

Colles

Semaine 31 : 2 juin - 6 juin

I. Questions de cours**Exercice 1**

Démontrer que la série $\sum \frac{4n^2 + 5n}{5^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$ est convergente.

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit p un projecteur de E .

Démontrer : $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit s une symétrie de E .

Démontrer : $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

II. Exercices**Nature d'une série****Exercice 6**

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2}$

f. $\sum \frac{1}{n 2^n}$

j. $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

b. $\sum \frac{n+1}{(n+3)^2}$

g. $\sum e^{\frac{1}{n^2}}$

k. $\sum \frac{n}{\ln(n)}$

c. $\sum n^4 e^{-n}$

h. $\sum \frac{1}{3^n - 2^n}$

l. $\sum \frac{\ln(n)}{n}$

d. $\sum n^n e^{-n}$

i. $\sum \frac{n+2}{n^3+1}$

m. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$

e. $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

$$n. \sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^3} \right)$$

$$r. \sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$$

$$v. \sum \frac{\ln(n)}{2^n}$$

$$o. \sum \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{n}$$

$$s. \sum \frac{1}{n^4 - 3^n}$$

$$w. \sum \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$$

$$p. \sum \frac{1}{\sqrt{n!}}$$

$$t. \sum \ln \left(\frac{n^2 + n^4}{2n^4} \right)$$

$$x. \sum \left(\frac{5n+1}{6n+2} \right)^n$$

$$q. \sum \frac{1}{n^2 - n}$$

$$u. \sum \sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1}}$$

Exercice 7

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

$$a. \sum \frac{n!}{n^n}$$

$$c. \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}}, \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^*$$

$$b. \sum \frac{a^n + 1}{b^n}, \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$$

Exercice 8

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

$$a. \sum \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$c. \sum \left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{n}}$$

$$e. \sum \frac{\sin(n^3)}{n^2}$$

$$b. \sum \frac{(n!)^3}{(3n)!}$$

$$d. \sum \left(\frac{1}{n} \right)^{1+\frac{1}{n}}$$

$$f. \sum \sqrt{n} \sin \left(\frac{1}{n} \right)$$

Nature d'une série à l'aide d'un développement asymptotique**Exercice 9**

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

$$a. \sum \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right)$$

$$c. \sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$b. \sum \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)$$

Calcul de sommes à vue (sommes usuelles)

Exercice 10

Étudier la nature et calculer la somme (si elle existe) des séries suivantes (on pourra discuter selon la valeur de x , dans les questions où un x intervient).

$a. \sum \frac{7}{2^{2n-5}}$	$g. \sum \frac{4n^2 + 5n}{5^n}$	$m. \sum \frac{n(n-1)x^n}{n!}$
$b. \sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$	$h. \sum \frac{n-1}{3^n}$	$n. \sum \frac{n^2 8^n}{n!}$
$c. \sum \frac{n}{2^n}$	$i. \sum \frac{2n^2}{n^3 - 1}$	$o. \sum \frac{(-1)^n}{4^n}$
$d. \sum n^2 x^n$	$j. \sum \frac{3(-2)^n}{n!}$	$p. \sum \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$
$e. \sum \frac{n}{3^{2n+1}}$	$k. \sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$	$q. \sum \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$
$f. \sum \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$	$l. \sum \frac{n+7}{2^n n!}$	$r. \sum \frac{n^2 - n}{(n+3)!}$

Exercice 11

Justifier la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

$a. \sum \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$	$b. \sum \frac{1}{n(n+1)}$	$c. \sum \frac{1}{(3n)!}$
--	----------------------------	---------------------------

Pour la question **c.**, on pourra déterminer la valeur de $1 + j^n + j^{2n}$ pour n congru à 0, 1 ou 2 modulo 3.

Suites adjacentes

Exercice 12

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

1) a. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux suites adjacentes.

b. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et une suite (α_n) de limite nulle tels que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \alpha_n$$

(le réel γ est appelé constante d'Euler)

2) a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \gamma \leq u_n$.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |\gamma - u_n| \leq |v_n - u_n|$.

c. Écrire un programme **Python** qui affiche une valeur approchée de γ à 10^{-4} près.

