Colles

Semaine 6 : 7 octobre - 11 octobre

I. Questions de cours

Exercice 1
Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 2
Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

Démontrer :

$$A \cup B = A \ \Leftrightarrow \ B \subset A$$

Exercice 3
Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

Démontrer :

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$$

II. Exercices

Opérateurs ensemblistes

Exercice 4
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Démontrer :

$$\big(A \cap B = A \cup B\big) \ \Rightarrow \ (A = B)$$

2. Démontrer :

$$A \setminus (A \setminus B) \ = \ A \cap B$$

Exercice 5
Soit E un ensemble.

Soient A, B et C des parties de E.

Démontrer que les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) $(A \setminus B) \subset C$

(ii) $(A \setminus C) \subset B$

(iii) $A \subset (B \cup C)$

Exercice 6

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

a) Que valent $A \setminus \varnothing$ et $A \setminus A$?

b) Montrer : $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

c) Montrer : $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$.

Exercice 7

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

a) Montrer : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) Montrer : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c) Montrer : $(A \cap B = A \cup B) \;\Leftrightarrow\; A = B$.

Exercice 8

Soit E un ensemble non vide.

Soient A et B des parties de E.

Résoudre, en discutant éventuellement sur la nature des parties A et B, l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}) = \varnothing$, d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

Exercice 9

Soit E un ensemble.

Soient A, B et C des parties de E.

Montrer : $\left.\begin{array}{ccc} A \cup B & \subset & A \cup C \\ A \cap B & \subset & A \cap C \end{array}\right\} \Rightarrow B \subset C$.

II.1. Ensemble des parties d'un ensemble E

Exercice 10

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

1. Démontrer que $\mathscr{P}(A \cap B) \;=\; \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

2. ***a)*** Démontrer que $\mathscr{P}(A \cup B) \;\supset\; \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

b) Y a-t-il égalité ?

Exercice 11

On note $E = \{1\}$ et $F = \{1, \pi\}$.

a) Détailler $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ et $\mathscr{P}(F)$.

b) Est-ce que l'un est inclus dans l'autre ?

Étude de fonctions

Exercice 12

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2}$

b. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \ln(2x+3)$

c. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2+1}$

d. $f : x \mapsto \ln(x^5+1)$

Exercice 13 *Étude de fonctions*

a. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

b. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^x}$

c. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(x)}}$

d. $f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$

e. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

f. $f : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

Théorème de la bijection

Exercice 14

Pour tout entier n positif, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) \ = \ \mathrm{e}^x + nx^2 - 3$$

1. ***a)*** Montrer que f_n est continue et dérivable sur son ensemble de définition.
Dresser son tableau de variations.

b) Donner l'équation de la tangente de f_n en 1.

c) Tracer dans un même repère les courbes de f_0, f_1 et f_2.

d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n.

e) Préciser la valeur de u_0. Dans la suite on supposera que $n \geqslant 1$.

f) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, 1[$.

2. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in]0, 1[,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).

c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

d) On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
Calculer la limite de $\mathrm{e}^{u_n} + n\, u_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.

e) Donner enfin la valeur de ℓ.

f) Montrer que $\sqrt{\dfrac{n}{2}}\, u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 15

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \mapsto x + \ln(x)$.

a. Dresser le tableau de variations de f.

b. Montrer que l'équation $f(x) = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
On la note u_n.

c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 16
On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in \,]0,1[$.

b. Démontrer que, pour tout $n > 0$: $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
En déduire que : $\forall n > 0,\ x_n < x_{n+1}$.

c. Démontrer que (x_n) converge et que sa limite ℓ est telle que $0 < \ell \leqslant 1$.

d. Démontrer que : $\forall n > 0,\ x_n \leqslant \ell$.

e. En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 17
Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) \ = \ x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

3. ***a)*** Démontrer :

$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

4. ***a)*** Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer : $\ell \geqslant 1$.

b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$.
En déduire une contradiction.

c) Déterminer la limite de (v_n).

5. ***a)*** Montrer : $\forall n \geqslant 1,\ v_n \leqslant 3$.

b) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.

Exercice 18
Pour tout entier naturel n non nul, on considère $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} + nx$. On appelle $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) ***a.*** Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

b. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) ***a.*** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

b. Montrer que les droites (D_n) et (D_n') d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de $(\mathscr{C}_n)$.

c. Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n, de $(\mathscr{C}_n)$.

d. Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ en A_1 puis tracer la droite (T_1) ainsi que l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_1)$.

3) ***a.*** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.

b. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 19
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n par : $f_n(x) = x^5 + n \times x - 1$.

a. Faire l'étude de la fonction f_n.

b. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On la notera u_n.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Partie entière

Exercice 20

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

b. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

c. Démontrer alors que si p et q sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors :

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k\,\frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)\,(q-1)}{2}$$

Exercice 21
Soient x et y deux nombres réels, et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer : $\lfloor x + y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
Y a-t-il des cas d'égalité ? D'inégalité stricte ?

2. Démontrer : $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 22
Soit $(n, x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$. Donner une expression sans symbole de sommation du réel $\sum\limits_{p=0}^{n} \operatorname{ch}(x + py)$.

Exercice 23
Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\prod\limits_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 24
Résoudre l'équation $5\operatorname{ch}(x) - 4\operatorname{sh}(x) = 3$ d'inconnue réelle x.

Exercice 25
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on considère le système d'inconnue (x,y) appartenant à $\mathbb{R}^2$:

$$(S_{a,b}) \left\{ \begin{array}{rcrcl} \mathrm{ch}(x) & + & \mathrm{ch}(y) & = & a \\ \mathrm{sh}(x) & + & \mathrm{sh}(y) & = & b \end{array} \right.$$

Dans toute la suite de cet exercice, (a,b) désigne un couple de réels.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \mathrm{ch}(x) & + & \mathrm{ch}(y) & = & a \\ \mathrm{sh}(x) & + & \mathrm{sh}(y) & = & b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y & = & a+b \\ (a-b)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y & = & a+b \end{array} \right.$$

2. Montrer que si $(S_{a,b})$ admet des solutions alors $a \geqslant 2$, $a+b > 0$ et $a-b > 0$.

3. On suppose : $a \geqslant 2$, $a+b > 0$ et $a-b > 0$. Montrer que le couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est une solution de $(S_{a,b})$ si et seulement si $(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^y)$ est une système de solutions de l'équation d'inconnue réelle z :

$$z^2 - (a+b)\,z + \frac{a+b}{a-b} \;=\; 0$$

En distinguant alors trois cas en fonction du discriminant de l'équation du second degré précédente, résoudre le système d'équations $(S_{a,b})$.