CH XX : Applications linéaires et représentations matricielles

I. Représentations matricielles de vecteurs et d'applications linéaires

I.1. Matrice colonne associée à un vecteur

I.1.a) Définition

Définition *Matrice colonne associée à un vecteur*

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

- Soit $x \in E$. Il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x \ = \ x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p$$

La base $\mathscr{B}_E$ étant fixée, le vecteur x est entièrement déterminé par la donnée du p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$, que l'on nomme **coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}_E$**.

- Le vecteur x admet alors naturellement une représentation matricielle.
Il s'agit du vecteur colonne :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

On parle alors de **vecteur (ou matrice) colonne associé à x dans la base $\mathscr{B}$**. Dans la suite, on notera :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Exercice

On note $\mathscr{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$. Plus précisément :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) = X \quad \text{et} \quad P_2(X) = X^2$$

On note $\mathscr{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$ la famille de vecteurs définie par :

$$R_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad R_1(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X-1)^2$$

On considère : $T(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

1. ***a)*** Quel est le vecteur colonne associé à P_0 dans la base $\mathscr{B}_1$?
Même question pour P_1 et P_2.

b) Quel est le vecteur colonne associé à T dans la base $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{K}_2[X]$?

2. ***a)*** Démontrer que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

b) Quel est le vecteur colonne associé à R_0 dans la base $\mathscr{B}_2$?
Même question pour R_1 et R_2.

c) Quel est le vecteur colonne associé à P dans la base $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{K}_2[X]$?

I.1.b) Isomorphisme de représentation

Théorème 1.

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

Alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ & & x & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Remarque

- Une fois les base $\mathscr{B}_E$ fixée, ce résultat signifie que :
  - × tout vecteur x possède une unique représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}_E$.
    (cela signifie simplement que φ est une application)
  - × réciproquement, toute matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est la représentation matricielle d'un unique vecteur de E.
    (c'est le caractère bijectif)
- Évidemment, si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases différentes de E, on obtient généralement des représentations matricielles $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x)$ différentes pour x.

I.1.c) Matrice de passage

Définition

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (e_1', \dots, e_p')$ deux bases de E.

- On appelle **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$** et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, la matrice :

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1') \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_n')\big)}$$

  Autrement dit, la matrice obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à e_j' dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice

On considère de nouveau $\mathscr{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ et $\mathscr{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$.
On note $T(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

1. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.

2. Déterminer la matrice de passage Q de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}_1$.

3. *a)* Déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathscr{B}_2$.

b) Déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathscr{B}_1$ à l'aide de la formule de changement de base.

c) Écrire alors la formule de chagement de base permettant de déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathscr{B}_2$ connaissant la matrice colonne associée à T dans la base $\mathscr{B}_1$.

Démonstration.

1. Exprimons les vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

- $R_0 = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(R_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $R_1 = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(R_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $R_2 = 1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(R_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Exprimons les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

- $P_0 = 1 \cdot R_0 + 0 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $P_1 = -1 \cdot R_0 + 1 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $P_2 = 1 \cdot R_0 + 2 \cdot R_1 + 1 \cdot R_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. ***a)*** Comme $T = -4 \cdot R_0 + -3 \cdot R_1 + 2 \cdot R_2$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(T) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) On écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(T) &= P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(T) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) On écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(T) &= P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(T) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Attention, il s'agit bien de $X = PX'$ et non pas $\cancel{X' = PX}$!

Remarque

- On peut dégager de cette formule une règle d'écriture : les bases en regard de deux objets successifs doivent être les mêmes.
- Plus précisément :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$$

- Dans l'exemple, on démontre que :

$$P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} = (P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2})^{-1}$$

  Cette propriété est toujours vérifiée (*cf* théorème suivant).
  Dans les énoncés, il est souvent demandé d'exhiber la matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$ puis de calculer $(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}$. On peut obtenir cette matrice en déterminant $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. Généralement, on applique plutôt la méthode du pivot de Gauss pour obtenir $(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}$.

Théorème 2.

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E.

Soit $x \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

1. $\boxed{X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ X'}$ *ou encore* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \ = \ P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)}$

2. $\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}}$

3. *La matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et :* $\boxed{(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$

Démonstration.

