Colles

Semaine 30 : 2 juin - 6 juin

I. Questions de cours

Exercice 1
Démontrer que la série $\sum \dfrac{n^2\, 2^n - n\, 3^n}{n!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2
Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$

Exercice 3
À l'aide d'une comparaison série-intégrale, démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{n\, \ln(n)}$ est divergente.

Exercice 4
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit p un projecteur de E.
Démontrer : $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 5
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit s une symétrie de E.
Démontrer : $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

II. Exercices

Nature d'une série

Exercice 6
Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$

b. $\sum \dfrac{n+1}{(n+3)^2}$

c. $\sum n^4\, \mathrm{e}^{-n}$

d. $\sum n^n\, \mathrm{e}^{-n}$

e. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

f. $\sum \dfrac{1}{n\, 2^n}$

g. $\sum \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}$

h. $\sum \dfrac{1}{3^n - 2^n}$

i. $\sum \dfrac{n+2}{n^3+1}$

j. $\sum \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

k. $\sum \dfrac{n}{\ln(n)}$

l. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$

m. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$

n. $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$

o. $\sum \dfrac{3^{\frac{1}{n}}-1}{n}$

p. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$

q. $\sum \dfrac{1}{n^2-n}$

r. $\sum \dfrac{1}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}$

s. $\sum \dfrac{1}{n^4-3^n}$

t. $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+n^4}{2n^4}\right)$

u. $\sum \sqrt{\dfrac{n+2}{n^3-5n+1}}$

v. $\sum \dfrac{\ln(n)}{2^n}$

w. $\sum \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

x. $\sum \left(\dfrac{5n+1}{6n+2}\right)^n$

Exercice 7
Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \dfrac{n!}{n^n}$

b. $\sum \dfrac{a^n+1}{b^n}$, où $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$

c. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^a+(-1)^n}}$, où $a\in\mathbb{R}_+^*$

Exercice 8
Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

b. $\sum \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$

c. $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

d. $\sum \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$

e. $\sum \dfrac{\sin(n^3)}{n^2}$

f. $\sum \sqrt{n}\,\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Nature d'une série à l'aide d'un développement asymptotique

Exercice 9
Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}\right)$

b. $\sum \left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)$

c. $\sum \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Calcul de sommes à vue (sommes usuelles)

Exercice 10
Étudier la nature et calculer la somme (si elle existe) des séries suivantes (on pourra discuter selon la valeur de x, dans les questions où un x intervient).

a. $\sum \dfrac{7}{2^{2n-5}}$

b. $\sum \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

c. $\sum \dfrac{n}{2^n}$

d. $\sum n^2 x^n$

e. $\sum \dfrac{n}{3^{2n+1}}$

f. $\sum \dfrac{(-1)^n n^2}{3^n}$

g. $\sum \dfrac{4n^2+5n}{5^n}$

h. $\sum \dfrac{n-1}{3^n}$

i. $\sum \dfrac{2n^2}{n^3-1}$

j. $\sum \dfrac{3(-2)^n}{n!}$

k. $\sum \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

l. $\sum \dfrac{n+7}{2^n n!}$

m. $\sum \dfrac{n(n-1)x^n}{n!}$

n. $\sum \dfrac{n^2 8^n}{n!}$

o. $\sum \dfrac{(-1)^n}{4^n}$

p. $\sum \dfrac{2^{n+2}}{(n+1)!}$

q. $\sum \dfrac{n(n+3)}{3^{n+2}}$

r. $\sum \dfrac{n^2-n}{(n+3)!}$

Exercice 11
Justifier la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

a. $\sum \ln\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right)$ ***b.*** $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ ***c.*** $\sum \dfrac{1}{(3n)!}$

Pour la question ***c.***, on pourra déterminer la valeur de $1+j^n+j^{2n}$ pour n congru à 0, 1 ou 2 modulo 3.

Suites adjacentes

Exercice 12
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

1) ***a.*** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites adjacentes.

b. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et une suite (α_n) de limite nulle tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \alpha_n$$

(le réel γ est appelé constante d'Euler)

2) ***a.*** Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\gamma - u_n| \leqslant |v_n - u_n|$.

c. Écrire un programme **Python** qui affiche une valeur approchée de γ à 10^{-4} près.

