Colles

Semaine 24 : 24 mars - 28 mars

I. Questions de cours

Exercice 1
Déterminer une base et la dimension de l'espace vectoriel suivant :

$$F \;=\; \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$$

Exercice 2
On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
Déterminer une base et la dimension de l'espace vectoriel suivant :

$$E_3(A) \;=\; \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid A\,X = 3 \cdot X\}$$

Exercice 3
Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I.
Soit $x_0 \in I$.
Montrer que l'application suivante est continue sur I :

$$\begin{array}{rccl} F_0 & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \end{array}$$

II. Exercices

Espaces vectoriels

Théorème de la base incomplète

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On cherche à établir la formule suivante :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

où $F + G$ est le sous-espace vectoriel défini par :

$$F + G = \{u + v \mid u \in F \text{ et } v \in G\}$$

On note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F \cap G$.

a) Montrer qu'il existe une base de F de la forme $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$.
Montrer de même qu'il existe une base de G de la forme $(e_1, \ldots, e_p, g_1, \ldots, g_r)$.

b) Montrer que $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q, g_1, \ldots, g_r)$ est une base de $F + G$.

c) Conclure.

Sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 5
Dans l'espace E des fonctions continues de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$, on considère les sous-espaces :
× F_1 des fonctions constantes,
× F_2 des fonctions nulles sur $[-1,0]$,
× F_3 des fonctions nulles sur $[0,1]$.
Montrer : $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exercice 6
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on note :

$$F_i = \{P \in E \mid \forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}$$

Montrer que les F_i sont des droites vectorielles et : $E = F_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Exercice 7
Soient F, G, F', G' des sous-espaces d'un espace vectoriel E.
On suppose : $E = F \oplus G = F' \oplus G'$ et $F' \subset F$.
Montrer : $E = F' \oplus G \oplus (F \cap G')$.

Parties d'un ensemble fini

Exercice 8
Donner le cardinal des ensembles suivants, puis expliciter tous leurs éléments.
a. $\mathcal{P}(\varnothing)$
b. $\mathcal{P}(\{5\})$
c. $\mathcal{P}(\{1,4\})$
d. $\mathcal{P}(\{1,3,4,5\})$
e. $\mathcal{P}(\{\{1\},2,4\})$

Exercice 9
Les énoncés suivants sont-ils vrai ou faux ? Justifier vos réponses.
a. $2 \in \{3, \{2\}, \{\{4\}\}, \varnothing\}$
b. $\{1\} = \{\{1\}\}$
c. $3 \in \varnothing$
d. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
e. $\varnothing \subset \mathcal{P}(\{1\})$
f. $\varnothing \in \{1\}$
g. $\{\{3\}\}$ a un élément.
h. $\{n \in \mathbb{N} \ / \ 82 \leqslant n \leqslant 98 \text{ et } \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2\} = \varnothing$

Exercice 10
On considère un ensemble E à 6 élements. On cherche à calculer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = X$.

a. Combien y a-t-il de parties de E à deux éléments ? Si A est une partie à deux éléments, combien y a-t-il de parties B telles que $A \cup B = E$?

b. Plus généralement, combien y a-t-il de parties A à k éléments ? Une telle partie A étant donnée, combien y a-t-il de B qui conviennent ?

c. En déduire la solution du problème.

d. Si on remplace 6 par un n quelconque, que devient la solution ?

Exercice 11
Soit n un entier strictement positif et $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

a. Trouver le nombre de couples (x, y) de E^2 tels que $x > y$.

b. Trouver le nombre de couples (x, y) de E^2 tels que $x = y$.

c. Trouver le nombre de triplets (x, y, z) de E^3 tels que $x < y < z$.

Dénombrement

Dénombrement : cas pratiques

Exercice 12
On tire 5 atouts dans un jeu de tarot.
Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

a. Au moins un atout est multiple de 5.

b. Il y a exactement un multiple de 5 et un multiple de 3.

c. On a tiré le 1 ou le 21.

Exercice 13
À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de douze touches :

× trois lettres : A, B et C

× neuf chiffres non nuls : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9

Le code déclenchant l'ouverture de la porte peut être changé par le régisseur. Ce code est formé d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres.

a. Dans cette question, on considère que les trois chiffres du code ne sont pas forcément distincts. Combien de codes commençant par la lettre A le régisseur peut-il proposer ?

b. Dans cette question, on considère que le code ne contient que des chiffres distincts. Combien de codes le régisseur peut-il proposer ?

Exercice 14
De combien de manières peut-on classer quatre personnes (sans qu'il y ait d'ex-æquo) ? Et si les ex-æquo sont possibles ?

Exercice 15
Combien y a-t-il d'anagrammes de MAISON ? de RADAR ? de MISSISSIPI ? de ABRACADABRA ?

Exercice 16
Trois locataires laissent, en sortant, la clé numérotée de leur appartement à la gardienne de l'immeuble. Celle-ci s'amuse à enlever les numéros et rend au hasard les clés aux trois personnes à leur retour. On notera R_i ($i \in [\![1, 3]\!]$) l'ensemble des répartitions telles que le i-ème locataire retrouve sa clé.