1. • Soit $x \in E$. On note $(x_1, \dots, x_p)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ et $(x'_1, \dots, x'_p)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. Autrement dit :

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_p \cdot e_p \\ \text{et } x & = & x'_1 \cdot e_1{}' + \ldots + x'_p \cdot e_p{}' \end{array}$$

• Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, chaque vecteur $e_j{}'$ se décompose de manière unique sur cette base. On note comme suit les décompositions obtenues :

$$\begin{array}{rcl} e_1{}' & = & r_{11} \cdot e_1 + \ldots + r_{p1} \cdot e_p \\ \vdots & & \vdots \\ e_p{}' & = & r_{1p} \cdot e_1 + \ldots + r_{pp} \cdot e_p \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} x & = & \quad x'_1 \cdot (r_{11} \cdot e_1 + \ldots + r_{p1} \cdot e_p) \\ & & + \ \ldots \\ & & + \ x'_p \cdot (r_{1p} \cdot e_1 + \ldots + r_{pp} \cdot e_p) \\ & = & \quad (r_{11}\ x'_1 + \ldots + r_{1p}\ x'_p) \cdot e_1 \\ & & + \quad \ldots \\ & & + \ (r_{p1}\ x'_1 + \ldots + r_{pp}\ x'_p) \cdot e_p \end{array}$$

• Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) & = & \begin{pmatrix} r_{11}\ x'_1 + \ldots + r_{1p}\ x'_p \\ \vdots \\ r_{p1}\ x'_1 + \ldots + r_{pp}\ x'_p \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} r_{11} & \ldots & r_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & \ldots & r_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} = P\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = P\ X' \end{array}$$

2. Soit $x \in E$.
On note : $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ et $X'' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}''}(x)$.
D'après le théorème précédent :

× $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ X'$

× $X' = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}\ X''$

On en déduit que : $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ X' = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}\ X''$.
Toujours d'après le théorème précédent : $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}\ X''$. On en déduit :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}\ X'' \ = \ P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}\ X''$$

Et donc : $(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} - P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''})\ X''$.
Ceci étant vrai pour tout X'', on en conclut que :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} - P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} = 0$$

3. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
D'après la theorem précédente : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.
Or $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = I_n$ car cette matrice est obtenue en concaténant les vecteurs colonnes associées à e_j dans la base $\mathscr{B}$ et que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible d'inverse $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. □

I.2. Matrice associée à une application linéaire

I.2.a) Définition

Définition

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

On suppose que F est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$** la matrice :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(e_1)\big) \ \ldots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(e_p)\big)\Big)}$$

  Autrement dit, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

- Lorsque $E = F$, on considère généralement la même base $\mathscr{B}_E$ de départ et d'arrivée. On note alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f)$ en lieu et place de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_E}(f)$.
  On obtient alors une matrice carrée d'ordre p.

Remarque

- Une application $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par sa valeur sur une base de E c'est-à-dire par les valeurs :

$$f(e_1), \ f(e_2), \ldots, \ f(e_p)$$

  Il apparaît donc logique que la matrice représentative de f soit déterminée par les matrices représentatives de chacun des vecteurs.

- Dans l'exemple fondamental du début de chapitre, on a démontré que les seules applications linéaires de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ s'écrivent naturellement à l'aide d'une matrice.

  On peut généraliser cette propriété au cas où des applications linéaires de E dans F où :
  - × E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$,
  - × F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

  L'espace vectoriel E (respectivement F) s'injecte naturellement dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) par l'isomorphisme de représentation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(.)$ (respectivement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(.)$).
  On obtient alors le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(.) \Big\downarrow & & \Big\downarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(.) \\ \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & M \times X \end{array}$$

  où $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$.

- Ainsi, « les applications linéaires de E, de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, dans F, de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, sont, à isomorphismes de représentation près, les matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ».

- En particulier, étudier les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, c'est étudier les matrices carrées d'ordre n.

Exercice

On considère les endomorphismes φ et ψ suivantes.

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_3[X] \\ & P & \mapsto & P'(X) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_3[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array}$$

On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$.