Séries de Bertrand

Exercice 13
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \, \big(\ln(n)\big)^\beta}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Cas $\alpha \neq 1$. Comparer asymptotiquement u_n à $\dfrac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}$.
En déduire la nature de la série $\sum \, u_n$.
(indication : on distinguera les cas $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$)

2. Traiter le cas $\alpha = 1$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Reste d'une série convergente

Exercice 14 *(d'après* `INP`*)*
Pour $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$.

1. Encadrer R_n et en déduire un équivalent de R_n.

2. Étudier la convergence de la série $\sum \, \frac{R_n}{S_n}$ selon α.

3. Soit $x_n = R_{n^2}/R_n$. Discuter la nature des séries $\sum \, x_n$ et $\sum \, (-1)^n x_n$.

Formule de Stirling

Exercice 15
Le but est de prouver l'équivalent suivant (à connaître) :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi n} \, \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n^n \sqrt{n}}{\mathrm{e}^n \, n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

a. Déterminer la nature de la série $\sum \, v_n$, puis de la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \lambda \, \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \, \sqrt{n}$.

2. **Intégrales de Wallis**
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \, \big(\sin(t)\big)^n \, dt$.

a. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \, w_n$$

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ et $(n+1) \, w_{n+1} \, w_n = \dfrac{\pi}{2}$.

c. Déduire des questions précédentes deux équivalents de w_{2n}, et conclure.

Séries à termes positifs et critères de convergence des séries

Exercice 16 *(d'après* `INP`*)*
Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$b_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{a_n}{b_n}$$

1. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 - \dfrac{1}{b_n}$.

b) En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Étudier la convergence de la suite (b_n).

Exercice 17

1. ***a)*** Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que : $0 \ \leqslant \ x^2 \ \leqslant \ x$.

b) On considère (x_n) une suite de réels positifs.
Montrer que : $\sum x_n$ converge $\Rightarrow \sum x_n^2$ converge.

2. Exhiber un contre-exemple dans le cas où la série étudiée n'est pas à termes positifs.

Exercice 18
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
On suppose que les séries $\sum {u_n}^2$ et $\sum {v_n}^2$ convergent.

1. Démontrer : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \ 2\,ab \leqslant a^2 + b^2$.

2. À l'aide de l'inégalité précédente, démontrer que la série $\sum u_n\, v_n$ est (absolument) convergente.

Exercice 19
On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n + {u_n}^2 \end{array} \right.$

1) ***a.*** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

a. Montrer que pour tout $t > 0$: $\ln(1 + t) \leqslant t$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}\, u_n}$.

c. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

d. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

3) ***a.*** Montrer, à l'aide de la question 2b :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n\, u_n}$$

b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n\, u_n}$.

c. En déduire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2^n \ell}$.

Règle de Raabe-Duhamel

Exercice 20 *(d'après TPE - écrit E3A 2009)*
Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs.
On suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ telle que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

1. Soient (x_n) et (y_n) deux éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que, à partir d'un certain rang :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

Montrer : $x_n = \underset{n\to+\infty}{O}(y_n)$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \neq \beta$.
Trouver un équivalent de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{w_{n+1}}{w_n}$, où $w_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

3. Montrer que si $\beta > 1$ (resp. $\beta < 1$), alors la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge).

4. Montrer que pour $\beta = 1$, on ne peut pas conclure a priori sur la nature de la série $\sum u_n$.
(indication : on pourra considérer les cas des séries $\sum \dfrac{1}{n}$ *et* $\sum \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$*)*

Sommes télescopiques

Exercice 21
On considère la suite (a_n) est définie par : $\begin{cases} a_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \mathrm{e}^{-a_n}\, a_n \end{cases}$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$.

b. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

d. On pose $b_n = \ln(a_n)$. Calculer $b_{n+1} - b_n$ en fonction de a_n.

e. En déduire la nature de $\sum a_n$.

