**2.** ***a)*** C'est l'équivalence obtenue dès la définition de la notion de bijection réciproque.

***b)*** Soit $y \in F$. Par définition, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de $y$ par la fonction $f$.
Ainsi, en appliquant $f$ à $f^{-1}(y)$, on obtient $y$.

***c)*** Soit $x \in E$. Par définition, $x$ est l'unique antécédent de $f(x)$ par la fonction $f$.
Autrement dit : $x = f^{-1}\big(f(x)\big)$. □

**Théorème 7.**

*Soient $E$ et $F$ des ensembles (pas nécessairement des ev).*

*Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \textit{Les applications } f \textit{ et } g \textit{ sont bijectives et} \\ \textit{réciproques l'une de l'autre :} \\ \qquad g = f^{-1} \quad \textit{et} \quad f = g^{-1} \end{array}}$$

*Démonstration.*

**a.** On sait que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Or $\mathrm{id}_E$ est une bijection de $E$ dans $E$.
Donc $g \circ f$ est bijective. On en déduit que $g \circ f$ est notamment surjective.
Ainsi $g$ est surjective.

De même, $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Or $\mathrm{id}_F$ est une bijection de $F$ dans $F$.
Donc $f \circ g$ est bijective. On en déduit que $f \circ g$ est notamment injective.
Ainsi $g$ est injective.

On en déduit que $g$ est bijective.
On démontre de la même manière que $f$ est bijective.

**b.** La réciproque de $f$ est par définition l'application qui à $y \in F$ associe son unique antécédent par $f$.
Soit $y \in F$. Alors $f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{id}_F(y) = y$.
L'élément $g(y)$ est un antécédent de $y$ par $f$.
Comme $f$ est bijective, cet élément est unique. D'où $g(y) = f^{-1}(y)$.
Ainsi : $\forall y \in F, \ g(y) = f^{-1}(y)$. Autrement dit : $g = f^{-1}$. □

### II.3.c) Application réciproque d'un isomorphisme

**Théorème 8.**

*Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

*Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.*

*Supposons que $u$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$.*

*Alors l'application réciproque $u^{-1}$ est un isomorphisme de $F$ dans $E$.*
*(en particulier, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$)*

*Démonstration.*

- L'application $u^{-1} : F \to E$ est bijective en tant que réciproque de l'application $u : E \to F$ qui est elle-même bijective.
- Il reste à démontre que $u^{-1} : F \to E$ est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in F^2$.
  L'application $u$ étant surjective :
  × il existe $x_1 \in E$ tel que : $y_1 = u(x_1)$.
  Ce qu'on peut aussi écrire : $x_1 = u^{-1}(y_1)$.
  × il existe $x_2 \in E$ tel que : $y_2 = u(x_2)$.
  Ce qu'on peut aussi écrire : $x_2 = u^{-1}(y_2)$.

  On en déduit que :

$$\begin{aligned} u^{-1}(\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) &= u^{-1}\Big(\lambda_1 \cdot u(x_1) + \lambda_2 \cdot u(x_2)\Big) \\ &= u^{-1}\Big(u(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)\Big) \\ &= \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \\ &= \lambda_1 \cdot u^{-1}(y_1) + \lambda_2 \cdot u^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

  Ainsi, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$. □

**Théorème 9.**

*Soient $E$, $F$ et $G$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

*Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$.*

*Supposons que $u$ et $v$ sont des isomorphismes.*

***1)*** *Alors $v \circ u : E \to G$ est un isomorphisme de $E$.*
*(on a notamment $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$)*

***2)*** *De plus :* $\boxed{(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}}$

*Démonstration.*

- L'application $v \circ u$ est linéaire ($v \circ u \in \mathscr{L}(E)$) en tant que composée de deux applications linéaires.
- Il reste à démontrer que $v \circ u$ est bijective.
  Pour ce faire, on applique le théorème 7 à $g = u^{-1} \circ v^{-1} : E \to E$ et $f = v \circ u : E \to E$. Vérifions que l'on est dans le cadre d'application de ce théorème.

