Colles

Semaine 5 : 30 septembre - 4 octobre

I. Questions de cours

Exercice 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 2

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=i+1}^{n} \dfrac{i}{j} \right) = \dfrac{(n-1)\,n}{4}$.

Exercice 3

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

II. Exercices

Étude de fonctions

Exercice 4

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2}$

b. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \ln(2x+3)$

c. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2+1}$

d. $f : x \mapsto \ln(x^5+1)$

Exercice 5 *Étude de fonctions*

a. $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$

b. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

c. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

d. $f : x \mapsto 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$

e. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^x}$

f. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/\ln x}$

g. $f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$

h. $f : x \mapsto x\sqrt{x}$

i. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

j. $f : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

Théorème de la bijection

Exercice 6

Pour tout entier n positif, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n(x) \ = \ \mathrm{e}^x + nx^2 - 3$$

1. ***a)*** Montrer que f_n est continue et dérivable sur son ensemble de définition.
Dresser son tableau de variations.

b) Donner l'équation de la tangente de f_n en 1.

c) Tracer dans un même repère les courbes de f_0, f_1 et f_2.

d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n.

e) Préciser la valeur de u_0. Dans la suite on supposera que $n \geqslant 1$.

f) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0,1[$.

2. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).

c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

d) On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
Calculer la limite de $\mathrm{e}^{u_n} + n\,u_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.

e) Donner enfin la valeur de ℓ.

f) Montrer que $\sqrt{\dfrac{n}{2}}\,u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \mapsto x + \ln(x)$.

a. Dresser le tableau de variations de f.

b. Montrer que l'équation $f(x) = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
On la note u_n.

c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 8

On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0,1[$.

b. Démontrer que, pour tout $n > 0$: $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
En déduire que : $\forall n > 0,\ x_n < x_{n+1}$.

c. Démontrer que (x_n) converge et que sa limite ℓ est telle que $0 < \ell \leqslant 1$.

d. Démontrer que : $\forall n > 0,\ x_n \leqslant \ell$.

e. En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 9

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) \;=\; x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

3. ***a)*** Démontrer :

$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

4. ***a)*** Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer : $\ell \geqslant 1$.

b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$.
En déduire une contradiction.

c) Déterminer la limite de (v_n).

5. ***a)*** Montrer : $\forall n \geqslant 1,\ v_n \leqslant 3$.

b) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.

Exercice 10

Pour tout entier naturel n non nul, on considère $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} + nx$. On appelle $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) **a.** Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

b. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

b. Montrer que les droites (D_n) et (D_n') d'équations $y = nx$ et $y = nx+1$ sont asymptotes de $(\mathscr{C}_n)$.

c. Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n, de $(\mathscr{C}_n)$.

d. Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ en A_1 puis tracer la droite (T_1) ainsi que l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_1)$.

3) **a.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.

b. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 11
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n par : $f_n(x) = x^5 + n \times x - 1$.

a. Faire l'étude de la fonction f_n.

b. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On la notera u_n.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.

Partie entière

Exercice 12

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

b. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

c. Démontrer alors que si p et q sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors :

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k\,\frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)\,(q-1)}{2}$$

Exercice 13
Soient x et y deux nombres réels, et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer : $\lfloor x + y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
Y a-t-il des cas d'égalité ? D'inégalité stricte ?

2. Démontrer : $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 14
Soit $(n, x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$. Donner une expression sans symbole de sommation du réel $\sum_{p=0}^{n} \operatorname{ch}(x + py)$.

Exercice 15
Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 16
Résoudre l'équation $5\operatorname{ch}(x) - 4\operatorname{sh}(x) = 3$ d'inconnue réelle x.

Exercice 17

1. Étudier la fonction $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.

2. Montrer que la fonction th réalise une bijection entre deux intervalles à déterminer et donner l'expression de la réciproque de cette bijection à l'aide de fonctions usuelles. On notera argth sa bijection réciproque.

3. Déterminer la dérivée de argth.