Exercice 22
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{f(u_n)} \end{cases}$$

1) ***a.*** Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.
b. Montrer que (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
c. En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

2) ***a.*** Montrer que (v_n) est strictement négatif.
b. Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$.

d. En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Dans la suite, on admettra :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{x^2}{4} \leqslant 1 - \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \leqslant x^2$$

3) ***a.*** En déduire la nature de la série $\sum {u_n}^2$.

b. En utilisant le résultat de l'exercice 17, déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 23

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \,]0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \,]0,1]$.

2. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

3. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.

4. Prouver que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

5. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Comparaison séries intégrales

Exercice 24

On définit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f & : & [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 2$ on a : $\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit l'intégrale : $I_n = \int_2^n f(x)\ dx$.

a. En utilisant l'inégalité de la question ***1.***, démontrer :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = +\infty$$

b. On définit la fonction F suivante :

$$\begin{array}{rccc} F & : & [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \end{array}$$

Calculer la dérivée de F.
En déduire une expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

a. Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :

$$\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$$

b. En déduire : $\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \leqslant S_n \leqslant I_n + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

c. Démontrer : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

4. On considère $\alpha \in \mathbb{R}$ et on définit, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k^2-1)^\alpha}$$

a. Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

b. Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?

Exercice 25

On note f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

1) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

2) Montrer : $\forall k \geqslant 3$, on a : $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note : $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$.

3) **a.** Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ S_n - \dfrac{1}{2\ln(2)} \leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\ dt \leqslant S_n - \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

c. Établir que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4) À l'aide de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5) **a.** Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$: $0 \leqslant v_n - \ell \leqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

(indication : on pourra commencer par démontrer que $v_n - \ell \leqslant v_n - u_n$)

b. En déduire une fonction en **Python** qui calcule une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Matrice d'une application linéaire

Exercice 26. *Matrice d'un application linéaire*
Dans chaque cas, déterminer la matrice de f dans la base canonique des espaces considérés puis préciser si f est bijective.

1. $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \mapsto & P+P' \end{array}$

2. $\begin{array}{rccc} f : & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a+b-c, a+d) \end{array}$

Exercice 27
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$. On pose $u = (2,4,-5)$, $v = (1,0,1)$, $w = (0,1,-2)$.

1. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.
2. Montrer que $\mathscr{B}' = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$.
3. Calculer A'^2 et en déduire f^2

Exercice 28
On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit f l'application qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ associe $f(M) = M + (a+d)I_2$.

1. Montrer f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4).
3. ***a)*** Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Déterminer la matrice D de f dans cette base.
4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 29
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ par $\begin{cases} \varphi(e_i) = e_{i+1} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ \varphi(e_4) = e_1 \end{cases}$

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$ puis calculer A^4.
2. En déduire que φ est un automorphisme et déterminer φ^{-1}.

Exercice 30
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

1. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ puis en déduire $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Calculer f^4.
3. On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$, $\varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.
   a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.
4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 31

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi : P(X) \mapsto (1-X^2)P''(X) - 3XP'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Calculer $\varphi(1)$. L'endomorphisme φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

3. Dans cette question, on prend $n = 3$.

a) Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 32

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique
$\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ avec :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & {}^tM \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} g & : & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & M +^t M \end{array}$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ et $g \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

2. Déterminer la matrice A de f relativement à la base $\mathscr{B}$.

3. En déduire sans calcul supplémentaire la matrice de g relativement à la base $\mathscr{B}$.

4. Les applications f et g sont-elles des automorphismes ? Si oui, déterminer l'application réciproque.

5. Si a et b sont deux automorphismes, est-ce que $a + b$ est également un automorphisme ?

Généralités sur les applications linéaires

Exercice 33

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B}$.

On note P le plan d'équation $x+y+z = 0$ et D la droite définie par le système d'équations $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\,z \\ y = \frac{3}{2}\,z \end{array} \right.$.

1. Vérifier que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

On note p la projection sur P parallèlement à D.

2. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Calculer $p(u)$ et déterminer la matrice de p dans $\mathscr{B}$.

Exercice 34

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Montrer :

$$\Big(\exists u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{Im}(u) = F \text{ et } \mathrm{Ker}(u) = G\Big) \ \Leftrightarrow\ \dim(F) + \dim(G) = n$$

2. **Exemple**.
Dans $\mathbb{R}^3$, F est le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}\,((1, -1, 0))$.

a) Déterminer un endomorphisme u dont l'image est F et le noyau est G.

b) Exprimer la matrice de u dans la base canonique.