$$\begin{aligned} g \circ f &= (u^{-1} \circ v^{-1}) \circ (v \circ u) \\ &= u^{-1} \circ (v^{-1} \circ v) \circ u \\ &= u^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ u \\ &= u^{-1} \circ u \\ &= \mathrm{id}_E \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f \circ g &= (v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v^{-1}) \\ &= v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1} \\ &= v \circ \mathrm{id}_F \circ v^{-1} \\ &= v \circ v^{-1} \\ &= \mathrm{id}_E \end{aligned}$$

  Ainsi $f$ et $g$ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. □

# III. Noyau et image d'une application linéaire

## III.1. Noyau d'une application linéaire

### III.1.a) Définition

**Définition**

Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **noyau de** $f$ et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f) & = & \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} \\ & = & \{machin \in E \mid f\big(machin\big) = 0_F\} \end{array}}$$

- En particulier, on retiendra, pour tout $x \in E$ : $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_F}$

$$\forall machin \in E, \quad \boxed{machin \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f\big(machin\big) = 0_F}$$

**Remarque**

Par définition, $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\big(\{0_F\}\big)$, image réciproque de l'ensemble $\{0_F\}$ (attention, il ne s'agit en aucun cas de dire que $f$ est bijective !). Si on en croit le résultat énoncé dans la remarque initiale du cours, on va pouvoir démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$ (c'est bien le cas).

### III.1.b) Structure du noyau d'une application linéaire

**Théorème 10.**

*Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*

*Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

*Démonstration.*

On peut remarquer : $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0_F)$, ou passer par la définition.

*1)* $\mathrm{Ker}(f) \subseteq E$ par définition.

*2)* $\mathrm{Ker}(f) \neq \varnothing$ car $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$. En effet : $f(0_E) = 0_F$.

*3)* Stabilité de $\mathrm{Ker}(f)$ par combinaisons linéaires

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(x_1, x_2) \in (\mathrm{Ker}(f))^2$.

$$\begin{array}{rcllll} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) & + & \lambda_2 \cdot f(x_2) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot 0_F & + & \lambda_2 \cdot 0_F & \textit{(car } x_1 \in \mathrm{Ker}(f) \textit{ et } x_2 \in \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \\ & = & 0_F & & & \end{array}$$

□

**Exemple**

Reprenons l'exemple fondamental.

- Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$.

  Alors $\mathrm{Ker}(f) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = 0\}$.

  Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des solutions du système homogène $MX = 0$. ($n$ inconnues et $p$ équation)

- Il faut savoir reconnaître les ensembles représentant des noyaux.

  Par exemple, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid x = 2y \text{ et } z = -y \right\} = \mathrm{Ker}(f)$ où l'application linéaire $f$ est définie par :

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x - 2y \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

- L'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$ est un ev.

  En effet, c'est le noyau de l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{1}(\mathbb{K}) \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & 3x_1 + 2x_2 - x_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

### III.1.c) Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau

**Théorème 11.**

*Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

*Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*

$$\boxed{\textit{L'application } f \textit{ injective} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}}$$

*Démonstration.*

($\Rightarrow$) Supposons $f$ injective. Démontrons que : $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

- ($\supset$) Comme $f$ linéaire, $f(0_E) = 0_F$.
  Ce qui démontre que : $\mathrm{Ker}(f) \supset \{0_E\}$.
- ($\subset$) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi :

$$f(x) \;=\; 0_F \;=\; f(0_E)$$

  L'application $f$ étant injective, $x = 0_E$.
  Ce qui démontre : $x \in \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Démontrons que $f$ est injective.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

On a alors : $f(x) - f(y) = 0_F$, ce qui s'écrit :

$$f(x - y) = 0_F$$

Ainsi, $x - y \in \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, d'où $x - y = 0_E$ et $x = y$. □

## III.2. Image d'une application linéaire

### III.2.a) Définition

**Définition**

Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **image de** $f$ et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\} \\ & = & \{f(x) \in F \mid x \in E\} \\ & = & \{f(\mathit{truc}) \in F \mid \mathit{truc} \in E\} \end{array}}$$

- En particulier, on retiendra, pour tout $y \in F$ : $\boxed{y \in \mathrm{Im}(f) \;\Leftrightarrow\; y = f(\dots)}$

$$\forall \mathit{truc} \in F, \quad \boxed{\mathit{truc} \in \mathrm{Im}(f) \;\Leftrightarrow\; \exists\, \mathit{bidule} \in E, \mathit{truc} = f\big(\mathit{bidule}\big)}$$

### III.2.b) Structure de l'image d'une application linéaire

**Théorème 12.**

*Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

*Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*

*Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.*

*Démonstration.*

On peut remarquer : $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ ou passer par la définition.

