Colles

Semaine 25 : 31 mars - 4 avril

I. Questions de cours

Exercice 1

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I.

Soit $x_0 \in I$.

Montrer que l'application suivante est continue sur I :

$$\begin{array}{rccl} F_0 & : & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt \end{array}$$

Exercice 2

1. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\ dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+2\sqrt{x}}\ dx$

2. Démontrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3

1. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\ dx$

2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\ dt$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

II. Exercices

Dénombrement

Parties d'un ensemble fini

Exercice 4

Donner le cardinal des ensembles suivants, puis expliciter tous leurs éléments.

a. $\mathcal{P}(\varnothing)$

b. $\mathcal{P}(\{5\})$

c. $\mathcal{P}(\{1,4\})$

d. $\mathcal{P}(\{1,3,4,5\})$

e. $\mathcal{P}(\{\{1\},2,4\})$

Exercice 5
Les énoncés suivants sont-ils vrai ou faux ? Justifier vos réponses.

a. $2 \in \{3, \{2\}, \{\{4\}\}, \varnothing\}$

b. $\{1\} = \{\{1\}\}$

c. $3 \in \varnothing$

d. $\varnothing \in \{\varnothing\}$

e. $\varnothing \subset \mathcal{P}(\{1\})$

f. $\varnothing \in \{1\}$

g. $\{\{3\}\}$ a un élément.

h. $\{n \in \mathbb{N} \ / \ 82 \leqslant n \leqslant 98 \text{ et } \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2\} = \varnothing$

Exercice 6
On considère un ensemble E à 6 élements. On cherche à calculer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = X$.

a. Combien y a-t-il de parties de E à deux éléments ? Si A est une partie à deux éléments, combien y a-t-il de parties B telles que $A \cup B = E$?

b. Plus généralement, combien y a-t-il de parties A à k éléments ? Une telle partie A étant donnée, combien y a-t-il de B qui conviennent ?

c. En déduire la solution du problème.

d. Si on remplace 6 par un n quelconque, que devient la solution ?

Exercice 7
Soit n un entier strictement positif et $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

a. Trouver le nombre de couples (x, y) de E^2 tels que $x > y$.

b. Trouver le nombre de couples (x, y) de E^2 tels que $x = y$.

c. Trouver le nombre de triplets (x, y, z) de E^3 tels que $x < y < z$.

Dénombrement

Dénombrement : cas pratiques

Exercice 8
On tire 5 atouts dans un jeu de tarot.
Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

a. Au moins un atout est multiple de 5.

b. Il y a exactement un multiple de 5 et un multiple de 3.

c. On a tiré le 1 ou le 21.

Exercice 9
À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de douze touches :

× trois lettres : A, B et C

× neuf chiffres non nuls : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9

Le code déclenchant l'ouverture de la porte peut être changé par le régisseur. Ce code est formé d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres.

a. Dans cette question, on considère que les trois chiffres du code ne sont pas forcément distincts. Combien de codes commençant par la lettre A le régisseur peut-il proposer ?

b. Dans cette question, on considère que le code ne contient que des chiffres distincts. Combien de codes le régisseur peut-il proposer ?

Exercice 10
De combien de manières peut-on classer quatre personnes (sans qu'il y ait d'ex-æquo) ? Et si les ex-æquo sont possibles ?

Exercice 11
Combien y a-t-il d'anagrammes de MAISON ? de RADAR ? de MISSISSIPI ? de ABRACADABRA ?

Exercice 12
Trois locataires laissent, en sortant, la clé numérotée de leur appartement à la gardienne de l'immeuble. Celle-ci s'amuse à enlever les numéros et rend au hasard les clés aux trois personnes à leur retour. On notera R_i ($i \in [\![1, 3]\!]$) l'ensemble des répartitions telles que le i-ème locataire retrouve sa clé.

1) Décrire l'ensemble $R_1 \cap \overline{R_3}$.

