Colles

Semaine 29 : 19 mai - 23 mai

I. Questions de cours

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Démontrer que l'application $\mathbb{P}_B$ suivante est une probabilité.

$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{P}_B & : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \,|\, B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array}$$

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = \cdots$. En particulier : $\mathbb{P}(\varnothing) = \cdots$.

2) $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \cdots$

3) $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $A \subset B \ \Rightarrow \ \cdots$
(l'application $\mathbb{P}$ est croissante)

4) $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \cdots$

5) $\forall (A, B, C) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^3$,
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) \ = \ \cdots$$
(formule du crible)

6) $\forall (A_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^n$, $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \cdots$

1. Compléter les propriétés ci-dessus.

2. Démontrer les propriétés *2)*, *3)* et *4)*.

Exercice 3

Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.

II. Exercices

Modélisation probabiliste

Exercice 4
Proposer un espace probabilisable permettant la modélisation des situations suivantes.

1. On lance une fois deux dés à 6 faces et on s'intéresse aux deux résultats obtenus.

2. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On lance une pièce n fois d'affilée et on s'intéresse à la suite des côtés apparents (pile ou face).

3. Deux équipes de football se font face et s'apprêtent à tirer des pénalties tour à tour. Au bout de 5 tirs par équipe, on compare le nombre de tirs réussis (égalité possible).

4. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, qu'on tire une à une sans remise jusqu'à vider l'urne. On s'intéresse à la séquence des numéros tirés, en tenant compte de l'ordre d'apparition.

5. Une classe est constituée de 48 élèves. On en tire 3 au hasard et on s'intéresse à leur date d'anniversaire.

Cas de l'équiprobabilité

Exercice 5
On joue à pile ou face quatre fois de suite.

- On note A l'événement : « on obtient deux fois pile et deux fois face »
- On note B l'événement : « les deux premiers lancers ont donné des résultats différents ».

a. Décrire l'univers Ω et l'ensemble des événements $\mathcal{P}(\Omega)$.
On calculera notamment le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$.

b. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 6
Un tiroir contient 10 paires de chaussettes toutes différentes.
On pioche au hasard 4 chaussettes.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une paire complète ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir deux paires ?

Exercice 7
On lance 7 fois de suite un même dé à 20 faces.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros distincts à chaque lancer ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir toujours le même numéro ?

Exercice 8
Un tiroir contient 12 paires de chaussettes et 2 paires de gants. Les doigts engourdis par le froid et la vision obscurcie par le sommeil, on pioche n objets dans le tiroir.

a. Que doit valoir n au minimum pour avoir une probabilité non nulle d'obtenir une paire de chaussettes complète et une paire de gants complète ?

b. Même question pour une probabilité égale à 1.

c. Et que doit valoir n au minimum pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à $1/2$?

Exercice 9
On place au hasard cinq boules distinguables dans quatre boîtes également distinguables.

a. Combien y a-t-il de rangements possibles ?

b. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient dans la même boîte ?

c. Quelle est la probabilité que deux boîtes exactement soient vides ?

d. Quelle est la probabilité qu'une boîte exactement soit vide ?

e. En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.

f. Retrouver ce résultat avec la formule du crible.

Exercice 10
Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8.
On tire trois fois de suite une boule avec remise.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre strictement croissant ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre croissant ?

Probabilité conditionnelle

Exercice 11
Dans une urne se trouvent quatre boules noires et deux boules blanches. Cinq personnes tirent successivement et sans remise une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné.
Quelle est la probabilité de victoire de chacune des cinq personnes ?

Système complet d'événements

Exercice 12
Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On lance une pièce n fois d'affilée, lancers numérotés, et on s'intéresse à la séquence des côtés visibles (pile ou face).

   a) Proposer un espace probabilisable permettant de modéliser l'expérience.

   b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note P_k l'événement : « on obtient pile au $k^{\text{ème}}$ lancer ». Les événements de la famille $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont-ils incompatibles ?

   c) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement : « on obtient le premier pile au $k^{\text{ème}}$ lancer ». La famille $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme-t-elle un système complet d'événements ?

2. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes classique et on s'intéresse à la main obtenue.

   a) Proposer un espace probabilisable permettant de modéliser cette expérience.

   b) Pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, on note R_k l'événement : « la main contient au moins k rois ». La famille $(R_0, \ldots, R_4)$ forme-t-elle un système complet d'événements ?

Exercice 13
On considère un jeu de fléchettes sur une cible comportant 3 zones : Z_1, Z_2 et Z_3. On lance une fléchette sur la cible. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on considère les événements $A_k =$ « la fléchette atteint la zone Z_k ».
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle qu'il existe un réel c vérifiant, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{P}(A_k) = c\,k$.

a. Décrire l'univers associé à cette expérience.

b. Montrer que (A_1, A_2, A_3) forme un système complet d'événements.

c. Déterminer l'unique valeur possible pour c.

Formule des probabilités composées

Exercice 14

Une urne contient 10 boules blanches, 4 boules rouges et 6 boules noires.

a. On tire 3 boules avec remise.
Quelle est la probabilité que le tirage soit tricolore ? bicolore ? unicolore ?

b. On tire 3 boules sans remise.
Quelle est la probabilité que le tirage soit tricolore ? bicolore ? unicolore ?

Formule des probabilités totales

Exercice 15

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire deux boules dans cette urne.

a. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

b. Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.

c. Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Formule des probabilités totales / formule de Bayes

Exercice 16

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2, et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

a. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

b. Si M. Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 17

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires : avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés. Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

a. Quel est le taux global de personnes soulagées ?

b. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Exercice 18

Une usine fabrique 3% de pièces défectueuses. Toutes les pièces fabriquées sont contrôlées. 99% des pièces correctes sont acceptées et 98% des pièces défectueuses sont refusées. Calculer la probabilité pour que :

a. La pièce testée soit refusée à tort.

b. La pièce testée soit acceptée.

c. Le contrôle commette une erreur.

d. Une pièce qui a été acceptée soit en fait défectueuse.

Exercice 19
Les ampoules de la marque X sont fabriquées dans deux usines, A et B. 20% des ampoules de l'usine A et 5% de l'usine B sont défectueuses. Chaque semaine l'usine A produit $2n$ ampoules et l'usine B produit n ampoules (où n est un entier). On tire une une ampoule au hasard dans la production d'une semaine.

a. Quelle est la probabilité que l'ampoule tirée ne soit pas défectueuse ?

b. Si l'ampoule tirée est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine A ?

Exercice 20
On considère une population touchée par une maladie rare. Cette maladie touche une personne sur 10000. Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

- si une personne est malade, le test est positif à 99%,
- si une personne est saine, le test peut aussi se révéler positif à hauteur de $0,1\%$ (on parle de *faux positif*).

A-t-on intérêt à se fier aux résultats de ce test ?
Plus précisément, on calculera la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif.

Indépendance

Pour les exercices 21 et 22, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Exercice 21
Existe-t-il deux événements A et B à la fois incompatibles et indépendants ?

Exercice 22
Soient A, B et C des événements mutuellement indépendants.
Montrer que A et $B \cup C$ sont indépendants.

Exercice 23
Une urne contient deux boules vertes et trois boules jaunes. On effectue quatre tirages avec remise dans cette urne. On considère les événements suivants :

$A =$ « les deux premiers tirages donnent des boules vertes »
$B =$ « les deux derniers tirages donnent des boules vertes »
$C =$ « les deuxième et troisième tirages donnent des boules jaunes »
$D =$ « les quatre tirages donnent des boules de la même couleur »

a. Parmi ces événements, dire lesquels sont indépendants.

b. Ces quatre événements sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 24
On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé 6.

- On note A : « le premier chiffre est pair ».
- On note B : « le second chiffre est impair ».
- On note C : « la somme des chiffres est paire ».

a. Démontrer que A, B et C sont deux à deux indépendants.

b. Démontrer que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 25
Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de $0,52$. Par ailleurs, on sait que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

a. On note F l'événement « naissance d'une fille » et L l'événement « avoir une luxation de la hanche ». Les événements F et L sont-ils indépendants ?

b. Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille ?