1) Décrire l'ensemble $R_1 \cap \overline{R_3}$.

2) Écrire en fonction de R_1, R_2 et R_3 :

- ***a.*** l'ensemble A des répartitions telles que les trois personnes retrouvent leur clé.
- ***b.*** l'ensemble B des répartitions telles que deux personnes seulement retrouvent leur clé.
- ***c.*** l'ensemble C des répartitions telles que le premier locataire est le seul à retrouver sa clé.
- ***d.*** l'ensemble D des répartitions telles qu'une personne seulement retrouve sa clé ?

3) Déterminer le cardinal des ensembles de la question précédente.

Exercice 17
On monte un escalier de n marches. À chaque pas, on franchit soit une marche, soit deux marches. On note p_n le nombre de façon d'arriver à la n-ième marche et on voudrait expliciter la suite (p_n).

a. Que valent p_1 et p_2 ?

b. Déterminer une relation de récurrence liant p_n, p_{n-1} et p_{n-2}.

c. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

d. On appelle k le nombre de pas de deux marches qu'on a fait en gravissant l'escalier. Quelles sont les valeurs possibles pour k ?

e. Calculer en fonction de k le nombre total de pas nécessaires.

f. Déterminer le nombre de façon de grimper l'escalier, sachant qu'on a fait k pas de deux marches.

g. En déduire une expression de p_n sous forme d'une somme.

Formule du crible

Exercice 18
Une tentative d'homicide par balle a eu lieu au cours d'un bal. La police a retrouvé dix-huit personnes présentes au moment du drame. Elle leur a demandé de répondre soit par oui, soit par non, à chacune des questions suivantes :

a. Avez-vous entendu une détonation ?

b. Avez-vous vu quelqu'un s'enfuir ?

× Dix personnes ont répondu « oui » à la première question.

× Six personnes ont répondu « non » à la deuxième question.

× Cinq personnes ont répondu « non » aux deux questions.

Combien de personnes ont répondu « oui » aux deux questions ?

Exercice 19
On considère une classe de 36 élèves qui étudient tous au moins une langue parmi l'anglais, l'espagnol et l'allemand. On sait que :

a. 22 élèves étudient l'anglais, 22 étudient l'allemand, 18 étudient l'espagnol

b. 10 élèves étudient à la fois l'anglais et l'allemand, 9 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol, 11 à la fois l'anglais et l'espagnol

Combien d'élèves étudient les trois langues ?

Nombre d'applications

Exercice 20
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Exercice 21

a. Combien y a-t-il de suites composées de 5 éléments de $[\![1, 10]\!]$?

b. Combien y a-t-il de suites composées de 5 éléments distincts de $[\![1, 10]\!]$?

c. Combien y a-t-il de suites strictement croissantes composées de 5 éléments de $[\![1, 10]\!]$?

d. Généraliser les questions précédentes pour des suites possédant n éléments dans l'ensemble $[\![1, p]\!]$.

Exercice 22
Dans cet exercice, on souhaite déterminer le nombre d'applications croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

1) Démontrer que ce nombre est égal au nombre de suites croissantes composées de n éléments de $[\![1,p]\!]$.

On propose maintenant de coder une telle suite croissante par la suite de symboles suivante :

× on écrit succesivement chaque 1 utilisé (éventuellement aucun) et on termine par une barre | ,

× on écrit succesivement chaque 2 utilisé (éventuellement aucun) et on termine par une barre | ,

× ...

× on écrit succesivement chaque p utilisé (éventuellement aucun) et on s'arrête sans écrire de | à la fin.

2) Combien y a-t-il de symboles | utilisés dans ce codage ?

3) Quelles sont les applications représentées par les codages suivants ?

a. 1|2|333 ***b.*** 111||33 ***c.*** |22222| ***d.*** 11|22|3

4) Conclure quant au nombre d'applications croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

Intégration

Découpage de l'intervalle

Exercice 23
Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{11}} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}\, dx$ ***b.*** $\displaystyle\int_{-2}^{5} \frac{|x+1|}{|x|+1}\, dx$

Sommation discrète et intégration

Exercice 24
On considère la fonction :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^2} \end{array}$$

1. Étudier les variations de f.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on pose : $u_n = \sum\limits_{p=2}^{n} f(p)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, comparer u_n et la valeur de l'intégrale I_n de la restriction de f sur $[1,n]$.

b) Majorer la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) En déduire le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

Exercice 25
Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{nk}} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Croissance de l'intégrale

Exercice 26
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([a, b]\big)$. Démontrer :

$$\int_{[a,b]} |f| \;=\; \left|\int_{[a,b]} f\right| \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ positive ou négative}$$

Le résultat est-il encore vrai si f est seulement continue par morceaux sur le segment $[a, b]$?

Exercice 27
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soient f et g deux fonctions réelles définies et continues sur $[a, b]$.

