
Colles

Semaine 23 : 17 mars - 21 mars

I. Questions de cours

Exercice 1

Démontrer que l'ensemble F suivant est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

$$F = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n\}$$

Exercice 2

Démontrer que la famille \mathcal{F} suivante est une famille libre de \mathbb{K}^3 .

$$((1, 1, 0), (1, 2, 1), (2, 3, 2))$$

Exercice 3

Déterminer une base et la dimension de l'espace vectoriel suivant :

$$F = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$$

II. Exercices

Sous-espaces vectoriels

Exercice 4

Pour chacun des espaces vectoriels E et des parties F , dire si F est un sous-espace vectoriel de E .

a) E est l'ensemble des fonctions \mathbb{R} dans \mathbb{R} ($= \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

F est l'ensemble des fonctions paires.

b) E est l'ensemble des suites réelles.

F est l'ensemble des suites divergentes.

c) E est l'ensemble des suites réelles.

F est l'ensemble des suites convergentes.

d) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

F est l'ensemble des fonctions f vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

(autrement dit, des fonctions f telles que $f(x) = o(x)$).

e) $E = \mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes.

F est l'ensemble contenant le polynôme nul et les polynômes de degré supérieur ou égal à 3.

f) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à coefficients complexes.

$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est divergente}\}$.

g) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à coefficients complexes.

$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est convergente}\}$.

h) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à coefficients complexes.

$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est absolument convergente}\}$.

i) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à coefficients complexes.

$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est à termes positifs}\}$.

Espaces vectoriels dans \mathbb{K}^n

Exercice 5

Déterminer une base et la dimension des sev de \mathbb{R}^3 suivants :

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$.
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$.
- Compléter la base de F_1 en une base de \mathbb{K}^3 .
- Compléter la base de F_2 en une base de \mathbb{K}^3 .

Espace vectoriel défini par un système d'équations linéaires

Exercice 6

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$
- $B = \{(x + y, x - y, 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
- $C = \{(2x - 3y, x + 1, -x + 3y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \text{ et } y = 3z\}$.

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n , à coefficients réels.

Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est un espace vectoriel réel.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ est-il un espace vectoriel réel ?

Exercice 7

Donner une base du sous espace vectoriel de \mathbb{R}^4 formé des solutions (x, y, z, t) du système suivant.

$$\begin{cases} x + 2y - t & = 0 \\ x - 3y & + 9z = 0 \\ 3x - 4y - t + 18z & = 0 \end{cases}$$

Espaces vectoriels de polynômes

Exercice 8

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille :

$$(X, X(X-1), X(X-1)(X-2), \dots, X(X-1)\dots(X-n))$$

est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

On peut généraliser le résultat obtenu dans la question précédente. On dit qu'une famille finie de polynôme (P_1, P_2, \dots, P_n) est **échelonnée en degré** lorsque les polynômes P_1, P_2, \dots, P_n sont de degrés deux à deux distincts.

b) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que toute famille de n polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

(quitte à renuméroter les polynômes, on pourra supposer :
 $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$)

Exercice 9

Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

Si oui, en donner une base et la dimension.

- $H_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid 2P(X) - XP'(X) = 0\}$.
- $H_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(X) + 5P'(X) + 3X = 0\}$.
- $H_3 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$.
- $H_4 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.
- $H_5 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 1\}$.
- $H_6 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\}$.
- $H_7 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X) - (X-1)P'(X) = (2X^2 - 3X + 4)P''(X)\}$.
- $H_8 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \geq 3\}$

Exercice 10

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$.

- Montrer que $(1, 1+X, (1+X)^2, (1+X)^3)$ en est une base.
- Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?
- Montrer que :
 $((X-1)(X-2)(X-3), X(X-2)(X-3), X(X-1)(X-3), X(X-1)(X-2))$ est aussi une base.
- Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $(X^{n-k}(1-X)^k)_{0 \leq k \leq n}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ suivante :

$$(X^n, X^{n-1}(1-X), X^{n-2}(1-X)^2, \dots, X(1-X)^{n-1}, (1-X)^n)$$

- Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer les coordonnées de 1 et de $\left(X - \frac{1}{2}\right)^n$ dans cette base.

Espaces vectoriels de suites**Exercice 12**

On considère E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

- Montrer que E est un espace vectoriel réel.
- Montrer que $((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}})$ forme une famille libre de E .
- En déduire la dimension de E .

Exercice 13

1. Montrer que $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} - 2u_n\}$ est un espace vectoriel réel.

2. Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui ont une structure d'espace vectoriel réel ? Justifier votre réponse.

- L'ensemble des suites réelles à termes positifs.
- L'ensemble des suites réelles bornées.
- L'ensemble des suites réelles convergentes.
- L'ensemble des suites réelles divergentes.
- L'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 14

Soit $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = \frac{3}{4}u_{n+2} + \frac{3}{2}u_{n+1} + u_n\}$.