Exercice 26
On dispose de 3 composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i. Le fonctionnement d'un composant est supposé totalement indépendant des autres.
Donner la probabilité de fonctionnement du circuit dans les cas suivants :

a. si les composants sont disposés en série,

b. si les composants sont disposés en parallèle,

c. si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Évolution d'une grandeur aléatoire dans le temps (discret)

Exercice 27
Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il réussit à ne pas fumer un jour, le lendemain il reste motivé et ne fume qu'avec une probabilité de $1/4$. Par contre s'il fume un jour, le lendemain il fume avec une probabilité notée α. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il fume le $n^{\text{ème}}$ jour.

a. Exprimer p_n en fonction de p_{n-1} et α.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \left(\alpha - \dfrac{1}{4}\right)^n p_0 + \dfrac{1}{4} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\alpha - \dfrac{1}{4}\right)^k$

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

d. Cette limite peut-elle être nulle ?
Dans la négative, donnez-en une borne inférieure.
Cette stratégie vous parait-elle judicieuse pour arrêter de fumer ?

Exercice 28
Deux joueurs A et B jouent aux échecs sans discontinuer. Le joueur B gagne la première partie. La probabilité que A remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,6$. La probabilité que B remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,5$. On note p_n la probabilité que B remporte la $n^{\text{ème}}$ partie.

Montrer que (p_n) est arithmético-géométrique et donner sa formule explicite.

Exercice 29
Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

a. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

b. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.

c. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 30

Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$. On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois, les lancers étant supposés mutuellement indépendants. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On note P pour « pile » et F pour « face ».

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient 2 piles consécutifs au moins une fois avant le $k^{\text{ème}}$ lancer inclus ». Justifier que tout tirage réalisant $\overline{A_k}$ se termine nécessairement soit par F, soit par FP.
2. On note, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = \mathbb{P}\big(\overline{A_k}\big)$. Déduire de la remarque précédente une relation de récurrence liant p_k, p_{k+1} et p_{k+2} pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$.
3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, calculer p_k.
4. Déterminer la limite de (p_n) si elle existe.
5. Proposer une fonction **Python**, prenant en paramètre le réel p et permettant d'obtenir le nombre de lancers nécessaires pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 99% d'obtenir au moins une fois deux piles consécutifs.

Exercice 31

Cet exercice constitue une généralisation de l'exercice 30.

On place un singe devant un clavier d'ordinateur. Ce clavier comporte 250 touches, lui permettant d'accéder à toutes les majuscules, minuscules, tous les signes de ponctuation et la barre d'espace. Son défi : recopier *Les Liaisons dangereuses*, de Pierre Choderlos de Laclos, soit 470 pages contenant 46 lignes de 52 caractères chacune, soit un total d'environ 1 124 240 caractères. On note cet entier α.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Supposons : $N \geqslant \alpha$. Le singe effectue une suite de N frappes aléatoires uniformes, mutuellement indépendantes, sur son clavier étendu. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Pour tout $k \in [\![1, \lfloor N \rfloor \alpha]\!]$, on note A_k l'événement « le livre est recopié fidèlement entre les frappes $(k-1)\alpha + 1$ et $k\alpha$ (incluses) ».

On note enfin B_N l'événement « le livre a été fidèlement recopié au moins une fois au cours des N premières frappes ».

1. Justifier que les événements de la famille $(A_1, \dots, A_{\lfloor \frac{N}{\alpha} \rfloor})$ sont mutuellement indépendants et déterminer $\mathbb{P}\big(A_1 \cup \dots \cup A_{\lfloor \frac{N}{\alpha} \rfloor}\big)$.
2. Comparer $\mathbb{P}(B_N)$ et $\mathbb{P}\big(A_1 \cup \dots \cup A_{\lfloor \frac{N}{\alpha} \rfloor}\big)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}(B_N)$.

Oraux CCINP

Exercice 32

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche », et on pose : $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.

2. Prouver : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}\, p_n + \dfrac{4}{7}$.

3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de p_n.

Exercice 33

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.