Colles

Semaine 26 : 7 avril - 11 avril

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\,dx$

2. Démontrer que la suite $\displaystyle\left(\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^k\right)^{\frac{1}{n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2

1. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{n^2} e^{\sqrt{t}}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 3

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Démontrer : H est un sev de $E \Rightarrow f(H)$ est un sev de F.

2. Démontrer : G est un sev de $F \Rightarrow f^{-1}(G)$ est un sev de E.

Exercice 4

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Démontrer : f injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

2. Supposons de plus que E est de dimension finie. On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
Démontrer : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$.

II. Exercices

Intégration

Intégrales fonctions de leurs bornes

Exercice 5
Dériver les fonctions suivantes.

a. $H_2 : x \mapsto \displaystyle\int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt$ où $n \in \mathbb{N}$

b. $H_3 : x \mapsto \displaystyle\int_x^{n^2} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt$ où $n \in \mathbb{N}$

c. $H_4 : x \mapsto \displaystyle\int_1^{x^2} \mathrm{e}^{5\sqrt{3\ln t}}\, dt$

d. $H_5 : x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+t+t^2}$

e. $H_6 : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \sqrt{1+u^2}\, du$

f. $H_7 : x \mapsto \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{\mathrm{e}^x} \frac{s}{\ln s}\, ds$

Exercice 6

1. Démontrer : $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant 1 - \cos(t) \leqslant \dfrac{t^2}{2}$.

2. En déduire : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\, dt = \ln(3)$.

Exercice 7
On note $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt$.

a. Donner l'ensemble de définition de F, puis donner le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x.

b. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$: $t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.

c. En déduire un encadrement de $F(x)$, pour $x \in [0, +\infty[$.

d. Montrer alors que : $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{7}{3}x^3$.

e. Démontrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à préciser.

Exercice 8
On considère la fonction :

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \end{array}$$

1. Montrer que F est impaire.

2. Montrer que F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

3. ***a)*** Montrer que la restriction de F sur $\mathbb{R}_+$ présente un maximum en un point dont on précisera le paramètre.

b) Déterminer, à l'aide de la méthode des trapèzes, une valeur de ce maximum avec une précision de 10^{-2}.

4. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$.

b) En déduire, si elle existe, la limite de F en $+\infty$.

5. Donner l'allure du graphe de F.

Exercice 9

1. Démontrer : $\forall t \in [0,1],\ t \leqslant \mathrm{e}^t - 1 \leqslant \mathrm{e}\, t$.

2. En déduire : $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 10

On considère la fonction : $\begin{array}{rccl} F & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \sqrt{2-\big(\sin(t)\big)^2}\, dt \end{array}$

1. Montrer que F est impaire.

2. Montrer que F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

3. Calculer un développement limité de F en 0 à l'ordre 3. Que peut-on en déduire sur le graphe de F ?

4. *a)* Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) \geqslant 2x$.

b) En déduire, si elle existe, la limite de F en $+\infty$.
La suite de la question a pour objectif de préciser ce résultat.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, justifier l'existence de $k \in \mathbb{N}$ tel que : $k\pi \leqslant x \leqslant (k+1)\pi$. Puis démontrer :

$$F(x) \;=\; 2k \int_0^{\pi} \sqrt{2-\big(\sin(t)\big)^2}\, dt + 2 \int_{k\pi}^{x} \sqrt{2-\big(\sin(t)\big)^2}\, dt$$

d) En déduire que la fonction $x \mapsto F(x) - \dfrac{F(\pi)\, x}{\pi}$ est bornée et trouver un équivalent de F au voisinage de $+\infty$.

Exercice 11

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} F & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \displaystyle\int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2}\, dt \end{array}$$

1. Déterminer le domaine de définition de F et préciser son domaine d'étude.

2. Montrer que F est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

3. Donner l'allure du graphe de F.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction : $\begin{array}{rccl} F & : & \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \displaystyle\int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\, dt \end{array}$

1. Justifier : $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

2. *a)* Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) \geqslant \dfrac{1}{1+x^n} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\, dt$.

b) En déduire, si elle existe, la limite de F en $+\infty$.

3. Démontrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. On désignera sa bijection réciproque par G.

4. Montrer que G est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle : $y' = \dfrac{1+y^n}{\mathrm{e}^y}$.

Exercice 13
On considère la fonction : $F \;:\; \begin{array}{ccc} [-2\pi, 2\pi] \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt \end{array}$

1. Montrer que F est paire.

2. *a)* Démontrer : $F(\pi) = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{(u+2\pi)^2} - \frac{1}{(u+\pi)^2} \right) \sin(u)\, du.$

b) En déduire le signe de $F(\pi)$.