1. Déterminer la matrice représentative de φ dans la base $\mathscr{B}$.

2. Déterminer la matrice représentative de ψ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application φ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2) Écrire la matrice C de φ dans la base canonique

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

Démonstration.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \varphi(E_{1,1}) & \varphi(E_{1,2}) & \varphi(E_{2,1}) & \varphi(E_{2,2}) \end{array} \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = & \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} E_{1,1} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ E_{2,2} \end{array} \end{array}$$

$\square$

Exercice
Soit J une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \ f(M) = M + \mathrm{tr}(M)\, J$$

1. ***a)*** Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(M) \end{array}$ est linéaire.

b) Déterminer une base du noyau de l'application tr.
Vérifier : $\dim\big(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})\big) = 3$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la matrice, notée A, de f dans la base $\mathscr{B}$.

b) Vérifier : $(A - I_4)^2 = 0$ où I_4 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

c) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

$\boxed{\texttt{À RETENIR}}$

Pour déterminer la matrice associée à une application linéaire f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$, on calcule simplement l'image par f de chaque vecteur de la base $\mathscr{B}_E$.

I.2.b) Matrice associée à un endomorphisme dans une autre base

Théorème 3.

Soit E un ev de dimension finie.

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $N = Mat_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

1. *Alors :*

$$\boxed{M = P\ N\ P^{-1}}$$

ce qui signifie :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}}$$

2. *De manière générale :*

Les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables	$\Leftrightarrow$	*M et N sont les matrices représentatives d'un même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes*

Démonstration.
Soit $u \in E$. On considère $v = f(u)$ et on note :

$$U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \quad V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \quad P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$
$$U' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) \quad V' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(v)$$

Avec ces notations :

$$\begin{aligned} & v = f(u) \\ \Leftrightarrow\ & V = M\ U && \textit{(écriture de l'égalité sous forme matricielle dans la base } \mathscr{B}\textit{)} \\ \Leftrightarrow\ & P\ V' = MP\ U' \\ \Leftrightarrow\ & V' = P^{-1}MP\ U' \\ \Leftrightarrow\ & N\ U' = P^{-1}MP\ U' \end{aligned}$$

En effet : $V' = N\ U'$ (cela correspond à l'écriture matricielle de $v = f(u)$ dans la base $\mathscr{B}'$). On a donc démontré :

$$(P^{-1}MP - N)\ U' \ = \ 0$$

Ceci étant vrai pour tout U', on en déduit que $P^{-1}MP - N = 0$. □

Remarque
On peut retenir cette formule sous la forme :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$$

que l'on peut rapprocher une nouvelle fois de la relation de Chasles.

I.2.c) Isomorphisme de représentation

Théorème 4. *Isomorphisme de représentation matricielle*

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

1) Les applications :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \end{array} \right. \quad et \quad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_{p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f) \end{array} \right.$$

sont des isomorphismes.

2) En particulier, on a :

$$\boxed{\dim(\mathscr{L}(E,F)) = np} \quad et \quad \boxed{\dim(\mathscr{L}(E)) = p^2}$$

Remarque

- Une fois les base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ fixées, ce résultat signifie que :
  - × toute application linéaire f possède une unique représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
    (cela signifie simplement que φ est une application)
  - × réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une unique application linéaire φ.
    (c'est le caractère bijectif)
- En plus d'être une application bijective, φ est linéaire. Ainsi, la matrice d'une combinaison linéaire d'applications est la combinaison linéaire des matrices des applications.
  Plus précisément, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda_1 f + \lambda_2 g) \ = \ \lambda_1 \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \lambda_2 \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$$

I.3. Lien entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur les matrices associées

I.3.a) Noyau d'une application linéaire via la matrice associée

Théorème 5.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

1.
$$\boxed{\begin{array}{rcl} y = f(x) & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(f(x)\Big) \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \end{array}}$$

2. En particulier : $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f) \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) = 0}$

Démonstration.

1.

2. • Soit $x \in E$. On note $(x_1, \dots, x_p)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{array}{lrclclcl} \text{Alors} & x & = & x_1 \cdot e_1 & + & \dots & + & x_p \cdot e_p \\ \text{et} & f(x) & = & x_1 \cdot f(e_1) & + & \dots & + & x_p \cdot f(e_p) \end{array}$$

Les coordonnées de x étant connues, le vecteur $f(x)$ est entièrement déterminé par l'image de la base $(e_1, \dots, e_p)$ par la fonction f.