Séries de Bertrand

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Cas $\alpha \neq 1$. Comparer asymptotiquement u_n à $\frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}$.

En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

(indication : on distinguera les cas $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$)

2. Traiter le cas $\alpha = 1$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Reste d'une série convergente

Exercice 14 (d'après INP)

Pour $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Encadrer R_n et en déduire un équivalent de R_n .
2. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{R_n}{S_n}$ selon α .
3. Soit $x_n = R_{n^2}/R_n$. Discuter la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum (-1)^n x_n$.

Formule de Stirling

Exercice 15

Le but est de prouver l'équivalent suivant (à connaître) :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!}$ et $v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.
 - a. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$, puis de la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - b. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

2. Intégrales de Wallis

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt$.

- a. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$$

- b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ et $(n+1) w_{n+1} w_n = \frac{\pi}{2}$.

- c. Déduire des questions précédentes deux équivalents de w_{2n} , et conclure.

Séries à termes positifs et critères de convergence des séries

Exercice 16 (d'après INP)

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$b_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{a_n}{b_n}$$

1. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = 1 - \frac{1}{b_n}$.
 b) En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
 Étudier la convergence de la suite (b_n) .

Exercice 17

1. a) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que : $0 \leq x^2 \leq x$.
 b) On considère (x_n) une suite de réels positifs.
 Montrer que : $\sum x_n$ converge $\Rightarrow \sum x_n^2$ converge.
2. Exhiber un contre-exemple dans le cas où la série étudiée n'est pas à termes positifs.

Exercice 18

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On suppose que les séries $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

1. Démontrer : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, 2ab \leq a^2 + b^2$.
2. À l'aide de l'inégalité précédente, démontrer que la série $\sum u_n v_n$ est (absolument) convergente.

Exercice 19

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$

- 1) a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- 2) On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.
 a. Montrer que pour tout $t > 0$: $\ln(1+t) \leq t$.
 b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1} u_n}$.
 c. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.
 d. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.
- 3) a. Montrer, à l'aide de la question 2b :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq v_{n+p+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$$

- b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \ell - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$.
- c. En déduire : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{2^n \ell}$.

Règle de Raabe-Duhamel

Exercice 20 (d'après TPE - écrit E3A 2009)

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs.

On suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ telle que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Soient (x_n) et (y_n) deux éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que, à partir d'un certain rang :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

Montrer : $x_n = O_{n \rightarrow +\infty}(y_n)$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \neq \beta$.

Trouver un équivalent de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{w_{n+1}}{w_n}$, où $w_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

3. Montrer que si $\beta > 1$ (resp. $\beta < 1$), alors la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge).

4. Montrer que pour $\beta = 1$, on ne peut pas conclure a priori sur la nature de la série $\sum u_n$.

(indication : on pourra considérer les cas des séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n \ln^2(n)}$)

Sommes télescopiques

Exercice 21

On considère la suite (a_n) est définie par : $\begin{cases} a_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & a_{n+1} = e^{-a_n} a_n \end{cases}$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$.

b. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

d. On pose $b_n = \ln(a_n)$. Calculer $b_{n+1} - b_n$ en fonction de a_n .

e. En déduire la nature de $\sum a_n$.

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = \frac{u_n}{f(u_n)} \end{cases}$$

1) a. Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.

b. Montrer que (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.

c. En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

2) a. Montrer que (v_n) est strictement négatif.

b. Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$.

d. En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Dans la suite, on admettra :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{x^2}{4} \leq 1 - \frac{2}{e^x + e^{-x}} \leq x^2$$

3) **a.** En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

b. En utilisant le résultat de l'exercice 17, déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 23

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1]$.

2. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

3. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.

4. Prouver que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

5. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Comparaison séries intégrales

Exercice 24

On définit la fonction :

$$\begin{aligned} f &: [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 2$ on a : $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit l'intégrale : $I_n = \int_2^n f(x) dx$.

a. En utilisant l'inégalité de la question 1., démontrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$$

b. On définit la fonction F suivante :

$$\begin{aligned} F &: [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned}$$

Calculer la dérivée de F .

