Colles

Semaine 4 : 23 septembre - 27 septembre

I. Questions de cours

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut la somme des n premiers entiers ? Le démontrer.

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut la somme des n premiers carrés entiers ? Le démontrer.

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut la somme des n premiers cubes entiers ? Le démontrer.

Exercice 4
Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j} \right) = \frac{(n-1)n}{4}$

Exercice 5
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

II. Exercices

Logique

Exercice 6
Soient p, q et r trois propositions. Démontrer :

1) $\texttt{NON}(p \texttt{ ET } q) \iff \texttt{NON}(p) \texttt{ OU } \texttt{NON}(q)$

2) $\texttt{NON}(p \texttt{ OU } q) \iff \texttt{NON}(p) \texttt{ ET } \texttt{NON}(q)$

3) $p \texttt{ ET } (p \texttt{ OU } q) \iff p$

4) $p \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } q) \iff p$

5) $p \texttt{ ET } (q \texttt{ OU } r) \iff (p \texttt{ ET } q) \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } r)$

6) $p \texttt{ OU } (q \texttt{ ET } r) \iff (p \texttt{ OU } q) \texttt{ ET } (p \texttt{ OU } r)$

7) $\big((p \Rightarrow q) \texttt{ ET } (q \Rightarrow r)\big) \implies (p \Rightarrow r)$

8) $(p \Rightarrow q) \implies \big((r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)\big)$

Exercice 7
Parmi les propositions ci-dessous, exhiber un élément qui permet de satisfaire celles qui sont justes.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 3$

2. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ x \leqslant n$

3. $\exists p \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ p \leqslant n$

4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^y = x\,z^2$

Équations

Exercice 8
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\dfrac{5}{3-x} = 3 - \dfrac{x+4}{3}$

b) $x + 1 = \sqrt{\dfrac{x}{6} + 6}$

c) $\dfrac{5}{3x-2} = \dfrac{1}{x-4}$

d) $\dfrac{2}{x-3} = 3$

e) $x + \dfrac{2}{6 - \dfrac{3}{x-1}} = 1$

Exercice 9
Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{x} + 1 = 2x$

2. $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x-1} = 2 - x + x^2$

3. $|x+1| + |2x+1| = 0$

4. $(m-2)\,x^2 + 2(m+1)\,x + m - 14 = 0$, où m est un paramètre réel.

Inéquations

Exercice 10
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x + 2 \geqslant \sqrt{x+5}$

b) $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1$

c) $|4 - 2x| \leqslant 8$

d) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x(x-1)} \leqslant 1$

e) $\sqrt{x+5} \geqslant \sqrt{x^2-4}$

Exercice 11
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x^2 - 3x - 3 \leqslant 0$

b) $\dfrac{x-2}{x+1} > \dfrac{2x+1}{3x-2}$

c) $\sqrt{-x^2 + x + 3} \leqslant 2x + 1$

d) $|2x - 1| \leqslant x^2 - x - 1$

e) $|3 - 2x| \geqslant \sqrt{-2x^2 + x + 1}$

f) $|3x^2 + 2x - 1| < |-x^2 + 2x + 3|$

Récurrence

Exercice 12
Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3^{2n} + 2^{6n-5}$ est un multiple de 11.

Exercice 13
Notons (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2$$

Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur sa valeur et démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 14
On note (w_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{3}(w_n + 4n + 6) \end{cases}$$

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$.

Exercice 15
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}}$$

Conjecturer puis démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule explicite de u_n en fonction de n.

Exercice 16
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de u_0 et n.

Sommes finies

Exercice 17
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} \qquad \text{et} \qquad v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{k}}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Puis préciser la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. En déduire la monotonie et la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 18

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$

2. En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$$

Exercice 19

Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k$.

Dans cet exercice, on considère n carrés emboîtés : le plus petit est de côté S_1, le suivant de côté S_2, ..., le dernier est de côté S_n.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note C_i l'aire du carré de côté S_i.

a. Soit $k \in [\![2, n]\!]$, exprimer $C_k - C_{k-1}$ en fonction de S_k et S_{k-1}.

b. En déduire une expression de $C_k - C_{k-1}$ en fonction de k.

c. Déduire de la question précédente que $C_n - C_1 = \sum\limits_{k=2}^{n} k^3$.

d. Conclure sur la relation liant la somme des n premiers entiers et la somme des n premiers cubes.

Exercice 20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$.
On définit la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k.q^k$.
On définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

a. Calculer f_n', la dérivée de la fonction f_n par rapport à la variable x.

b. En déduire une relation entre u_n et $f_n'(q)$.

c. En reconnaissant une somme classique, simplifier l'expression de $f_n(x)$.

d. Calculer f_n' à l'aide du résultat de la question précédente.

e. En déduire le résultat souhaité.

Exercice 21

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]1, +\infty[$. Démontrer : $\dfrac{a^n - 1}{a-1} \leqslant n\, a^{n-1}$.

Sommes doubles

Exercice 22

Calculer les sommes doubles suivantes.

a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j} \right)$

b. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$

c. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$

d. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$

e. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i-j)^2$

f. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j$

Exercice 23
Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les sommes et produits suivants.

a. $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \max(i, j) \right)$

b. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i + j)$

c. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i + j)^2$

d. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a^{i+j}$

e. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a^{i+j}$

f. $\sum_{k=0}^{n} \exp(kx)$

Exercice 24
Soit $(a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$$

Étude de fonctions

Exercice 25
Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2}$

b. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \ln(2x + 3)$

c. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2 + 1}$

d. $f : x \mapsto \ln(x^5 + 1)$

Exercice 26 *Étude de fonctions*

a. $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$

b. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$

c. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - 1}$

d. $f : x \mapsto 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$

e. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 + \mathrm{e}^x}$

f. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/\ln x}$

g. $f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$

h. $f : x \mapsto x\sqrt{x}$

i. $f : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

Exercice 27
Montrer (dans cet ordre !) les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$

Exercice 28

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

b. Faire l'étude graphique de la fonction suivante.

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x^2) \end{array}$$