• Comme $\mathscr{B}_F$ est une base de F, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, le vecteur $f(e_j)$ se décompose de manière unique sur cette base.
On note comme suit les décompositions obtenues :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & a_{11} \cdot f_1 + \dots + a_{n1} \cdot f_n \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_p) & = & a_{1p} \cdot f_1 + \dots + a_{np} \cdot f_n \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x_1 \cdot (a_{11} \cdot f_1 + \ldots + a_{n1} \cdot f_p) \\ & + & \ldots \\ & + & x_p \cdot (a_{1p} \cdot f_1 + \ldots + a_{np} \cdot f_p) \\ & = & (a_{11}\ x_1 + \ldots + a_{1p}\ x_p) \cdot f_1 \\ & + & \ldots \\ & + & (a_{n1}\ x_1 + \ldots + a_{np}\ x_p) \cdot f_p \end{array}$$

- Alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x)) & = & \begin{pmatrix} a_{11}\ x_1 + \ldots + a_{1p}\ x_p \\ a_{21}\ x_1 + \ldots + a_{2p}\ x_p \\ \vdots \\ a_{n1}\ x_1 + \ldots + a_{np}\ x_p \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \end{array}$$

□

Remarque
Il est fréquent qu'une application linéraire f soit donnée seulement par sa matrice dans certaines bases. Lorsque l'on doit calculer $f(x)$, on doit alors jongler avec les notations.

Exercice (`EDHEC 2016`)
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$.
Dans la suite, on note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}^3$.
On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ dont la matrice dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On note : $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$.
On pose enfin : $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$.

2. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{K}^3$.

3. Vérfier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont égaux à 2.

I.3.b) Composée d'applications linéaires et produit matriciel

Théorème 6.

Soient E, F, et G des vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases respectives de E, F, et G.

1) Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)}$$

(la composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices associées)

2) Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}\left(f^k\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f)\right)^k}$$

(où l'on a noté $f^k = f \circ \ldots \circ f$)

Théorème 7.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1) $\boxed{f \text{ est bijective} \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est inversible}}$

2) Si f est bijective alors : $\boxed{\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)}$

Remarque

- Lorsqu'on dispose d'un endomorphisme et de sa matrice dans une base, pour savoir si l'endomorphisme est bijectif, il suffit de déterminer si sa matrice représentative est inversible.
- On pourra notamment penser à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer si A est inversible.

I.4. Lien entre le rang d'une application linéaire et le rang de la matrice associée

Théorème 8.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f))}$$

Démonstration.
Soit $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Il reste alors à démontrer :

$$\mathrm{rg}\Big(\ f(e_1), \ldots, f(e_n)\ \Big) = \mathrm{rg}\Big(\mathrm{Mat}(f(e_1)), \ldots, \mathrm{Mat}(f(e_n))\Big)$$

□

Théorème 9.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{A \text{ est inversible} \Leftrightarrow A \text{ est la matrice associée à un isomorphisme}}$$

II. Matrices carrées par blocs et sous-espaces stables

II.1. Matrices carrées par blocs

II.1.a) Définition

Définition

- On appelle matrice carrée **par blocs** toute matrice A de la forme :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \overleftrightarrow{n_1} & \overleftrightarrow{n_2} & \cdots & \overleftrightarrow{n_p} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,p} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \\ \vdots \\ \updownarrow n_p \end{array} \end{array}$$

  où
  - × $(n_1, \dots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$
  - × $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!]$, $A_{i,j} \in \mathscr{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})$

  En particulier, les matrices diagonales qui apparaissent dans cette écriture sont carrées ($\forall i \in [\![1,p]\!]$, $A_{i,i} \in \mathscr{M}_{n_i,n_i}(\mathbb{K})$).

- Une telle matrice est notée : $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.
  C'est une matrice carrée : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $n = n_1 + \cdots + n_p$.

- Une matrice carrée par blocs est dite :
  - × triangulaire supérieure **par blocs** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!], \ \Big(i > j \ \Rightarrow \ A_{i,j} = 0_{\mathscr{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})}\Big)$$

  - × triangulaire inférieure **par blocs** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!], \ \Big(i < j \ \Rightarrow \ A_{i,j} = 0_{\mathscr{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})}\Big)$$

  - × diagonale **par blocs** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!], \ \Big(i \neq j \ \Rightarrow \ A_{i,j} = 0_{\mathscr{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})}\Big)$$

Remarque

- Toute matrice carrée peut s'écrire comme matrice carrée par blocs. Il suffit pour cela de fixer les blocs diagonaux. Les autres blocs s'en déduisent.
- Il n'y a pas unicité de la décomposition par blocs.

$$I_3 = \left(\begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right) = \left(\begin{array}{|c|cc|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right)$$

- La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure par blocs.