En déduire une expression de I_n en fonction de n .

c. Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

a. Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \leq \int_{k-1}^k f(x) dx$$

b. En déduire : $\forall n \geq 3, I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c. Démontrer : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

4. On considère $\alpha \in \mathbb{R}$ et on définit, pour tout entier $n \geq 2$:

$$T_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k^2 - 1)^\alpha}$$

a. Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k - 1} + \frac{b}{k + 1}$$

En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

b. Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?

Exercice 25

On note f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

1) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

2) Montrer : $\forall k \geq 3$, on a : $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note : $S_n = \sum_{k=2}^n f(k)$.

3) **a.** Montrer que : $\forall n \geq 3, S_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \int_2^n f(t) dt \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}$$

c. Établir que : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4) À l'aide de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5) **a.** Montrer, pour tout entier $n \geq 2$: $0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n \ln(n)}$.

(indication : on pourra commencer par démontrer que $v_n - \ell \leq v_n - u_n$)

b. En déduire une fonction en **Python** qui calcule une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Matrice d'une application linéaire

Exercice 26. Matrice d'un application linéaire

Dans chaque cas, déterminer la matrice de f dans la base canonique des espaces considérés puis préciser si f est bijective.

$$1. \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P + P' \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{ccc} f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a + b - c, a + d) \end{array}$$

Exercice 27

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$. On pose $u = (2, 4, -5)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (0, 1, -2)$.

1. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Calculer A'^2 et en déduire f^2 .

Exercice 28

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ associe $f(M) = M + (a + d)I_2$.

1. Montrer f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) .
3. a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Déterminer la matrice D de f dans cette base.
4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 29

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ par $\begin{cases} \varphi(e_i) = e_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq 3 \\ \varphi(e_4) = e_1 \end{cases}$

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$ puis calculer A^4 .
2. En déduire que φ est un automorphisme et déterminer φ^{-1} .

Exercice 30

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A .

1. Déterminer $\text{rg}(f)$ puis en déduire $\text{Ker}(f)$.
2. Calculer f^4 .
3. On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$, $\varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.
a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.
4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 31

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi : P(X) \mapsto (1 - X^2)P''(X) - 3XP'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\varphi(1)$. L'endomorphisme φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
3. Dans cette question, on prend $n = 3$.
 - a) Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - b) Déterminer une base de $\text{Im}(\varphi)$ et une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

Exercice 32

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ avec :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 $M \mapsto {}^t M$ et $M \mapsto M + {}^t M$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer la matrice A de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire sans calcul supplémentaire la matrice de g relativement à la base $\mathcal{B}$.
4. Les applications f et g sont-elles des automorphismes? Si oui, déterminer l'application réciproque.
5. Si a et b sont deux automorphismes, est-ce que $a + b$ est également un automorphisme?

Généralités sur les applications linéaires**Exercice 33**

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$.

On note P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite définie par le système d'équations $\begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases}$.

1. Vérifier que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

On note p la projection sur P parallèlement à D .

2. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Calculer $p(u)$ et déterminer la matrice de p dans $\mathcal{B}$.

Exercice 34

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Montrer :

$$\left(\exists u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \text{Im}(u) = F \text{ et } \text{Ker}(u) = G \right) \Leftrightarrow \dim(F) + \dim(G) = n$$

2. **Exemple.**

Dans $\mathbb{R}^3$, F est le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $G = \text{Vect}((1, -1, 0))$.

- a) Déterminer un endomorphisme u dont l'image est F et le noyau est G .
- b) Exprimer la matrice de u dans la base canonique.

Projecteurs et symétries

Exercice 35

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ($E = F \oplus G$).

Pour tout élément $x \in E$, on note $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs tel que $x = x_F + x_G$.