3. En s'inspirant de la question précédente, déterminer le signe de $F(2\pi)$.

4. *a)* Montrer que F est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

b) Montrer alors que F s'annule exactement quatre fois et isoler chacun de ses points d'annulation.

5. *a)* Vérifier : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|\sin(t) - t\right| \leqslant \dfrac{t^3}{6}$.

b) En déduire que F se prolonge par continuité en 0 en une fonction G.

c) Préciser la valeur prise par la fonction G en 0, puis montrer que G est continûment dérivable sur $[-2\pi, 2\pi]$.

Sommes de Riemann

Exercice 14
Calculer les limites des suites ci-dessous.

a. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2+k^2}$

b. $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

Exercice 15
Calculer, en utilisant une somme de Riemann, les intégrales de $x \mapsto x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \sin(\pi\, x)$ sur $[0, 1]$.

Exercice 16
Soit $x \in\,]-1, +\infty[$.

1. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2x\, \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2\right) \;=\; \frac{(x-1)\,(x^{2n}-1)}{x+1}$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\, \cos(t) + x^2\right)\, dt$.

Exercice 17
Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes.

1. $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n+k}{n^2+k^2} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2. $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{n^2\,(k^3+n^3)^{\frac{1}{3}}} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3. $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2}\, \sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

4. $\left(\left(\dfrac{(2n)!}{n!\, n^n} \right)^{\frac{1}{n}} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

5. $\left(\ln(n) - \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{\ln(p+n)}{n} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 18
Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}_+^*\big)$. On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcrcl} F & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt \end{array}$$

1. Montrer que F induit une bijection continue à réciproque continue de $[0,1]$ sur $F\big([0,1]\big)$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un unique $x_{n,p} \in [0,1]$ tel que :

$$\int_0^{x_{n,p}} f(t)\ dt \ = \ \frac{p}{n} \int_0^1 f(t)\ dt$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{p=0}^{n-1} f(x_{n,p})$. Démontrer :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \left(\int_0^1 \big(f(t)\big)^2\ dt \right) \left(\int_0^1 f(t)\ dt \right)^{-1}$$

Exercice 19
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k}{n}\right) \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$

1. Vérifier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\big|\sin(x) - x\big| \leqslant \dfrac{x^3}{6}$.

2. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left| u_n - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2} \sin\left(\dfrac{k}{n}\right) \right| \leqslant \dfrac{1}{6n^2}$.

3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Sommation discrète et intégration

Exercice 20
On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^2} \end{array}$$

1. Étudier les variations de f.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on pose : $u_n = \sum\limits_{p=2}^{n} f(p)$.

- *a)* Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, comparer u_n et la valeur de l'intégrale I_n de la restriction de f sur $[1,n]$.
- *b)* Majorer la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- *c)* En déduire le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.

Exercice 21
Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{nk}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Croissance de l'intégrale

Exercice 22
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([a,b]\big)$. Démontrer :

$$\int_{[a,b]} |f| \;=\; \left|\int_{[a,b]} f\right| \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ positive ou négative}$$

Le résultat est-il encore vrai si f est seulement continue par morceaux sur le segment $[a,b]$?

Exercice 23
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([0,1]\big)$.

1. On suppose que f s'annule au plus n fois.
   - *a)* Justifier l'existence d'une fonction polynomiale P de degré au plus n dont les racines sont les points d'annulation de f en lesquels la fonction f « change de signe » et sont simples.
   - *b)* Montrer alors que l'intégrale de $f \times P$ sur $[0,1]$ est nulle.

2. On suppose que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^k\, f(x)\, dx$ est nulle. Démontrer que la fonction f admet au moins $n+1$ points d'annulation.

Exercice 24
Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([0,\pi]\big)$.

1. On suppose que f ne s'annule pas sur $]0,\pi[$. Montrer que l'intégrale de la fonction $x \mapsto f(x)\,\sin(x)$ est non nulle.

2. On suppose qu'il existe $\alpha \in \,]0,\pi[\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ tel que la restriction de f sur $[0,\alpha]$ ne prenne que des valeurs positives et la restriction de f sur $[\alpha,\pi]$ ne prenne que des valeurs négatives.
   - *a)* Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la restriction sur $[0,\pi]$ de $x \mapsto \sin(x) + \lambda\,\cos(x)$ s'annule une unique fois, au point α.
   - *b)* Montrer que l'intégrale sur $[0,\pi]$ de la fonction $x \mapsto \big(\sin(x) + \lambda\,\cos(x)\big)\,f(x)$ est nulle si et seulement si f l'est.