2) Écrire en fonction de R_1, R_2 et R_3 :

   a. l'ensemble A des répartitions telles que les trois personnes retrouvent leur clé.
   b. l'ensemble B des répartitions telles que deux personnes seulement retrouvent leur clé.
   c. l'ensemble C des répartitions telles que le premier locataire est le seul à retrouver sa clé.
   d. l'ensemble D des répartitions telles qu'une personne seulement retrouve sa clé ?

3) Déterminer le cardinal des ensembles de la question précédente.

Exercice 13
On monte un escalier de n marches. À chaque pas, on franchit soit une marche, soit deux marches. On note p_n le nombre de façon d'arriver à la n-ième marche et on voudrait expliciter la suite (p_n).

a. Que valent p_1 et p_2 ?

b. Déterminer une relation de récurrence liant p_n, p_{n-1} et p_{n-2}.

c. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

d. On appelle k le nombre de pas de deux marches qu'on a fait en gravissant l'escalier. Quelles sont les valeurs possibles pour k ?

e. Calculer en fonction de k le nombre total de pas nécessaires.

f. Déterminer le nombre de façon de grimper l'escalier, sachant qu'on a fait k pas de deux marches.

g. En déduire une expression de p_n sous forme d'une somme.

Formule du crible

Exercice 14
Une tentative d'homicide par balle a eu lieu au cours d'un bal. La police a retrouvé dix-huit personnes présentes au moment du drame. Elle leur a demandé de répondre soit par oui, soit par non, à chacune des questions suivantes :

a. Avez-vous entendu une détonation ?

b. Avez-vous vu quelqu'un s'enfuir ?

- Dix personnes ont répondu « oui » à la première question.
- Six personnes ont répondu « non » à la deuxième question.
- Cinq personnes ont répondu « non » aux deux questions.

Combien de personnes ont répondu « oui » aux deux questions ?

Nombre d'applications

Exercice 15
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Exercice 16

a. Combien y a-t-il de suites composées de 5 éléments de $[\![1, 10]\!]$?

b. Combien y a-t-il de suites composées de 5 éléments distincts de $[\![1, 10]\!]$?

c. Combien y a-t-il de suites strictement croissantes composées de 5 éléments de $[\![1, 10]\!]$?

d. Généraliser les questions précédentes pour des suites possédant n éléments dans l'ensemble $[\![1, p]\!]$.

Exercice 17
Dans cet exercice, on souhaite déterminer le nombre d'applications croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

1) Démontrer que ce nombre est égal au nombre de suites croissantes composées de n éléments de $[\![1, p]\!]$.

On propose maintenant de coder une telle suite croissante par la suite de symboles suivante :

× on écrit succesivement chaque 1 utilisé (éventuellement aucun) et on termine par une barre | ,

× on écrit succesivement chaque 2 utilisé (éventuellement aucun) et on termine par une barre | ,

× ...

× on écrit succesivement chaque p utilisé (éventuellement aucun) et on s'arrête sans écrire de | à la fin.

2) Combien y a-t-il de symboles | utilisés dans ce codage ?

3) Quelles sont les applications représentées par les codages suivants ?

a. 1|2|333 ***b.*** 111||33 ***c.*** |22222| ***d.*** 11|22|3

4) Conclure quant au nombre d'applications croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

Intégration

Intégrales fonctions de leurs bornes

Exercice 18
Dériver les fonctions suivantes.

a. $H_1 : x \mapsto \displaystyle\int_3^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt$

b. $H_2 : x \mapsto \displaystyle\int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt$ où $n \in \mathbb{N}$

c. $H_3 : x \mapsto \displaystyle\int_x^{n^2} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt$ où $n \in \mathbb{N}$

d. $H_4 : x \mapsto \displaystyle\int_1^{x^2} \mathrm{e}^{5\sqrt{3\ln t}}\, dt$

e. $H_5 : x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+t+t^2}$

f. $H_6 : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \sqrt{1+u^2}\, du$

g. $H_7 : x \mapsto \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{\mathrm{e}^x} \frac{s}{\ln s}\, ds$

Exercice 19

1. Démontrer : $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant 1 - \cos(t) \leqslant \dfrac{t^2}{2}$.

2. En déduire : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\, dt = \ln(3)$.

Exercice 20
On note $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\,dt$.

a. Donner l'ensemble de définition de F, puis donner le signe de F.

b. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$: $t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.

c. En déduire un encadrement de $F(x)$, pour $x \in [0,+\infty[$.

d. Montrer alors que : $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{7}{3}x^3$.

e. Démontrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à préciser.

