Colles

Semaine 9 : 11 novembre - 15 novembre

I. Questions de cours

Exercice 1
Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.

Exercice 2
Énoncé et démonstration de la formule de Vandermonde :

a) par calcul,

b) par dénombrement.

Exercice 3
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer :

$$C_n \; = \; \sum_{k=0}^{n} \cos(k\,x) \; = \; \begin{cases} n+1 & \text{si } x \equiv 0 \ [2\pi] \\ \dfrac{\sin\left((n+1)\,\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(n\;\dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x \not\equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$$

II. Exercices

Conjugaison et module d'un complexe

Exercice 4
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $(c,d) \neq (0,0)$ pour que $\dfrac{a+ib}{c+id}$ soit réel.

Exercice 5
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\bar{a}b \neq 1$. On pose : $c = \dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}$.

1. Démontrer que $|c| = 1$ si et seulement si $|a| = 1$ ou $|b| = 1$.

2. Démontrer que $|c| < 1$ si et seulement si $|a|$ et $|b|$ sont tous deux strictements supérieurs ou strictement inférieurs à 1.

Exercice 6
Soient a et b deux nombres complexes. Démontrer :

$$|a| + |b| \ \leqslant \ |a+b| + |a-b|$$

Déterminer les cas d'égalités.

Exercice 7
Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \ = \ n\, z^n$$

Démontrer : $|z| \leqslant 1$.

Exercice 8

1. Soient a et b deux nombres complexes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note : $M = \max\big(|a|, |b|\big)$. Démontrer :

$$|a^n - b^n| \ \leqslant \ n\, M^{n-1}\, |a-b|$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$$

Linéarisation et factorisation

Exercice 9
Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Linéariser les expressions de $\big(\sin(x)\big)^n$ et $\big(\cos(x)\big)^n$.

Exercice 10
Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Factoriser les expressions de $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$.

Exercice 11
Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^2(x)\, \sin^3(x)$.

Exercice 12

1. **Linéarisations**. Linéariser les expressions suivantes en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

a) $\cos^3(2x)$ ***b)*** $\sin^5(x)$

2. **Application : calcul de primitives**. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

a) $t \mapsto \sin^3(t)\,\cos^3(t)$ ***b)*** $t \mapsto \cos^5(t)\,\sin^4(t)$

Exercice 13
Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ ***b)*** $\sum\limits_{k=0}^{n} k\,\cos(kx)$ ***c)*** $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \sin(kx)$

2. ***a)*** Supposons : $x \notin 2\pi\,\mathbb{Z}$. Démontrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\ell=-k}^{k} \mathrm{e}^{i\ell x} \right) = \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$$

Calculs de sommes et produits

Exercice 14
Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Calculer $\sum\limits_{p=0}^{n} \big(\cos(p\alpha)\big)^2$.

Exercice 15
Soit $(a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$.

1. Développer l'expression $(1 + i\,\sqrt{a})^{2n}$.

2. Calculer alors le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} a^k$.

3. Donner une expression simple du résultat lorsque $a = 3$.

Exercice 16
Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

1. Calculer le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$.

2. Vérifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Calculer alors le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$.

3. En s'inspirant de la question précédente, calculer les réels suivants :

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$ ***b)*** $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$

Exercice 17
Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On pose : $\varphi : h \mapsto \sum\limits_{p=0}^{n} \cos(x+ph)$.

1. Déterminer une expression sans symbole de sommation de la fonction φ.

2. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, calculer $\sum\limits_{p=0}^{n} p \sin(x+ph)$.

Exercice 18
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on pose : $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{p=0}^{n-1} a_p \, \mathrm{e}^{\frac{2ipk\pi}{n}}$.

Démontrer, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$: $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{p=0}^{n-1} b_p \, \mathrm{e}^{-\frac{2ipk\pi}{n}}$.

Exercice 19
Soit $(n,z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$. On pose : $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(z+\omega^k\right)^n$.

Lieux de points

Exercice 20

1. $(*)$ On note $f : z \mapsto \dfrac{1}{z-i}$. Déterminer $f(\mathbb{R})$.

2. On note $f : z \mapsto \dfrac{z-2}{z-6}$. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{6\}$ tels que : $f(z) \in i\mathbb{R}$.

3. On note $f : z \mapsto \dfrac{z+1}{\bar{z}-1}$. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tels que : $f(z) \in \mathbb{R}$.

4. On note $f : z \mapsto \dfrac{z+|z|}{2}$. Déterminer $f(\mathbb{C})$.

Exercice 21
Représenter graphiquement les ensembles suivants.

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = 2\}$

2. $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant |z-i| \leqslant 3\}$

3. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leqslant 3\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| \leqslant 3\}$

4. $\{z \in \mathbb{C} \mid \max\big(\mathrm{Re}\,(z-i), \mathrm{Im}\,(z+1)\big) \leqslant 2\}$

5. $(*)$ $\{z \in \mathbb{C} \mid \big|\mathrm{Re}\,(z-1-i)\big| + \big|\mathrm{Im}\,(z-1-i)\big| \leqslant 2\}$

6. $(*)$ $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| + |z-1| = \sqrt{5}\}$

Oraux CCINP

Exercice 22
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On pose : $z = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose : $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2. On pose : $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Démontrer : $S = \dfrac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.