II.1.b) Manipulation des matrices par blocs

Théorème 10.

Soient $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ et $B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ deux matrices carrées par blocs <u>de mêmes tailles</u>.

Combinaisons linéaires et produits de matrices par blocs.

1) $$\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}, \ \lambda \cdot A + \mu \cdot B = \Big(\lambda \cdot A_{i,j} + \mu \cdot B_{i,j}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}}$$

2) $$\boxed{AB = (C_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \text{ où : } \forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!], \ \ C_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j}}$$

3) En particulier, si A et B sont triangulaires (resp. diagonales) par blocs alors :
- × *pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\lambda \cdot A + \mu \cdot B$ est triangulaire (resp. diagonales) par blocs.*
- × *$A \times B$ est triangulaire (resp. diagonale) par blocs.*

Dans le cas du produit de deux matrices triangulaires A et B (resp. diagonales) par blocs, les blocs diagonaux de $A \times B$ sont les produits des blocs diagonaux de A et B.

Cas des matrices triangulaires supérieures :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{B_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 \times B_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{A_2 \times B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{A_p \times B_p} \end{pmatrix}$$

Cas des matrices triangulaires inférieures :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \ldots & (*) & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \ldots & (*) & \boxed{B_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 \times B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{A_2 \times B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \ldots & (*) & \boxed{A_p \times B_p} \end{pmatrix}$$

Cas des matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{B_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 \times B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2 \times B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{A_p \times B_p} \end{pmatrix}$$

Remarque

On peut généraliser la notion de matrice par blocs et les calculs par blocs au cas des matrices non carrées en prenant des « découpages » différents selon les lignes et selon les colonnes. Le calcul par blocs d'un produit AB est alors licite dès que le découpage des colonnes de A est le même que le découpage des lignes de B.

II.2. Sous-espace stable par un endomorphisme

II.2.a) Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que F est **stable** (ou **stabilisé**) par f si $f(F) \subset F$.
  Autrement dit : $\boxed{F \text{ est stable par } f \ \Leftrightarrow\ \forall x \in F,\ f(x) \in F}$.
- Si f stabilise F, la restriction de f à F est à valeurs dans F.
  On appelle alors **endomorphisme induit** par f sur F la restriction de f à F au départ et à l'arrivée. Plus précisément, il s'agit de l'application :

$$\begin{array}{rccc} f\|_F & : & F & \rightarrow & F \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple

1. La dérivation $P \mapsto P'$ dans $\mathbb{R}[X]$ stabilise tous les sous-espaces $\mathbb{R}_n[X]$, où $n \in \mathbb{N}$. Ce n'est pas le cas de la multiplication $P \mapsto QP$ par un polynôme Q de degré $\geqslant 1$.

2. La transposition $M \mapsto {}^tM$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ stabilise les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, mais pas les sous-espaces $\mathcal{T}_n^{\pm}(\mathbb{K})$.

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit p un projecteur de E.

On note $\mathcal{C}(p) = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ p = p \circ f\}$ le *commutant* de p.

1. Montrer : $f \in \mathcal{C}(p) \Leftrightarrow f$ stabilise $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.

2. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(p)$ lorsque E est de dimension finie.

II.2.b) Quelques sous-espaces stables en général

Théorème 11.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$.

Sous-espaces stables d'un endomorphisme

1) *Les sous-espaces $\{0_E\}$, E, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par f.*

2) *Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$:*

$$\boxed{\mathrm{Ker}\big(P(f)\big) \text{ et } \mathrm{Im}\big(P(f)\big) \text{ sont stables par } f}$$

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\boxed{\mathrm{Ker}\big(f - \lambda\,\mathrm{id}_E\big) \text{ est stable par } f}$

Stabilité de l'ensemble des endomorphismes qui stabilisent un sous-espace de E

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

F est stable par f et g	$\Rightarrow$	• $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, *$F$ est stable par* $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ • *F est stable par $f \circ g$ et $g \circ f$*

Sous-espaces stables de deux endomorphismes qui commutent

Les endomorphismes f et g commutent	$\Rightarrow$	• $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont stables par g* • $\mathrm{Ker}(g)$ *et* $\mathrm{Im}(g)$ *sont stables par f*

II.3. Caractérisations de la stabilité d'un sous-espace en dimension finie

II.3.a) Matrice par blocs d'un endomorphisme qui stabilise un espace

Théorème 12.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E dont la dimension est notée $p \in \mathbb{N}^*$.
Notons $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base (ou une famille génératrice) de F.