3. On suppose :

$$\int_0^\pi f(x)\,\sin(x)\,dx \;=\; \int_0^\pi f(x)\,\cos(x)\,dx \;=\; 0$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois.

Autour de la formule de Taylor

Exercice 25
Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose : $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 t^n\,(1-t)^p\,dt$.

1. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, exprimer $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n+1,p-1}$.
En déduire, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, une expression explicite de $I_{n,p}$.

2. En interprétant, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p}$ comme le reste dans une formule de Taylor-Lagrange, retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 26
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $|f|$ et $|f''|$ soient majorées respectivement par M et M''.

1. a) En appliquant deux fois une inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f à l'ordre 2, montrer que pour tout réel strictement positif a :

$$\left|2a\, f'(0) + f(-a) - f(a)\right| \leqslant M''\, a^2$$

b) En déduire : $\left|f'(0)\right| \leqslant 2\sqrt{M\, M''}$.
(on pourra utiliser une valeur particulière de a dans l'estimation précédente)

2. En appliquant la question précédente aux fonctions $t \mapsto f(t+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $|f'|$ est bornée et majorer alors sa borne supérieure par un réel ne dépendant que des bornes supérieures de $|f|$ et $|f''|$.

Noyau et image d'une application linéaire

Exercice 27
Soit $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + 5x_3$.
Montrer que f est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 28
Soit $f : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.
Montrer que f est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, avec une base pour chacun.

Exercice 29
Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ telle que $\varphi(P) = P'$.
Montrer que φ est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$, avec une base pour chacun.

Exercice 30
Soit $f : \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Ker}(f) = \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
Que dire de l'application f ?

Exercice 31
Soit $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x-y \end{pmatrix}$.
Montrer que f est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, ainsi qu'une base pour chacun. Que conclure ?

Exercice 32
On définit une fonction $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ en posant :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que f est linéaire.

2. Étudier l'injectivité de f, puis la surjectivité de f.

3. Déterminer si elle existe la bijection réciproque de f.

Exercice 33
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et $f : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $f(X) = AX$. On suppose A inversible.
Démontrer que f est bijective et que f^{-1} est l'application linéaire $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par $f^{-1}(Y) = A^{-1}Y$.

Exercice 34. *Endomorphisme et commutant*

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f est un sev de E.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée.
   On considère l'application $c_A : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.
   a) Montrer qu c_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) On note $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$ le commutant de la matrice A. Déduire des questions précédentes que $\mathcal{C}_A$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   c) Dans cette question, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(c_A)$ et sa dimension.

Exercice 35. *Composition*
Soient E un espace vectoriel et f un automorphisme de E. On considère :

$$\Phi : \begin{cases} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ g & \mapsto & f \circ g \circ f^{-1} \end{cases}$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.
2. En recherchant une application réciproque sous la même forme que Φ, montrer que Φ est un automorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 36
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A.
2. Calculer AU puis en déduire $\mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 37
On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & Q(X) = P(X+1) - P(X) \end{array}$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Calculer $f(P)$. f est-elle injective ?
3. Déterminer une base de l'image de f. f est-elle surjective ?
4. Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ n'ayant pas d'antécédent par f.

Exercice 38
On considère l'application linéaire

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (2x+y+z, x+y+t, x+z-t) \end{array}$$

1. Déterminer une base du noyau de g.
2. Déterminer une base de l'image de g en utilisant le théorème du rang.

Exercice 39
On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{a+d}{2} \cdot I + \dfrac{b+c}{2} \cdot J \end{array}$$

1. Calculer $f(I)$ et $f(J)$.

2. Montrer que f est un endomorphisme.

3. Déterminer une base du noyau de f. f est-elle injective ?

4. En déduire le rang de f puis une base de l'image de f.

Exercice 40
E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.

2. Montrer qu'une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$ est $(e_2, e_1 - e_3)$.

Exercice 41
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

2. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$

Isomorphisme

Exercice 42. *Isomorphismes*
Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-t, y+z, y-z, x+t) \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P + P' \end{array}$

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & TMT \end{array}$ avec $T \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible.