***1)*** $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$ par définition.

***2)*** $\mathrm{Im}(f) \neq \varnothing$ car $0_F \in \mathrm{Im}(f)$. En effet : $0_F = f(0_E)$.

*3)* Stabilité de $\mathrm{Im}(f)$ par combinaisons linéaires
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in (\mathrm{Im}(f))^2$.
Ainsi, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que : $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 &= \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \\ &= f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \qquad \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in \mathrm{Im}(f)$. □

MÉTHODO **Démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel**

Pour démontrer qu'un ensemble $F$ est un espace vectoriel, on peut donc utiliser l'une des propriétés suivantes.

*1)* Revenir à la définition et vérifier tous les axiomes.
*Long et pénible – à éviter.*

*2)* Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel $F$ d'un ev $E$.
*Méthode classique (fonctionne toujours !) à connaître absolument.*

*3)* Montrer que $F$ s'écrit sous la forme : $F = \mathrm{Vect}\,(a_1, \dots, a_m)$.
*Plus élégant et rapide.*

*4)* Montrer que $F$ s'écrit sous la forme : $F = \mathrm{Ker}(f)$
où $f$ est une application linéaire.
*Plus élégant et rapide.*

*5)* Montrer que $F$ s'écrit sous la forme : $F = \mathrm{Im}(f)$
où $f$ est une application linéaire.
*Tout aussi élégant et rapide.*

**Exercice**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

***1.*** Démontrer : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

***2.*** ***a)*** Démontrer : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.
***b)*** Démontrer : $\mathrm{Im}(f) \supset \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

À RETENIR

Démontrer qu'un vecteur $y \in F$ est dans l'image de $f$, c'est l'écrire sous la forme :

$$y = f(\dots)$$

**Exemple**

Reprenons l'exemple fondamental.

- Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$.
  Alors $\mathrm{Im}(f) = \{Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ Y = MX\}$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des seconds membres $Y$ tels que le système $MX = Y$ admet une solution.
- Il faut savoir reconnaître les ensembles écrits comme des images.
  Par exemple, $F = \left\{ \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \right\} = \mathrm{Im}(f)$
  où l'application linéaire $f$ est définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

### III.2.c) Caractérisation de la surjectivité d'une application

**Théorème 13.**

*Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

*Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*

$$\boxed{f \textit{ surjective} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F}$$

*Démonstration.*
On ne fait que rappeler ici le résultat obtenu dans le chapitre Ensembles et applications. □

# IV. Applications linéaires en dimension finie

## IV.1. Image d'une application linéaire en dimension finie

### IV.1.a) Détermination pratique de l'image d'une application linéaire

**Théorème 14.**

*Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

*On suppose $E$ de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $E$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*

***1)*** *L'application $f$ est entièrement déterminée par sa valeur sur $\mathscr{B}$.*
*Autrement dit, si l'on connaît la valeur de $f(e_1)$, ..., $f(e_p)$, on connaît la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in E$.*

***2)*** $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)}$

*Démonstration.*
Démonstration du point ***2)***.

($\subset$) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Le vecteur $x$ se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}$. Autrement dit, il existe un unique $p$-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ tel que :

$$x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p$$

Ainsi, par linéarité de $f$ :

$$y = f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \dots + x_p \cdot f(e_p)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)$.

($\supset$) Soit $y \in \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$y = \lambda_1 \cdot f(e_1) + \ldots + \lambda_p \cdot f(e_p) = f\Big(\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p\Big)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f)$.

