Colles

Semaine 32 : 16 juin - 20 juin

I. Questions de cours

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers d'un dé non pipé à 6 faces.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la v.a. prenant la valeur du résultat obtenu au $k^{\text{ème}}$ lancer.
On note : $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Déterminer la loi de Y_n.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit X une v.a. finie à valeurs dans $[\![0, n]\!]$

1. Démontrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\big(\{X = k\} \big) = \mathbb{P}\big(\{X > k-1\} \big) - \mathbb{P}\big(\{X > k\} \big)$.

2. Démontrer : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{X > k\} \big)$.

Exercice 3

Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.

II. Exercices

Loi d'une v.a.

Exercice 4

Dans chacune des expériences suivantes, reconnaître la loi de X.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. On note X la v.a. égale au nombre d'objets dans le premier tiroir.

2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. On note X la v.a. égale au nombre de bosses de l'animal sorti de l'enclos.

3. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de coeur. On note X la v.a. égale au nombre de cartes retournées.

4. On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon et d'une fille sont identiques. On note X la v.a. égale au nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.

Exercice 5
On joue avec une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0,1[$, en effectuant des lancers mutuellement indépendants.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers de cette pièce. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$.
On note X la v.a. réelle égale au rang du premier pile. Notons qu'il est possible de ne jamais obtenir pile au cours des n lancers. Dans ce cas, la v.a. X prend la valeur $n+1$.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

3. Quelles en sont les limites pour $n \to +\infty$?

Exercice 6

- On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue n tirages successifs sans remise.
- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
  - × on note X_k la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la boule tirée à la $k^{\text{ème}}$ étape.
  - × on dit qu'il y a un pic à la $k^{\text{ème}}$ étape si $X_k > \max\ \big(X_1, \dots, X_{k-1}\big)$.
  - × on note T_k la variable indicatrice de l'événement : il y a un pic au $k^{\text{ème}}$ tirage.
    (T_k prend la valeur 1 s'il y a un pic au $k^{\text{ème}}$ tirage et la valeur 0 sinon)

  On convient qu'il y a toujours un pic au premier tirage.
- On note S_n le nombre de pics au cours des n tirages.

1. Déterminer $\mathbb{P}\big(\,\{S_n = 1\}\,\big)$ et $\mathbb{P}\big(\,\{S_n = n\}\,\big)$.

2. Déterminer la loi de T_k.

3. Donner l'espérance de S_n.

Couples de v.a.

Exercice 7
Soit (X, Y) un couple de v.a.r. dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant.

1. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).

2. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

4. Déterminer les lois de $U = XY$ et $V = \inf(X, Y)$.

5. Déterminer la loi jointe du couple (U, V).

Exercice 8
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages successifs avec remise. On note X le plus petit des deux numéros obtenus, et Y le plus grand.

1. Déterminer la loi de (X, Y).

2. En déduire celles de X et de Y.

3. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9
On lance n dés équilibrés de manière indépendante. On observe les dés ayant donné 6, puis on relance uniquement les dés n'ayant pas donné 6. On note X le nombre de dés ayant donné 6 au premier lancer et Y le nombre de dés ayant donné 6 au total.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

2. Calculer $\mathbb{P}\big(\{Y=k\} \mid \{X=i\}\big)$. En déduire la loi de Y et son espérance.

3. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 10
On lance 3 fois une pièce équilibrée. On note X la v.a.r. égale à 1 si le premier lancer donne pile, et 0 sinon. On note Y la v.a.r. égale au nombre de faces obtenus.

1. Déterminer les lois conjointes et marginales de (X, Y).

2. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 11
On considère n cartes numérotées de 1 à n. On permute au hasard les cartes de jeu et on note Y la v.a.r. égale au nombre de cartes qui occupent leur place naturelle (on dit que la carte numéro k est à sa place si c'est la $k^{\text{ème}}$ en partant du haut du paquet). Soit X_k la v.a.r. qui vaut 1 si la $k^{\text{ème}}$ carte est à sa place et 0 sinon.

1. Donner un lien entre Y et les X_1,...X_n.

2. Montrer que $E(Y) = 1$.

Exercice 12
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une boîte contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire un jeton au hasard, on note son numéro et on le remet dans la boîte.
Si le numéro est i, alors on tire i jetons sans remise et on les distribue au hasard dans trois boîtes U_1, U_2, U_3. On note X_k la v.a.r. égale au nombre de jetons dans l'urne k L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$.