Exercice 21
On considère la fonction :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \end{array}$$

1. Montrer que F est impaire.

2. Montrer que F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

3. ***a)*** Montrer que la restriction de F sur $\mathbb{R}_+$ présente un maximum en un point dont on précisera le paramètre.

b) Déterminer, à l'aide de la méthode des trapèzes, une valeur de ce maximum avec une précision de 10^{-2}.

4. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$.

b) En déduire, si elle existe, la limite de F en $+\infty$.

5. Donner l'allure du graphe de F.

Exercice 22

1. Démontrer : $\forall t \in [0,1]$, $t \leqslant \mathrm{e}^t - 1 \leqslant \mathrm{e}\,t$.

2. En déduire : $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,dt \underset{t\to0^+}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 23
On considère la fonction :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{-x}^{x} \sqrt{2-\big(\sin(t)\big)^2}\,dt \end{array}$$

1. Montrer que F est impaire.

2. Montrer que F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

3. Calculer un développement limité de F à l'ordre 3. Que peut-on en déduire sur le graphe de F ?

4. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \geqslant 2x$.

b) En déduire, si elle existe, la limite de F en $+\infty$.
La suite de la question a pour objectif de préciser ce résultat.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, justifier l'existence de $k \in \mathbb{N}$ tel que : $k\pi \leqslant x \leqslant (k+1)\pi$. Puis démontrer :

$$F(x) = 2k \int_0^{\pi} \sqrt{2-\big(\sin(t)\big)^2}\,dt + 2\int_{k\pi}^{x} \sqrt{2-\big(\sin(t)\big)^2}\,dt$$

d) En déduire que la fonction $x \mapsto F(x) - \dfrac{F(\pi)\,x}{\pi}$ est bornée et trouver un équivalent de F au voisinage de $+\infty$.

Exercice 24
On considère la fonction :

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2}\, dt$$

1. Déterminer le domaine de définition de F et préciser son domaine d'étude.

2. Montrer que F est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

3. Donner l'allure du graphe de F.

Exercice 25
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction : $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+t^n}\, dt$

1. Justifier : $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

2. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) \geqslant \dfrac{1}{1+x^n} \displaystyle\int_0^x e^t\, dt$.

b) En déduire, si elle existe, la limite de F en $+\infty$.

3. Démontrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. On désignera sa bijection réciproque par G.

4. Montrer que G est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle : $y' = \dfrac{1+y^n}{e^y}$.

Exercice 26
On considère la fonction : $F : [-2\pi, 2\pi] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt$

1. Montrer que F est paire.

2. ***a)*** Démontrer : $F(\pi) = \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{1}{(u+2\pi)^2} - \frac{1}{(u+\pi)^2} \right) \sin(u)\, du$.

b) En déduire le signe de $F(\pi)$.

3. En s'inspirant de la question précédente, déterminer le signe de $F(2\pi)$.

4. ***a)*** Montrer que F est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

b) Montrer alors que F s'annule exactement quatre fois et isoler chacun de ses points d'annulation.

5. ***a)*** Vérifier : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \big|\sin(t) - t\big| \leqslant \dfrac{t^3}{6}$.

b) En déduire que F se prolonge par continuité en 0 en une fonction G.

c) Préciser la valeur prise par la fonction G en 0, puis montrer que G est continûment dérivable sur $[-2\pi, 2\pi]$.

Sommes de Riemann

Exercice 27
Calculer les limites des suites ci-dessous.

a. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2+k^2}$

b. $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

Exercice 28
Calculer, en utilisant une somme de Riemann, les intégrales de $x \mapsto x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \sin(\pi\, x)$ sur $[0,1]$.

Exercice 29
Soit $x \in\,]-1, +\infty[$.

1. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2x\, \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2\right) \;=\; \frac{(x-1)\,(x^{2n}-1)}{x+1}$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\, \cos(t) + x^2\right)\, dt$.

Exercice 30
Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes.

1. $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n+k}{n^2+k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2. $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{n^2\,(k^3+n^3)^{\frac{1}{3}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3. $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2}\, \sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

4. $\left(\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1+\dfrac{k}{n}\right)^k\right)^{\frac{1}{n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

5. $\left(\left(\dfrac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

6. $\left(\ln(n) - \sum_{p=1}^{n} \dfrac{\ln(p+n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 31
Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}_+^*\big)$. On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} F & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt \end{array}$$

1. Montrer que F induit une bijection continue à réciproque continue de $[0,1]$ sur $F\big([0,1]\big)$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un unique $x_{n,p} \in [0,1]$ tel que :

$$\int_0^{x_{n,p}} f(t)\, dt \;=\; \frac{p}{n} \int_0^1 f(t)\, dt$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \dfrac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f(x_{n,p})$. Démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \left(\int_0^1 \big(f(t)\big)^2\, dt\right) \left(\int_0^1 f(t)\, dt\right)^{-1}$$

Exercice 32
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k}{n}\right) \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$

1. Vérifier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\left|\sin(x) - x\right| \leqslant \dfrac{x^3}{6}$.

2. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|u_n - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2} \sin\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{6n^2}$.

3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Sommation discrète et intégration

Exercice 33
On considère la fonction :

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^2} \end{array}$$

1. Étudier les variations de f.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on pose : $u_n = \sum\limits_{p=2}^{n} f(p)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, comparer u_n et la valeur de l'intégrale I_n de la restriction de f sur $[1,n]$.

b) Majorer la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) En déduire le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

Exercice 34
Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{nk}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Croissance de l'intégrale

Exercice 35
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soient f et g deux fonctions réelles définies et continues sur $[a,b]$.

1. On considère la fonction :

$$\varphi \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b \big(f(t) + x\,g(t)\big)^2 \,dt \end{array}$$

Montrer que φ est une fonction polynomiale positive et que, sauf dans un cas particulier que l'on identifiera, son degré est 2.

2. Établir, dans tous les cas, la formule :

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,dt \int_a^b \big(g(t)\big)^2\,dt}$$

3. Démontrer : $\sqrt{\displaystyle\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)^2\,dt} \leqslant \sqrt{\displaystyle\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,dt} + \sqrt{\displaystyle\int_a^b \big(g(t)\big)^2\,dt}$.

Exercice 36
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([a,b]\big)$. Démontrer :

$$\int_{[a,b]} |f| \;=\; \left| \int_{[a,b]} f \right| \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ positive ou négative}$$

Le résultat est-il encore vrai si f est seulement continue par morceaux sur le segment $[a,b]$?

Exercice 37
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([0,1]\big)$.

1. On suppose que f s'annule au plus n fois.
  - ***a)*** Justifier l'existence d'une fonction polynomiale P de degré au plus n dont les racines sont les points d'annulation de f en lesquels la fonction f « change de signe » et sont simples.
  - ***b)*** Montrer alors que l'intégrale de $f \times P$ sur $[0,1]$ est nulle.

2. On suppose que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^k\, f(x)\, dx$ est nulle. Démontrer que la fonction f admet au moins $n+1$ points d'annulation.

Exercice 38
Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([0,\pi]\big)$.

1. On suppose que f ne s'annule pas sur $]0,\pi[$. Montrer que l'intégrale de la fonction $x \mapsto f(x)\, \sin(x)$ est non nulle.

2. On suppose qu'il existe $\alpha \in\,]0,\pi[\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ tel que la restriction de f sur $[0,\alpha]$ ne prenne que des valeurs positives et la restriction de f sur $[\alpha,\pi]$ ne prenne que des valeurs négatives.
  - ***a)*** Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la restriction sur $[0,\pi]$ de $x \mapsto \sin(x) + \lambda\, \cos(x)$ s'annule une unique fois, au point α.
  - ***b)*** Montrer que l'intégrale sur $[0,\pi]$ de la fonction $x \mapsto \big(\sin(x) + \lambda\, \cos(x)\big)\, f(x)$ est nulle si et seulement si f l'est.

3. On suppose :
$$\int_0^\pi f(x)\, \sin(x)\, dx \;=\; \int_0^\pi f(x)\, \cos(x)\, dx \;=\; 0$$
Montrer que f s'annule au moins deux fois.

Autour de la formule de Taylor

Exercice 39
Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose : $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 t^n\, (1-t)^p\, dt$.

1. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, exprimer $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n+1,p-1}$.
En déduire, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, une expression explicite de $I_{n,p}$.

2. En interprétant, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p}$ comme le reste dans une formule de Taylor-Lagrange, retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 40
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $|f|$ et $|f''|$ soient majorées respectivement par M et M''.

1. a) En appliquant deux fois une inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f à l'ordre 2, montrer que pour tout réel strictement positif a :

$$\left|2a\, f'(0) + f(-a) - f(a)\right| \leqslant M''\, a^2$$

b) En déduire : $\left|f'(0)\right| \leqslant 2\sqrt{M\, M''}$.
(on pourra utiliser une valeur particulière de a dans l'estimation précédente)

2. En appliquant la question précédente aux fonctions $t \mapsto f(t+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $|f'|$ est bornée et majorer alors sa borne supérieure par un réel ne dépendant que des bornes supérieures de $|f|$ et $|f''|$.

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 41
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([a,b]\big)$ telle que : $\forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$.

1. Démontrer : $\displaystyle\int_a^b t\, f(t)\ dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)\ dt$.

2. Calculer alors : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\, \sin(t)}{1 + \big(\cos(t)\big)^2}\ dt$.

Exercice 42
En faisant les changements de variables indiqués, calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $\begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{3}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(3x)} \end{array}$ et poser $t = \cos(x)$.

2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) + 1} \end{array}$ et poser $t = \mathrm{e}^x$.

3. $\begin{array}{ccc}]2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x + \sqrt{x-2}} \end{array}$ et poser $t = \sqrt{x-2}$

4. $\begin{array}{ccc} [0, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{3\,\sin(x) + 1} \end{array}$ et poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

5. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\cos^3(x)\, \sin^3(x)}{1 + \sin^2(x)} \end{array}$ et poser $t = \cos(2x)$.

Exercice 43
Calculer les intégrales suivantes par changement de variable.
(changement non précisé !)

a. $\displaystyle\int_3^4 \frac{t}{\sqrt{t-2}}\ dt$

b. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{2t+1}}\ dt$

c. $\displaystyle\int_2^3 \ln(\sqrt[3]{t} - 1)\ dt$

d. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$

Exercice 44
Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On considère la fonction $f : t \mapsto \sqrt{1 + \varepsilon\, t^2}$.

1. À l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$, trouver une primitive de f considérée sur $]-1, 1[$ lorsque $\varepsilon = -1$.

2. À l'aide du changement de variable $t = \mathrm{sh}(u)$, trouver une primitive de f considérée sur $\mathbb{R}$ lorsque $\varepsilon = 1$.

3. À l'aide d'une intégration par parties judicieuse, retrouver les résultats des questions précédentes.

Exercice 45
Pour tout $x \in\ ]-1, +\infty[$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

1. Pour tout $x \in\ ]-1, +\infty[$, donner une expression explicite de $I(x)$.

2. Pour tout $x \in\ ]-1, +\infty[$, calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^2}$ en fonction de x et de $I(x)$.

3. Pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{y^3+t^3}$ en fonction de x, y et de valeurs prises par la fonction I.

Exercice 46
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right)\, dt$.

1. Montrer que la fonction I est paire.

2. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ I(x^2) = 2\, I(x)$.

3. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\},\ I\left(\dfrac{1}{x}\right) = I(x) - 2\pi\, \ln\left(|x|\right)$.

4. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ 2\pi\, \ln\left(\big|1 - |x|\big|\right) \leqslant I(x)\big| \leqslant 2\pi\, \ln\left(1 + |x|\right)$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, calculer $I(x)$.