□

### IV.1.b) Caractérisation de l'injectivité / surjectivité / par image d'une famille libre / génératrice / base

**Théorème 15.**

*Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

*On suppose que $E$ est de dimension finie.*

*Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*

| | |
|---|---|
| | *L'application $f$ est injective* |
| $\Leftrightarrow$ | *L'image par $f$ de toute famille libre finie de $E$ est une famille (finie) libre de $F$.* |

| | |
|---|---|
| | *L'application $f$ est surjective* |
| $\Leftrightarrow$ | *L'image par $f$ de toute famille génératrice finie de $E$ est une famille (finie) génératrice de $F$.* |

| | |
|---|---|
| | *L'application $f$ est bijective* |
| $\Leftrightarrow$ | *L'image par $f$ de toute base finie de $E$ est une base (finie) de $F$.* |

*On déduit de ce dernier résultat :*

| | | |
|---|---|---|
| $\dim(E) = \dim(F)$ | $\Leftrightarrow$ | *Il existe une application linéaire bijective entre $E$ et $F$* |

**Exercice**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.
On note $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $E$.

Soit $F$ un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

***a)*** Démontrer que si $f$ est injective alors : $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.

***b)*** Démontrer que si $f$ est surjective alors : $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.

***c)*** Démontrer que si $f$ est bijective alors : $\dim(E) = \dim(F)$.

## IV.2. Rang d'une application linéaire

### IV.2.a) Définition

**Définition**

Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
On appelle rang de l'application $f$ et on note $\mathrm{rg}(f)$ :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$

**Remarque**

Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$ : $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) &= \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) \\ &= \dim\Big(\operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))\Big) \\ &= \mathrm{rg}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big) \end{aligned}$$

### IV.2.b) Théorème du rang

**Théorème 16.**

*Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
*On suppose $E$ de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$.*
*Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

*1) Le sous-espace vectoriel* $\operatorname{Ker}(f)$ *admet un supplémentaire dans $E$ qui est isomorphe à* $\operatorname{Im}(f)$. *Autrement dit :*

$$\boxed{\exists G \subset E,\ E = \operatorname{Ker}(f) \oplus G \quad \text{où} \quad \dim(G) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)}$$

*(on a même : $f(G) = \operatorname{Im}(f)$)*

*2) On en déduit :*

$$\boxed{\begin{aligned} \dim(E) &= \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) \\ &= \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \mathrm{rg}(f) \end{aligned}}$$

*Démonstration.*

- Comme $\left|\begin{array}{l} \times\ \operatorname{Ker}(f) \text{ sev de } E \\ \times\ E \text{ de dimension finie} \end{array}\right.$, alors $\operatorname{Ker}(f)$ est un espace vectoriel de dimension finie notée $r$ ($\leqslant \dim(E) = n$).
  On note alors $\mathscr{B}_K = (e_1, \dots, e_r)$ une base de $\operatorname{Ker}(f)$.
  En particulier, $(e_1, \dots, e_r)$ est une famille libre de $E$.
  On la complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_{n-r})$ de $E$.
- Démontrons alors que $\mathcal{F} = \Big(f(u_1), \dots, f(u_{n-r})\Big)$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$ :
  - × démontrons que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
    Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r}$.
    Supposons : $\lambda_1 \cdot f(u_1) + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot f(u_{n-r}) = 0_F$.
    Alors : $f\big(\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot u_{n-r}\big) = 0_F$.
    Ainsi, $\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot u_{n-r} \in \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)$.
    On en conclut qu'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que :
    $$\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot u_{n-r} \;=\; \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_r \cdot e_r$$
    Autrement dit :
    $$\alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_r \cdot e_r \;-\; \lambda_1 \cdot u_1 - \ldots - \lambda_{n-r} \cdot u_{n-r} \;=\; 0_E$$
    Comme $\mathscr{B}$ est une base de $E$, c'est en particulier une famille libre et on en conclut :
    $$\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$$
    Ainsi : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$ et $\mathcal{F}$ est une famille libre de $E$.
  - × démontrons que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\operatorname{Im}(f)$.
    Il suffit de remarquer que comme $\mathscr{B}$ est une base de $E$ :
    $$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_r), f(u_1), \dots, f(u_{n-r})) \\ &= \operatorname{Vect}(0_F, \dots, 0_F, f(u_1), \dots, f(u_{n-r})) \\ &= \operatorname{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_{n-r})) \\ &= \operatorname{Vect}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