1. On note X la v.a.r. égale au numéro du jeton qu'on a tiré au début. Donner la loi de X.

2. Pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, donner la loi du couple (X, X_k).

3. Soit $k \in [\![1, 3]\!]$. Calculer $\mathbb{E}(X_k)$.
On pourra remarquer que les urnes jouent un rôle symétrique.

4. Loi du triplet (X_1, X_2, X_3).
   a) Déterminer la loi de (X_1, X_2, X).
   b) En déduire la loi de (X_1, X_2, X_3).

5. Soit $k \in [\![1, 3]\!]$. On définit : $Y_k = \dfrac{X_k}{X}$. Calculer les espérances de Y_k et Y_k^2.

6. Donner un équivalent de la variance de Y_k lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 13
Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. On considère, définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$, deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes, représentant chacune le résultat d'un dé équilibré à n faces. On fixe $a \in [\![1,n]\!]$.
Considérons la v.a.r. Y définie par :

$$Y : \omega \mapsto \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leqslant a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y.

2. Calculer l'espérance de Y et la comparer avec $\mathbb{E}(X_1)$.

3. Quelle valeur de a choisir pour maximiser $\mathbb{E}(Y)$?

Exercice 14
Soit $n \in [\![3,+\infty]\!]$. Soit $p \in]0,1[$. Soient Y et Z deux v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n,p)$.
On pose : $S = Y + Z$ et $T = Y - Z$.

1. Déterminer $\text{Cov}(S,T)$.

2. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 15
On considère un nombre entier n supérieur ou égal à 2 et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On extrait de cette urne, successivement et sans remise, deux jetons. La v.a. X_1 désigne le numéro du premier jeton, X_2 celui du $2^{\text{ème}}$.

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

2. Calculer la covariance de X_1 et X_2.

3. Calculer $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$.

Exercice 16
Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches. On effectue des tirages successifs de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le second avec remise, le troisième sans remise, etc. jusqu'à vider l'urne.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la v.a. qui prend la valeur 1 si la boule noire est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage (pour la première fois ou non) et 0 sinon. On note X le nombre de fois où on obtient la boule noire sur la totalité du processus et Y le premier instant où on la tire.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X_k.

2. Déterminer la loi de Y.

3. Calculer $\mathbb{P}\big(\{X = 1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$.

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
On pourra calculer $\text{Cov}(X_i, X_{i+j})$ *en discutant selon la parité de* i.

Marches aléatoires

Exercice 17
Un individu, armé d'une pièce de paramètre $p \in \,]0,1[$, adopte une drôle de façon de se déplacer. À chaque pas, il lance sa pièce. Si celle-ci donne pile, il fait un bond d'un mètre. Sinon il fait un bond de deux mètres. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le nombre moyen de mètres effectués au bout de n bonds de la sorte.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n la v.a. égale au nombre de bonds pour atteindre exactement une distance de n mètres.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big(\,\{Y_n = k\}\,\big) \;=\; p\,\mathbb{P}\big(\,\{Y_{n-1} = k-1\}\,\big) + (1-p)\,\mathbb{P}\big(\,\{Y_{n-2} = k-1\}\,\big)$$

b) En déduire $\mathbb{E}(Y_n)$.

Exercice 18
Soit $p \in \,]0,1[$. Une particule effectue un mouvement aléatoire sur un axe horizontal, gradué de 1 en 1, de $-\infty$ à $+\infty$. À chaque étape, la particule peut se déplacer de $+1$ avec probabilité p et de -1 avec probabilité $1-p$. Initialement, la particule part de 0 et les sauts sont mutuellement indépendants. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la position de la particule après n étapes.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

2. Pour quelle valeur de p la v.a. X_n est-elle centrée ?

3. Dans cette question, on suppose : $p \in \,\big]\frac{1}{2}, 1\big[$.

a) Comparer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, les quantités $\mathbb{P}\big(\,\{X_n \leqslant 0\}\,\big)$ et $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\,X_n}\right)$.
On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\big(\,\{X_n \leqslant 0\}\,\big) \;\leqslant\; \left(2\sqrt{p\,(1-p)}\right)^n$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la position la plus basse occupée par la particule entre les étapes 0 et n incluses. Exprimer Z_n en fonction de X_1, …, X_n et démontrer :

$$\frac{\mathbb{E}(Z_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Fonction génératrice (des probabilités)

Exercice 19 *(d'après* `CCINP-1 2019 - MP`*)*
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}\big(\,\{X = n\}\,\big)$, la fonction génératrice de X est :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, t^n$$

1. Démontrer que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer :

$$\forall t \in \,]-1,1[,\; G_S(t) = G_{X_1}(t).G_{X_2}(t)$$

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

3. Un sac contient quatre boules :

- × une boule numérotée 0,
- × deux boules numérotées 1,
- × et une boule numérotée 2.

On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés.

Déterminer pour tout $t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

Oraux CCINP

Exercice 20

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points, et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

a) Déterminer la loi de X.

b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 21

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.

2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\{Y=k\} \mid \{X=i\}\big)$.

b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 22
Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.

2. ***a)*** Déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{X = 2\}\big)$.

b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

3. ***a)*** Calculer $\mathbb{E}(X)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 23
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.

2. Déterminer la loi de Y.