1. Montrer que E est un \mathbb{C} -espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Déterminer la dimension de l'ensemble des éléments de E ayant pour limite 0.

Espaces vectoriels de fonctions**Exercice 15**

- a) Montrer que $E = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)\}$ est un espace vectoriel réel.
- b) Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\}$ est un espace vectoriel réel.

Exercice 16

On considère l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R}^{+*} à valeurs réelles.

On définit les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_1(x) = \ln(x), f_2(x) = x, f_3(x) = e^x, f_4(x) = e^{x+3}, f_5(x) = \frac{1}{x}$$

- a) La famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est-elle une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} ?
- b) Déterminer une base de $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

Exercice 17

On note \mathcal{F} l'espace vectoriel réel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On note \mathcal{C} l'ensemble des fonctions définies et continues sur \mathbb{R} , à valeurs réelles.

- a) Montrer que \mathcal{C} est un espace vectoriel réel.
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = e^{nx}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille (f_0, f_1, \dots, f_n) est libre dans \mathcal{C} .

En déduire que l'espace vectoriel \mathcal{C} n'est pas de dimension finie.

- c) En déduire que l'espace vectoriel \mathcal{F} n'est pas de dimension finie.

Espaces vectoriels de matrices**Exercice 18**

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées d'ordre 2.

- a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = 2c \right\}$
- b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
- c) $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 1 \right\}$

Exercice 19

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles :

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = M\}$$

et $E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\}$

Partie 1

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des espaces vectoriels réels.

2. a) Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.

b) Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.

3. a) Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\}$.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie 2

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $F_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid CX = 2X\}$ est un espace vectoriel réel. Déterminer une base de F_2 .

2. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1} .

3. Calculer la matrice $D = P^{-1}CP$.

4. a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer : $M \in E_1(C) \Leftrightarrow P^{-1}M \in E_1(D)$.

b) Montrer que, pour tout $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $N \in E_1(D)$ si, et seulement si, il existe trois réels a, b, c

$$\text{tels que } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base de $E_1(C)$. Quelle est la dimension de $E_1(C)$?

d) Déterminer de même la dimension de $E_2(C)$. A-t-on $E_1(C) = E_2(C)$?

5. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $C^n = P D^n P^{-1}$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de la matrice C^n en fonction de n .

Exercice 20

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

Si oui, en donner une base et la dimension.

a) L'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

b) L'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MB$.

c) L'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = B$.

d) L'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AM = M$.

Exercice 21

On considère $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ a-b & b & a \\ 2a & 2b & 2a-b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a) Montrer que \mathcal{E} est un espace vectoriel réel.

b) Déterminer la dimension de \mathcal{E} .

Union, intersection et somme d'ev**Exercice 22**

On considère : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 4z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 0, 0))$.

1. Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer une base \mathcal{B}_F de F et une base \mathcal{B}_G de G .
En déduire la dimension de F et la dimension de G .
3. Soit un vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Montrer qu'il existe un unique couple de vecteurs $(u, v) \in F \times G$ tel que $(a, b, c) = u + v$.

Exercice 23

Soit E un espace vectoriel réel.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- a) Démontrer que $F \cap G$ de F et G est un sous-espace vectoriel de E .
- b) Démontrer que, de manière générale, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .
- c) Démontrer l'équivalence :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Leftrightarrow (F \subset G \text{ OU } G \subset F)$$

Théorème de la base incomplète**Exercice 24**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On cherche à établir la formule suivante :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

où $F + G$ est le sous-espace vectoriel défini par :

$$F + G = \{u + v \mid u \in F \text{ et } v \in G\}$$

On note (e_1, \dots, e_p) une base de $F \cap G$.

- a) Montrer qu'il existe une base de F de la forme $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$.
Montrer de même qu'il existe une base de G de la forme $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$.
- b) Montrer que $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est une base de $F + G$.
- c) Conclure.

Sommes de sous-espaces vectoriels**Exercice 25**

Dans l'espace E des fonctions continues de $[-1, 1]$ vers \mathbb{R} , on considère les sous-espaces :

- × F_1 des fonctions constantes,
- × F_2 des fonctions nulles sur $[-1, 0]$,
- × F_3 des fonctions nulles sur $[0, 1]$.

Montrer : $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exercice 26

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note :

$$F_i = \{P \in E \mid \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$$

Montrer que les F_i sont des droites vectorielles et : $E = F_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Exercice 27

Soient F, G, F', G' des sous-espaces d'un espace vectoriel E .

On suppose : $E = F \oplus G = F' \oplus G'$ et $F' \subset F$.

Montrer : $E = F' \oplus G \oplus (F \cap G')$.