Projecteurs et symétries

Exercice 35

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ($E = F \oplus G$).

Pour tout élément $x \in E$, on note $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs tel que $x = x_F + x_G$.
On appelle alors projection sur F parallèlement à G, l'application p définie par :

$$p \; : \; \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array}$$

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'application s :

$$s \; : \; \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$$

1. ***a)*** Démontrer : $p \circ p = p$ *(on dit que p est idempotente).*
b) Démontrer : $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$.
c) On note $q = \mathrm{id}_E - p$. Démontrer que q est un projecteur.
d) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer :

$$f \circ f = f \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) \\ f \text{ est le projecteur sur } \mathrm{Im}(f) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(f) \end{array} \right.$$

2. ***a)*** Démontrer : $s \circ s = \mathrm{id}_E$ *(on dit que s est involutive).*
b) Démontrer : $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
c) Démontrer : $s = 2\,p - \mathrm{id}_E = p - q$.
d) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer :

$$g \circ g = \mathrm{id}_E \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(g + \mathrm{id}_E) \\ g \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E) \\ \text{parallèlement à } \mathrm{Ker}(g + \mathrm{id}_E) \end{array} \right.$$

3. ***a)*** Démontrer : $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p)$.
b) Démontrer : $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$.

4. On note $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. On note enfin $\mathscr{B}$ la famille obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.
a) Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.
b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(q)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)$.

Exercice 36

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

On considère p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer : $p + q$ est un projecteur de $E \;\Leftrightarrow\; p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2. On suppose dans cette question que $p + q$ est un projecteur de E.
Montrer :

$$\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$$

$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\}$$

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$$

Matrices semblables - Changement de base

Exercice 37

Montrer que les matrices A et B ci-dessous sont semblables, et que les matrices C et D ne le sont pas, où :

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 38

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Trouver les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 39

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que ces deux matrices sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 40

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$f^2 = g^2 = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Montrer que la dimension de E est paire.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 41

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A) = 1$.

Montrer : $A^2 = A$.

Sous-espaces stables

Exercice 42

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer : u stabilise $H \iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset H$.

2. On suppose dans cette question qu'il existe une base $\mathscr{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver tous les sous-espaces stabilisés par u.

Exercice 43

On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$.
Donner alors un élément de $\mathrm{Ker}(f^2) \setminus \mathrm{Ker}(f)$.

2. Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose : $g^2 = f$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2)$ est stable par g.

b) En déduire qu'un tel g n'existe pas.

Exercice 44

Notons $\mathscr{G} = \{u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \mid \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), u({}^tM) = {}^t(u(M))\}$.

1. Montrer que $\mathscr{G}$ est un espace vectoriel.

2. Montrer que les éléments de $\mathscr{G}$ sont les éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ qui stabilisent $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $\mathscr{G}$.

II.1. Oraux CCINP

II.1.a) Séries

Exercice 45

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\left(\ln(n)\right)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) **Cas** $\alpha \leqslant 0$
En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

b) **Cas** $\alpha > 0$
Étudier la nature de la série.
Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\left(\ln(x)\right)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2 + n)\right)^2}$.

Exercice 46

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$?

Exercice 47

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
Démontrer :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

2. Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{\big((-1)^n + i\big)\ \ln(n)\ \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$.
Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Exercice 48

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

a) Démontrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.
Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^n u_n$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n \,\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.
Étudier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum f_n(x)$.

Exercice 49

On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$: $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\,\dfrac{\pi}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, où α est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

II.1.b) Algèbre linéaire

Exercice 50

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall P \in E$, $f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :

a) sans utiliser de matrice de f,

b) en utilisant une matrice de f.

2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que : $Q = f(P)$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

Exercice 51

On note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. f est-il surjectif ?

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. A-t-on : $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

Exercice 52

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer : $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

2. ***a)*** Démontrer : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

b) Démontrer : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Rightarrow E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 53

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\begin{array}{rccl} \Phi & : & \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & & P & \mapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose : $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).