On appelle alors projection sur F parallèlement à G , l'application p définie par :

$$\begin{aligned} p &: E \rightarrow E \\ x &\mapsto x_F \end{aligned}$$

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G , l'application s :

$$\begin{aligned} s &: E \rightarrow E \\ x &\mapsto x_F - x_G \end{aligned}$$

1. a) Démontrer : $p \circ p = p$ (on dit que p est idempotente).
- b) Démontrer : $F = \text{Im}(p)$ et $G = \text{Ker}(p)$.
- c) On note $q = \text{id}_E - p$. Démontrer que q est un projecteur.
- d) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer :

$$f \circ f = f \Leftrightarrow \begin{cases} E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) \\ f \text{ est le projecteur sur } \text{Im}(f) \text{ parallèlement à } \text{Ker}(f) \end{cases}$$

2. a) Démontrer : $s \circ s = \text{id}_E$ (on dit que s est involutive).
- b) Démontrer : $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.
- c) Démontrer : $s = 2p - \text{id}_E = p - q$.
- d) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer :

$$g \circ g = \text{id}_E \Leftrightarrow \begin{cases} E = \text{Ker}(g - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(g + \text{id}_E) \\ g \text{ est la symétrie par rapport à } \text{Ker}(g - \text{id}_E) \\ \text{parallèlement à } \text{Ker}(g + \text{id}_E) \end{cases}$$

3. a) Démontrer : $\text{Ker}(p) = \text{Im}(\text{id}_E - p)$.
- b) Démontrer : $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{id}_E - p)$.
4. On note $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G . On note enfin $\mathcal{B}$ la famille obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.
 - a) Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de E .
 - b) Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

Exercice 36

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

On considère p et q deux projecteurs de E .

1. Montrer : $p + q$ est un projecteur de $E \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. On suppose dans cette question que $p + q$ est un projecteur de E .
Montrer :

$$\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$$

$$\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) = \{0_E\}$$

$$\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$$

Matrices semblables - Changement de base

Exercice 37

Montrer que les matrices A et B ci-dessous sont semblables, et que les matrices C et D ne le sont pas, où :

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 38

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\text{Im}(B) = \text{Ker}(A)$, $\text{Ker}(B) = \text{Im}(A)$ et $\text{tr}(B) = \text{tr}(A)$.

Exercice 39

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que ces deux matrices sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 40

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$f^2 = g^2 = \text{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Montrer que la dimension de E est paire.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 41

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose : $\text{rg}(A) = \text{tr}(A) = 1$.

Montrer : $A^2 = A$.

Sous-espaces stables

Exercice 42

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer : u stabilise $H \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \text{Im}(u - \lambda \text{id}_E) \subset H$.
2. On suppose dans cette question qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver tous les sous-espaces stabilisés par u .

Exercice 43

On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer : $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id})$.

Donner alors un élément de $\text{Ker}(f^2) \setminus \text{Ker}(f)$.

2. Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose : $g^2 = f$.

a) Montrer que $\text{Ker}(f^2)$ est stable par g .

b) En déduire qu'un tel g n'existe pas.

Exercice 44

Notons $\mathcal{G} = \{u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \mid \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), u({}^t M) = {}^t(u(M))\}$.

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est un espace vectoriel.

2. Montrer que les éléments de $\mathcal{G}$ sont les éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ qui stabilisent $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $\mathcal{G}$.

II.1. Oraux CCINP**II.1.a) Séries****Exercice 45**

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n (\ln(n))^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) **Cas $\alpha \leq 0$**

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

b) **Cas $\alpha > 0$**

Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f : x \mapsto \frac{1}{x (\ln(x))^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Exercice 46

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 47

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
Démontrer :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \ln(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

Exercice 48

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

a) Démontrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^n u_n$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
Étudier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum f_n(x)$.

Exercice 49

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$: $\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

II.1.b) Algèbre linéaire**Exercice 50**

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :

- a) sans utiliser de matrice de f ,
b) en utilisant une matrice de f .

2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que : $Q = f(P)$.

Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

Exercice 51

On note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. A-t-on : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?

Exercice 52

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer : $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) \Rightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.
2. a) Démontrer : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.
b) Démontrer : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \Rightarrow E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

Exercice 53

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \rightarrow \mathbb{K}^3$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$P \mapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose : $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .