Colles

Semaine 22 : 10 mars - 14 mars

I. Questions de cours

Exercice 1
Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \big(\cos(x) - 1\big)\sqrt{1+x}$.

Exercice 2
Démontrer que l'ensemble F suivant est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$F \;=\; \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X) - X\,P'(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}\}$$

Exercice 3
Démontrer que la famille $\mathcal{F}$ suivante est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\big((X-1)(X-2)(X-3),\ X(X-2)(X-3),\ X(X-1)(X-3),\ X(X-1)(X-2)\big)$$

II. Exercices

Convexité

Exercice 4
Démontrer les inégalités suivantes.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x+1$

b) $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \ln x \leqslant x-1$

c) $\forall x \in [1,\mathrm{e}],\ \ln x \geqslant \dfrac{x-1}{\mathrm{e}-1}$

Exercice 5
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$.

Exercice 6
Étudier les fonctions suivantes, notamment la convexité et la présence de points d'inflexion. On finira en traçant les courbes.

a) $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$

b) $f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$

c) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$

d) $f : x \mapsto \dfrac{2\ln x + 3}{x}$

e) $f : x \mapsto -x^2 + 3x - \ln x$

Exercice 7

a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto -\ln(\ln x)$ est convexe sur $]1,+\infty[$.

b) En déduire que : $\forall (x,y) \in \,]1,+\infty[^2,\ \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x\,\ln y}$.

Exercice 8
Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(0)=0$ et, pour $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,1[$ (0 compris).

b) Déterminer la convexité de f sur $[0,1[$.

c) Montrer que f possède un unique point d'inflexion sur cet intervalle et déterminer la tangente de f en ce point.

d) Tracer une allure de la courbe représentative de f.

Exercice 9
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant : $a<b$. Soient f et g deux fonctions convexes sur $]a,b[$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}_+$.

1. Démontrer que $f+g$, $\lambda\cdot f$ et $\sup(f,g)$ sont convexes sur $]a,b[$.

2. On suppose que la fonction f est bijective et décroissante sur $]a,b[$.

   a) Démontrer que f^{-1} est convexe sur $\big]f(b),f(a)\big[$.

   b) Que dire si f est bijective et croissante ?

Exercice 10
Démontrer qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe et majorée, est constante.

Calculs de développements limités

Exercice 11
Déterminer les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes.

1. $x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x+1}}$

2. $x\mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}$

3. $x\mapsto\arccos(x)$

4. $x\mapsto\ln\left(1+x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Exercice 12
Déterminer les développements limités à l'ordre 3 des fonctions suivantes.

1. $x\mapsto\arcsin\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$ en 0

2. $x\mapsto\big(1+\sin(x)\big)^{\frac{1}{x}}$ en 0

3. $x\mapsto\arctan\left(\sqrt{3}\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)\right)$ en 0

4. $x\mapsto\arctan\big(2\sin(x)\big)$ en $\dfrac{\pi}{3}$

Exercice 13
Déterminer le développement limité de la fonction arcsin en 0 à tout ordre.

Exercice 14
On considère la fonction f définie par :

$$f\ :\ x\ \mapsto\ \begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont la bijection réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On admet que f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner un développement limité de la fonction f^{-1} à l'ordre 3 en 1.

Description locale du graphe d'une fonction

Exercice 15
On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f & : &]0,\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln\big(\tan(x)\big) \end{array}$$

Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{4}$ et préciser la position relative locale de cette courbe et de cette tangente.

Exercice 16
On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)\arctan(x)\sqrt{x^2+x+1} \end{array}$$

Préciser, si elles existent, les asymptotes du graphe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, ainsi que les positions relatives de ces asymptotes et du graphe de f au voisinage de ces mêmes points.

Exercice 17
On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x^4\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+1} \end{array}$$

1. Démontrer qu'au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), le graphe de f est asymptote à une parabole dont on donnera l'équation.
2. Préciser la position respective de cette parabole et du graphe de f au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exercice 18
On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f & : &]-1,+\infty[\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{x} \end{array}$$

Démontrer que la fonction f se prolonge en une fonction g trois fois dérivable sur $]-1,+\infty[$. On précisera les valeurs de $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$ et $g^{(3)}(0)$.

Exercice 19
On considère la fonction définie sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\,\sin(x)\,\ln(1+x)$.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
2. Démontrer que f peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction g à préciser dont on prouvera qu'elle est dérivable en 0.
3. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. On pose $h : x \mapsto x\,f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Que peut-on en déduire à propos de h à partit du développement limité d'ordre 2 en 0 de f ?
5. En déduire l'équation d'une asymptote au graphe de h et préciser la position relative du graphe par rapport à l'asymptote.

Développement asymptotique des solutions d'une équation

Exercice 20
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n suivante :

$$f_n \;:\; \begin{array}{ccc}]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \tan(x) \end{array}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bijective.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan(x) = \mathrm{e}^{-x}$ admet une unique solution $\alpha_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

3. Démontrer que la réciproque de f_0 admet un développement limité à tout ordre en 0. Calculer ce développement limité à l'ordre 3.

4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha_n = n\pi + f_0^{-1}\big(\mathrm{e}^{-n\pi}\big)$.

5. En déduire : $\alpha_n = n\pi + \mathrm{e}^{-n\pi} - \mathrm{e}^{-2n\pi} + \dfrac{7}{6}\,\mathrm{e}^{-3n\pi} + \underset{n\to+\infty}{o}\big(\mathrm{e}^{-3n\pi}\big)$.

Exercice 21
On considère la fonction f suivante :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x + x \end{array}$$

1. Démontrer : $\dfrac{x}{x + \ln(1 + x\,\mathrm{e}^{-x})} = 1 - \mathrm{e}^{-x} + \underset{x\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-x})$.

2. En déduire : $\dfrac{x}{\ln\big(f(x)\big)} = 1 - \dfrac{1}{f(x)} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel x_n tel que : $f(x_n) = n$.

4. Démontrer : $x_n = \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.

Sous-espace vectoriel

Exercice 22
Pour chacun des espaces vectoriels E et des parties F, dire si F est un sous-espace vectoriel de E.

a) E est l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $(= \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.
F est l'ensemble des fonctions paires.

b) E est l'ensemble des suites réelles.
F est l'ensemble des suites divergentes.

c) E est l'ensemble des suites réelles.
F est l'ensemble des suites convergentes.

d) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
F est l'ensemble des fonctions f vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
(autrement dit, des fonctions f telles que $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$).

e) $E = \mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes.
F est l'ensemble contenant le polynôme nul et les polynômes de degré supérieur ou égal à 3.

Espaces vectoriels dans $\mathbb{K}^n$

Exercice 23

Déterminer une base et la dimension des sev de $\mathbb{R}^3$ suivants :

a) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$.

b) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$.

c) Compléter la base de F_1 en une base de $\mathbb{K}^3$.

d) Compléter la base de F_2 en une base de $\mathbb{K}^3$.

Espace vectoriel défini par un système d'équations linéaires

Exercice 24

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
   - *a)* $A = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\big\}$
   - *b)* $B = \big\{(x + y, x - y, 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\}$
   - *c)* $C = \big\{(2x - 3y, x + 1, -x + 3y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\}$
   - *d)* $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \text{ et } y = 3z\big\}$.

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels.
Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est un espace vectoriel réel.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$ est-il un espace vectoriel réel ?

Exercice 25

Donner une base du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions (x, y, z, t) du système suivant.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & t & & & = & 0 \\ x & - & 3y & & & + & 9z & = & 0 \\ 3x & - & 4y & - & t & + & 18z & = & 0 \end{array}\right.$$

Espaces vectoriels de polynômes

Exercice 26

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille :

$$(X,\ X(X-1),\ X(X-1)(X-2),\ \ldots,\ X(X-1)\ldots(X-n))$$

est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

On peut généraliser le résultat obtenu dans la question précédente. On dit qu'une famille finie de polynôme $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est **échelonnée en degré** lorsque les polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont de degrés deux à deux distintcs.

b) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que toute famille de n polynômes non nuls et de degrés echelonnés est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
(quitte à renuméroter les polynômes, on pourra supposer :
$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_n)$*)*

Exercice 27
Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.
Si oui, en donner une base et la dimension.

a) $H_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid 2P(X) - XP'(X) = 0\}$.

b) $H_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(X) + 5P'(X) + 3X = 0\}$.

c) $H_3 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 2\,P(1)\}$.

d) $H_4 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.

e) $H_5 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 1\}$.

f) $H_6 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\}$.

g) $H_7 = \big\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X) - (X-1)P'(X) = (2X^2 - 3X + 4)P''(X)\big\}$.

h) $H_8 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \geqslant 3\}$

Exercice 28
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$.

a) Montrer que $(1, 1+X, (1+X)^2, (1+X)^3)$ en est une base.

b) Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?

c) Montrer que :
$((X-1)(X-2)(X-3), X(X-2)(X-3), X(X-1)(X-3), X(X-1)(X-2))$ est aussi une base.

d) Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?

Exercice 29
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $(X^{n-k}(1-X)^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ suivante :

$$(X^n, X^{n-1}(1-X), X^{n-2}(1-X)^2, \ldots, X(1-X)^{n-1}, (1-X)^n)$$

a) Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer les coordonnées de 1 et de $\left(X - \dfrac{1}{2}\right)^n$ dans cette base.

Espaces vectoriels de suites

Exercice 30
On considère E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

a) Montrer que E est un espace vectoriel réel.

b) Montrer que $((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}})$ forme une famille libre de E.

c) En déduire la dimension de E.

Exercice 31

1. Montrer que $E = \big\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} - 2u_n\big\}$ est un espace vectoriel réel.

2. Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui ont une structure d'espace vectoriel réel ? Justifier votre réponse.

  a) L'ensemble des suites réelles à termes positifs.

  b) L'ensemble des suites réelles bornées.

  c) L'ensemble des suites réelles convergentes.

  d) L'ensemble des suites réelles divergentes.

  e) L'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 32
Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{3}{4}u_{n+2} + \frac{3}{2}u_{n+1} + u_n\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

2. Déterminer la dimension de l'ensemble des éléments de E ayant pour limite 0.

Espaces vectoriels de fonctions

Exercice 33

a) Montrer que $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x)\right\}$ est un espace vectoriel réel.

b) Montrer que $F = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\}$ est un espace vectoriel réel.

Exercice 34
On considère l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs réelles.
On définit les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_1(x) = \ln(x),\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = \mathrm{e}^x,\ f_4(x) = \mathrm{e}^{x+3},\ f_5(x) = \frac{1}{x}$$

a) La famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est-elle une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$?

b) Déterminer une base de $\mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

Exercice 35
On note $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un espace vectoriel réel.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = e^{nx}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans $\mathscr{C}$.
En déduire que l'espace vectoriel $\mathscr{C}$ n'est pas de dimension finie.

c) En déduire que l'espace vectoriel $\mathscr{F}$ n'est pas de dimension finie.

Espaces vectoriels de matrices

Exercice 36
Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées d'ordre 2.

a) $A = \left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = 2c\right\}$

b) $B = \left\{\begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

c) $C = \left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 1\right\}$

Exercice 37

On considère, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles :

$$\begin{aligned} & E_1(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A\,M = M\} \\ \text{et} \quad & E_2(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\} \end{aligned}$$

Partie 1

1. Montrer que $E_1\,(A)$ et $E_2\,(A)$ sont des espaces vectoriels réels.

2. ***a)*** Établir : $E_1\,(A) \subset E_2\,(A)$.

b) Montrer que si A est inversible, alors $E_1\,(A) = E_2\,(A)$.

3. ***a)*** Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1\,(A) = \left\{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\right\}$.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1\,(B)$ et $E_2\,(B)$.

Partie 2

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $F_2 = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid CX = 2X\}$ est un espace vectoriel réel. Déterminer une base de F_2.

2. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

3. Calculer la matrice $D = P^{-1}CP$.

4. ***a)*** Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer : $M \in E_1(C) \;\Leftrightarrow\; P^{-1}M \in E_1(D)$.

b) Montrer que, pour tout $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $N \in E_1(D)$ si, et seulement si, il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base de $E_1(C)$. Quelle est la dimension de $E_1(C)$?

d) Déterminer de même la dimension de $E_2(C)$. A-t-on $E_1(C) = E_2(C)$?

5. ***a)*** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $C^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice C^n en fonction de n.

Exercice 38

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.
Si oui, en donner une base et la dimension.

a) L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

b) L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MB$.

c) L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = B$.

d) L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AM = M$.

Exercice 39

On considère $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ a-b & b & a \\ 2a & 2b & 2a-b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel réel.

b) Déterminer la dimension de $\mathcal{E}$.

Union, intersection et somme d'ev

Exercice 40

On considère : $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 4z = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,((1, 0, 0))$.

1. Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer une base $\mathscr{B}_F$ de F et une base $\mathscr{B}_G$ de G.
En déduire la dimension de F et la dimension de G.

3. Soit un vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Montrer qu'il existe un unique couple de vecteurs $(u, v) \in F \times G$ tel que $(a, b, c) = u + v$.

Exercice 41

Soit E un espace vectoriel réel.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Démontrer que $F \cap G$ de F et G est un sous-espace vectoriel de E.

b) Démontrer que, de manière générale, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

c) Démontrer l'équivalence :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \quad \Leftrightarrow \quad (F \subset G \;\; \texttt{OU} \;\; G \subset F)$$