1. On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b \big(f(t) + x\, g(t)\big)^2 \, dt \end{array}$$

Montrer que φ est une fonction polynomiale positive et que, sauf dans un cas particulier que l'on identifiera, son degré est 2.

2. Établir, dans tous les cas, la formule :

$$\left|\int_a^b f(t)\, g(t)\; dt\right| \;\leqslant\; \sqrt{\int_a^b \big(f(t)\big)^2 \, dt \int_a^b \big(g(t)\big)^2 \, dt}$$

3. Démontrer : $\sqrt{\displaystyle\int_a^b \big(f(t) + g(t)\big)^2 \, dt} \leqslant \sqrt{\displaystyle\int_a^b \big(f(t)\big)^2 \, dt} + \sqrt{\displaystyle\int_a^b \big(g(t)\big)^2 \, dt}.$

Exercice 28
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([0, 1]\big)$.

1. On suppose que f s'annule au plus n fois.

  a) Justifier l'existence d'une fonction polynomiale P de degré au plus n dont les racines sont les points d'annulation de f en lesquels la fonction f « change de signe » et sont simples.

  b) Montrer alors que l'intégrale de $f \times P$ sur $[0, 1]$ est nulle.

2. On suppose que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^k\, f(x)\; dx$ est nulle. Démontrer que la fonction f admet au moins $n + 1$ points d'annulation.

Exercice 29
Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([0, \pi]\big)$.

1. On suppose que f ne s'annule pas sur $]0, \pi[$. Montrer que l'intégrale de la fonction $x \mapsto f(x)\, \sin(x)$ est non nulle.

2. On suppose qu'il existe $\alpha \in \,]0, \pi[$ tel que la restriction de f sur $[0, \alpha]$ ne prenne que des valeurs positives et la restriction de f sur $[\alpha, \pi]$ ne prenne que des valeurs négatives.

  a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la restriction sur $[0, \pi]$ de $x \mapsto \sin(x) + \lambda\, \cos(x)$ s'annule une unique fois, au point α.

  b) Montrer que l'intégrale sur $[0, \pi]$ de la fonction $x \mapsto \big(\sin(x) + \lambda\, \cos(x)\big)\, f(x)$ est nulle si et seulement si f l'est.

3. On suppose :

$$\int_0^\pi f(x)\, \sin(x)\; dx \;=\; \int_0^\pi f(x)\, \cos(x)\; dx \;=\; 0$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois.

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 30

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([a,b]\big)$ telle que : $\forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$.

1. Démontrer : $\displaystyle\int_a^b t\, f(t)\ dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)\ dt.$

2. Calculer alors : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\ \sin(t)}{1+\big(\cos(t)\big)^2}\ dt.$

Exercice 31

En faisant les changements de variables indiqués, calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $\begin{array}{rcl}]0,\frac{\pi}{3}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(3x)} \end{array}$ et poser $t = \cos(x)$.

2. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)+1} \end{array}$ et poser $t = \mathrm{e}^x$.

3. $\begin{array}{rcl}]2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x+\sqrt{x-2}} \end{array}$ et poser $t = \sqrt{x-2}$

4. $\begin{array}{rcl} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{3\ \sin(x)+1} \end{array}$ et poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

5. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\cos^3(x)\ \sin^3(x)}{1+\sin^2(x)} \end{array}$ et poser $t = \cos(2x)$.

Exercice 32

Calculer les intégrales suivantes par changement de variable.
(changement non précisé !)

a. $\displaystyle\int_3^4 \frac{t}{\sqrt{t-2}}\ dt$

b. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{2t+1}}\ dt$

c. $\displaystyle\int_2^3 \ln(\sqrt[3]{t}-1)\ dt$

d. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$

Exercice 33

Soit $\varepsilon \in \{-1,1\}$. On considère la fonction $f : t \mapsto \sqrt{1+\varepsilon\, t^2}$.

1. À l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$, trouver une primitive de f considérée sur $]-1,1[$ lorsque $\varepsilon = -1$.

2. À l'aide du changement de variable $t = \mathrm{sh}(u)$, trouver une primitive de f considérée sur $\mathbb{R}$ lorsque $\varepsilon = 1$.

3. À l'aide d'une intégration par parties judicieuse, retrouver les résultats des questions précédentes.

Exercice 34

Pour tout $x \in \,]-1,+\infty[$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

1. Pour tout $x \in \,]-1,+\infty[$, donner une expression explicite de $I(x)$.

2. Pour tout $x \in \,]-1,+\infty[$, calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^2}$ en fonction de x et de $I(x)$.

3. Pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{y^3+t^3}$ en fonction de x, y et de valeurs prises par la fonction I.

Exercice 35

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\,\cos(t) + x^2\right)\,dt$.

1. Montrer que la fonction I est paire.

2. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $I(x^2) = 2\,I(x)$.

3. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$, $I\left(\dfrac{1}{x}\right) = I(x) - 2\pi\,\ln\left(|x|\right)$.

4. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $\left|I(x)\right| \leqslant 2\pi\,\ln\left(1+|x|\right)$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, calculer $I(x)$.