- En notant $G = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-r})$, on a démontré :
  × $E = \text{Ker}(f) \oplus G$,
  (puisque $\mathscr{B} = \big(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_{n-r}\big)$ est une base de $E$).
  × de plus :

$$\begin{array}{rcl} \dim(G) & = & \text{Card}\,\big(u_1, \dots, u_{n-r}\big) \\ & = & n - r \\ & = & \text{Card}\,\big(f(u_1), \dots, f(u_{n-r})\big) \\ & = & \dim\Big(\text{Im}(f)\Big) \qquad \textit{(car } \mathcal{F} \textit{ est une base de } \text{Im}(f)\textit{)} \end{array}$$

□

**Remarque**

- Il faut bien lire ce théorème. En aucun cas il ne stipule que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires. Pour une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$, une telle affirmation n'a pas de sens. Si $\text{Ker}(f)$ est bien un sous-espace vectoriel de $E$, $\text{Im}(f)$ en revanche est un sous-espace vectoriel de $F$.
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $\text{Im}(f)$ est bien un sous-espace vectoriel de $E$.
  L'écriture $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ est alors parfois vérifiée. C'est le cas en particulier pour les projecteurs (applications qui vérifient $p \circ p = p$). On peut d'ailleurs caractériser les applications pour lesquelles cette décomposition est réalisée. On peut par exemple démontrer :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) \ \Leftrightarrow\ \text{Ker}(f) = \text{Ker}\left(f^2\right)$$

**Exercice**
L'application dérivée de $\mathbb{K}_3[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

***a.*** Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$.

***b.*** Déterminer le noyau.

***c.*** En déduire la dimension de $\text{Im}(\Phi)$.

***d.*** Vérifier que $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{K}_2[X]$.

### IV.2.c) Rang et composée

**Proposition 2.**
*Soient $E$, $F$ et $G$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.*
*Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit $g \in \mathscr{L}(F, G)$.*

$$\boxed{\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg}(g)} \quad \textit{et} \quad \boxed{\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg}(f)}$$

*Ce que l'on peut résumer en :* $\boxed{\text{rg}(g \circ f) \leqslant \min\big(\text{rg}(f), \text{rg}(g)\big)}$.

*Démonstration.*

- Démontrons : $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg}(g)$.
  × On remarque : $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.
  En effet, soit $z \in \text{Im}(g \circ f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que :

$$z \ = \ (g \circ f)(x) \ = \ g\big(f(x)\big)$$

  Ainsi : $z \in \text{Im}(g)$.
  × On sait : $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$. Donc : $\dim\big(\text{Im}(g \circ f)\big) \leqslant \dim\big(\text{Im}(g)\big)$.
  Ainsi :

$$\text{rg}(g \circ f) \ \leqslant \ \text{rg}(g)$$

- Démontrons : $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg}(f)$.
  × Par définition de l'image d'une application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \text{Im}(g \circ f) & = & (g \circ f)(E) \\ & = & g\big(f(E)\big) \\ & = & g\big(\text{Im}(f)\big) \\ & = & g_{|\text{Im}(f)}(\text{Im}(f)) \\ & = & \text{Im}(g_{|\text{Im}(f)}) \end{array}$$

× On sait que :
- l'application $g_{|\mathrm{Im}(f)}$ est linéaire car $g$ l'est,
- l'ensemble $E$ est de dimension finie.

Ainsi, par théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) & = & \dim\big(\mathrm{Im}(g_{|\mathrm{Im}(f)})\big) & + & \dim\big(\mathrm{Ker}(g_{|\mathrm{Im}(f)})\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \mathrm{rg}(f) & & \dim\big(\mathrm{Im}(g\circ f)\big) & & \end{array}$$

On en déduit :

$$\mathrm{rg}(g\circ f) \ = \ \dim\big(\mathrm{Im}(g\circ f)\big) \ = \ \mathrm{rg}(f) - \dim\big(\mathrm{Ker}(g_{|\mathrm{Im}(f)})\big) \ \leqslant \ \mathrm{rg}(f)$$

□

**Proposition 3.** *(Invariance du rang par composition par un isomorphisme)*
*Soient $E$, $F$, $G$ et $H$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.*
*Soit $f \in \mathscr{L}(F,G)$.*

***1)*** *Pour tout isomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ :* $\boxed{\mathrm{rg}(f\circ\varphi) = \mathrm{rg}(f)}$

***2)*** *Pour tout isomorphisme $\psi \in \mathscr{L}(G,H)$ :* $\boxed{\mathrm{rg}(\psi\circ f) = \mathrm{rg}(f)}$

*Démonstration.*
À faire. □

### IV.2.d) Caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité par détermination du rang

**Théorème 17.**
*Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.*
*Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*
- *$f$ est injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.*
- *$f$ est surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.*

*Démonstration.*
Application directe du théorème du rang. □

**Théorème 18** (Caractérisation des isomorphismes)**.**
*Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.*
*On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$*
*Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

$$\boxed{f \text{ est bijective } \Leftrightarrow \ f \text{ est injective } \Leftrightarrow \ f \text{ est surjective}}$$

$$\boxed{f \text{ est bijective } \Leftrightarrow \ \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{rg}(f) = \dim(F)}$$

*Dans ce cas, $f$ est un isomorphisme de $E$ vers $F$.*

**Exercice**

***1.*** L'application linéaire :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (c, a+d, b-c, c) \end{array} \right.$$

est-elle un isomorphisme ? un automorphisme ?

***2.*** Notons $E = \mathbb{K}[X]$ et $\varphi$ l'endomorphisme de $E$ défini par $\varphi : P \mapsto XP(X)$.

***a)*** Démontrer que $\varphi$ est injective.

***b)*** L'application $\varphi$ est-elle surjective ?

## IV.3. Formes linéaires et hyperplans

**Rappel**

- Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on appelle hyperplan de $E$ tout sous-espace vectoriel de dimension $\dim(E) - 1$.
- De manière générale, on appelle hyperplan de $E$ tout sous-espace vectoriel de $E$ de codimension 1. Autrement dit, $F$ est un hyperplan de $E$ si :
  - × $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$,
  - × il existe $G$, sous-espace vectoriel de $E$ **de dimension** 1, tel que :

$$E = F \ \oplus \ G$$

(ou encore s'il existe $u \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = F \ \oplus \ \text{Vect}\,(u)$)

### IV.3.a) Définition

**Définition**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que $E$ est de dimension finie.

- Une forme linéaire sur $E$ est une application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}$.

### IV.3.b) Caractérisation des hyperplans de $E$ en dimension finie

**Théorème 19.**

*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

*Soit $H$ un sous-espace vectoriel de $E$.*

*On suppose que $E$ est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.*

***1.*** $$\boxed{H \text{ est un hyperplan de } E \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varphi \in \big(\mathscr{L}(E,\mathbb{K})\big) \setminus \{0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}\},\ H = \text{Ker}(\varphi)}$$

***2.*** *Soient $\varphi_1 \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et $\varphi_2 \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ deux formes linéaires.*
*On suppose que ces formes linéaires sont non nulles.*

$$\boxed{\text{Ker}(\varphi_1) = \text{Ker}(\varphi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{K}^*,\ \varphi_1 = a \cdot \varphi_2}$$

*(autrement dit, deux formes linéaires définissent le même hyperplan ssi elles sont colinéaires)*

*Démonstration.*

***1.*** $(\Rightarrow)$ Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $H$.
C'est une famille libre de $H$ et donc de $E$, que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de $E$. Notons alors $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ la forme linéaire définie par :

$$\varphi(e_1) = 0, \dots, \varphi(e_{n-1}) = 0, \varphi(e_n) = 1$$

Alors : $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_{n-1}) = H$.

$(\Leftarrow)$ Le théorème du rang montre que le noyau d'une forme linéaire non nulle sur $E$ est un hyperplan de $E$.

***2.*** $(\Rightarrow)$ On suppose $\text{Ker}(\varphi_1) = \text{Ker}(\varphi_2)$. Comme $\varphi_1$ est une forme linéaire non nulle, alors $\text{Ker}(\varphi_1)$ est un hyperplan de $E$. C'est donc un espace vectoriel de dimension $n-1$ dont on note $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ une base. On complète cette famille $\mathcal{F}$ en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de $E$. Par hypothèse :

$$\text{Ker}(\varphi_1) = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_{n-1}) = \text{Ker}(\varphi_2)$$

Ainsi, pour $i \in \{1, 2\}$ : $\varphi_i(e_1) = \ldots = \varphi(e_{n-1}) = 0$.
Comme les deux formes linéaires sont non nulles, alors il existe $c \neq 0$ et $d \neq 0$ tels que : $\varphi_1(e_n) = c$ et $\varphi_2(e_n) = d$. On a alors : $\varphi_1 = \frac{c}{d} \cdot \varphi_2$.

$(\Leftarrow)$ Sens clair. □

### IV.3.c) Équations d'un hyperplan dans une base

**Théorème 20.**

*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

*On suppose que $E$ est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.*

*Notons $\mathscr{B}$ une base de $E$.*

**1.** *Les hyperplans de $E$ sont les parties de $E$ définies par une équation linéaire non nulle sur les coordonnées des vecteurs de $E$ dans la base $\mathscr{B}$.*

*Autrement dit, pour tout hyperplan $H$ de $E$, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, un $n$-uplet différent de $(0, \dots, 0)$ tel que :*

$$H = \left\{ x \in E \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n \; = \; 0 \text{ où } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K} \\ \text{sont les coordonnées de } x \text{ dans la base } \mathscr{B} \end{array} \right\}$$

**2.** *Deux telles équations définissent le même hyperplan ssi elles sont proportionnelles.*

*Démonstration.*
C'est l'interprétation matricielle du corollaire précédent. □

**Exemple**

**1.** L'ensemble $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. Il s'écrit naturellement comme le noyau de la forme linéaire :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_1 + x_2 + x_3 \end{array}$$

**2.** $\mathscr{S}_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \mid a_{1,2} = a_{2,1} \right\} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ & & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} & \mapsto & a_{1,2} - a_{2,1} \end{array}$$

**3.** $\mathbb{K}_{n-1}[X] = \{a_1 P_0 + \ldots + a_n P_n \mid a_n = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.

**Remarque**

- L'ensemble :

$$\mathscr{S}_3(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \mid a_{1,2} = a_{2,1} \text{ et } a_{1,3} = a_{3,1} \text{ et } a_{2,3} = a_{3,2} \right\}$$

`N'`est `PAS` un hyperplan de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.
Ce sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ s'écrit comme intersection de trois hyperplans :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{S}_3(\mathbb{K}) & = & \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid a_{1,2} = a_{2,1} \right\} \\ & \cap & \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid a_{1,3} = a_{3,1} \right\} \\ & \cap & \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid a_{2,3} = a_{3,2} \right\} \end{array}$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ de dimension $9 - 3 = 6$.

- De manière générale, si :
  - × $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
  - × $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ défini par un système de $k \in [\![1, n]\!]$ équations linéaires sur les coordonnées des vecteurs de $E$ dans $\mathscr{B}$,

  alors : $\dim(F) = \dim(E) - \left( \begin{array}{l} \text{nombre d'équations linéairement} \\ \text{indépendantes} \end{array} \right)$

- En particulier, si $\varphi_1$, ..., $\varphi_k$, sont des vecteurs linéairement indépendants de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ :

$$F \; = \; \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_k)$$

alors : $\dim(F) = \dim(E) - k$.

### IV.4. Détermination d'une application linéaire en dimension finie

**Proposition 4.**

*Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

*Supposons que $E$ est de dimension finie $n$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une de ses bases.*

*Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de $F$.*

*Il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f_i \ = \ \varphi(e_i)$$

**Remarque**
On pourra retenir cette proposition sous la forme suivante :

> Une application linéaire de $E$ dans $F$ est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de $E$.

**Proposition 5.**

*Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie.*

*Soient $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ vérifiant : $E = E_1 \oplus E_2$.*

*Soit $\varphi_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$. Soit $\varphi_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.*

*Il existe une unique application $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ coïncidant avec $\varphi_1$ sur $E_1$ et avec $\varphi_2$ sur $E_2$.*

*Démonstration.*
À faire. $\square$