4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(1), P''(0)) \end{array}$

Exercice 43

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de E dont on déterminera la dimension.

b) Vérifier alors que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & E & \rightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ & & P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

2. On pose $Q_0(X) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Q_{n+1} = \varphi^{-1}(Q_n)$. Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 44

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts et P un polynôme réel de degré n.

1. Montrer que $(P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. *a)* Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & & P & \mapsto & \big(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)\big) \end{array}$$

b) Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Supposons :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, P^{(i)}(a_k) \ = \ 0$$

Démontrer : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

3. Démontrer que la famille $\big(P(X + a_o), \ldots, P(X + a_n)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 45

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que : $f^{(n-1)}(a) \neq 0_E$. En déduire que la famille $\big(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

2. *a)* Démontrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

b) Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathcal{C} & \rightarrow & E \\ & & g & \mapsto & g(a) \end{array}$$

c) Que dire de la dimension de $\mathcal{C}$?

3. Démontrer : $\mathcal{C} = \operatorname{Vect}\big(\mathrm{id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\big)$.

Exercice 46

Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P & \mapsto & P + P' + P'' \end{array}$$

Exercice 47
Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f & : & A \times B & \to & E \\ & & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

1. Montrer que l'application f est linéaire et déterminer son image et son noyau.

2. Montrer que $A \cap B$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont isomorphes (en tant qu'espaces vectoriels).

3. Déduire du théorème du rang :

$$\dim(A+B) \ = \ \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$$

Généralités sur les applications linéaires

Exercice 48
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, g_1, $g_2 \in \mathscr{L}(F,G)$, et h_1, $h_2 \in \mathscr{L}(G,E)$.

a) Montrer que si f est injective et si $f \circ h_1 = f \circ h_2$ alors $h_1 = h_2$.

b) Montrer que si f est surjective et si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, alors $g_1 = g_2$.

2. **Application.**

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $(AB)^2$ et en déduire BA.

Exercice 49
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces supplémentaires de E.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note p_i la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{k \neq i} F_k$.

1. Montrer :

(i) $\mathrm{id}_E = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ ***(ii)*** $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \ \Rightarrow \ p_i \circ p_j = 0$

2. Soient p_1, ..., p_n des endomorphismes de E vérifiant ***(i)*** et ***(ii)***.
On note $F_i = \mathrm{Im}(p_i)$.

a) Montrer : $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i$.

b) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'application p_i est la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{k \neq i} F_k$.

Exercice 50
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soit V un sous-espace vectoriel de E.

On note $\mathcal{A} = \{f \in \mathscr{L}(E,F) \mid V \subset \mathrm{Ker}(f)\}$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et calculer sa dimension.

Exercice 51
Soit $(a,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P & \mapsto & (X-a)\big(P'(X)+P'(a)\big) - 2\big(P(X)-P(a)\big) \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie, puis que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On note $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ ses coordonnées dans la base $\big(1, X-a, \dots, (X-a)^n\big)$.

   a) Démontrer : $f(P) = \sum\limits_{i=2}^{n} (i-2)\, a_i\, (X-a)^i$.

   b) En déduire le noyau et l'image de f.

3. *a)* En utilisant directement la définition de f, calculer, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $f\big((X-a)^i\big)$.

   b) Retrouver alors les résultats de la question *2.*

Exercice 52
Soit $(u,v) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$. Supposons : $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u+v$ injectif.
Démontrer : $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \dim(E)$.

Exercice 53
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Supposons que u est de rang 1.
Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $u \circ u = \lambda \cdot u$.

Exercice 54
Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Soient E_0, …, E_n des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $(u_0, \dots, u_{n-1})$ un élément de $\mathscr{L}(E_0,E_1) \times \mathscr{L}(E_1,E_2) \times \cdots \times \mathscr{L}(E_{n-1},E_n)$ tel que u_0 soit injective, u_{n-1} soit surjective et, pour tout $i \in [\![0,n-2]\!]$: $\mathrm{Im}(u_i) = \mathrm{Ker}(u_{i+1})$. Démontrer :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(E_i) \;=\; 0$$

Exercice 55
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que f laisse stable toutes les droites vectorielles de E.
On désigne par $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

   a) Vérifier que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que : $f(e_i) = \lambda_i\, e_i$.

   b) Démontrer que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $e_i + e_j$ est colinéaire à $f(e_i+e_j)$.

   c) Montrer alors que les λ_i sont égaux.

   d) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$.

2. Supposons : $\forall g \in \mathscr{L}(E)$, $f \circ g = g \circ f$. Démontrer qu'il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$.