Notons enfin $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_{n-p})$ une base de E obtenue par complétion de la base $\mathscr{B}_F$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1.
$$\boxed{\begin{aligned} F \text{ est stable par } f \ &\Leftrightarrow\ \forall x \in F,\ f(x) \in F \\ &\Leftrightarrow\ \forall k \in [\![1, p]\!],\ f(e_k) \in F \end{aligned}}$$

2.
$$\boxed{F \text{ est stable par } f \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right) \text{ où } A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})}$$

De plus, dans ce cas, A est la matrice de l'endomorphisme induit $f\|_F$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

Démonstration.
Le sens direct de 1 est évident, et la réciproque se prouve par linéarité. Le point 2 s'en déduit. □

II.3.b) Généralisation : matrice dans une base adaptée à des supplémentaires stables

Théorème 13.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient F_1, ..., F_p des sous-espaces supplémentaires de E.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ on note $\mathscr{B}_i$ une base de F_i.
On note alors $\mathscr{B}$ la base obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_1$, ..., $\mathscr{B}_p$.
(la base $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{array}{l}\textit{Pour tout } k \in [\![1,p]\!], \\ \textit{l'espace } F_k \textit{ est stable par } f\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$$

où : $\forall k \in [\![1,p]\!],\ A_k = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_k}\left(f\|_{F_k}\right) \in \mathscr{M}_{\dim(F_k)}(\mathbb{K})$

Démonstration.

1. Conséquence directe de **??** (1er ou 2nd point).
2. Conséquence du 2nd point de **??**
(ou de l'équivalence $f(\mathrm{Ker}(\varphi)) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ ssi $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi \circ f)$ et du résultat sur la colinéarité des formes linéaires).

□

II.3.c) Illustration classique : le cas des projections et symétries

(i) Projecteurs et symétrie : définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ($E = F \oplus G$).
Ainsi, tout élément $x \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de E et d'un élément de F.
On note alors $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs tel que $x = x_F + x_G$.

1) On appelle alors projection sur F parallèlement à G, l'endomorphisme p :

$$p : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array}$$

2) On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'endomorphisme s :

$$s : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$$

(ii) Caractérisation des projecteurs et symétries

Théorème 14.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Propriété caractéristique

1)
$$\begin{array}{lcl} p \textit{ est un projecteur de } E & \Leftrightarrow & p \circ p = p \\ & \Leftrightarrow & E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) \end{array}$$

Dans ce cas, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

2)
$$\begin{array}{lcl} s \textit{ est une symétrie de } E & \Leftrightarrow & s \circ s = \mathrm{id}_E \\ & \Leftrightarrow & E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \end{array}$$

Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Caractérisation par matrice représentative

1) p *est un projecteur de* E $\Leftrightarrow$ *Il existe une base* $\mathscr{B}$ *de* E *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right)$

En particulier, si p *est un projecteur :* $\boxed{\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)}$.

La base $\mathscr{B}$ *est obtenue par concaténation :*

× *d'une base de* $\mathrm{Im}(p)$ *(de dimension notée* n_1*),*

× *et d'une base de* $\mathrm{Ker}(p)$*.*

2) s *est une symétrie de* E $\Leftrightarrow$ *Il existe une base* $\mathscr{B}$ *de* E *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & -I_{n_2} \end{array}\right)$

La base $\mathscr{B}$ *est obtenue par concaténation :*

× *d'une base de* $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ *(de dimension notée* n_1*).*

× *et d'une base de* $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ *(de dimension notée* n_2*).*

Exemple

Soit $f \in (E)$.

1. Soit $v \in E$ non nul.
La droite $\mathrm{Vect}\,(v)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.

2. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle.
L'hyperplan $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.