Colles

Semaine 20 : 10 février - 14 février

I. Questions de cours

Exercice 1
Déterminer les racines carrées du nombre complexe $2-3i$.

Exercice 2
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $\dfrac{1}{2}\,z^2+2i\,z-2-j=0$.

Exercice 3
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme P défini par : $P(X)=X^5+3$.

Exercice 4
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
Démontrer :

$$\begin{array}{c} f \text{ est dérivable} \\ \text{en } x_0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} f \text{ admet un développement limité} \\ \text{d'ordre 1 en } x_0 \end{array}$$

Démontrer de plus que, lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\left\{\begin{array}{l} a_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \end{array}\right.$

Exercice 5
Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

II. Exercices

Factorisation de polynômes

Exercice 6
Factoriser le polynôme $P(X)=X^4-6X^2+7X-6$, sachant qu'il admet deux racines évidentes.

Exercice 7
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n}+X^n+1$.

Exercice 8
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $6X^4-43X^3+107X^2-108X36$ sachant qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$ tel que ses racines soient α, β, $\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Liens entre coefficients et racines d'un polynôme

Exercice 9
Factoriser $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Exercice 10
Soient x, y, z les racines complexes du polynome $X^3 + pX^2 + qX + r$, où $(p, q, r) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$.

1. Donner les relations entre les racines et les coefficients du polynôme.

2. Calculer $x^n + y^n + z^n$ pour $n \in \{1, 2, -1\}$.

3. Former le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont x^2, y^2, z^2 (on exprimera ses coefficients en fonction de p, q, et r.)

Exercice 11
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer : $\sum\limits_{p=0}^{n-1} X^{2p} = \prod\limits_{p=1}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{p\pi}{n}\right) X + 1\right)$.

2. En déduire des expressions sans produit de $\prod\limits_{p=1}^{n-1} \cos\left(\frac{p\pi}{n}\right)$ et $\prod\limits_{p=1}^{n} \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$.

Exercice 12
Résoudre dans $\left(\mathbb{C}^*\right)^3$ le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 1 \\ a^2 & + & b^2 & + & c^2 & = & 9 \\ \frac{1}{a} & + & \frac{1}{b} & + & \frac{1}{c} & = & 1 \end{array}\right.$$

Racines carrées, racines $n^{\text{ème}}$

Exercice 13
Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants.

a) $1 + 2i$

b) $-3 - 3i$

c) $5 - 4i$

d) $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$

e) $2 + 3i$

f) $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 14
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines $n^{\text{ème}}$ des nombres complexes suivants.

a) $1 + i$

b) $3i$

c) $1 - j + j^2$

d) $\dfrac{1+z}{1-z}$ avec $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$

Exercice 15
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$

b) $z^2 = 7 - 7\,i$

c) $z^5 = 1$

On cherchera les solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 16

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^5 = e^{i\theta}$.

Exercice 17

1. Écrire les nombres complexes $-i$ et $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $z^5 = -i$

b) $z^6 = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{2}}$

Résolution d'équations

Exercice 18

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 + 2iz - 1 = 0$

2. $iz^2 + (1+i)z = 2$

3. $z^5 - 4 = 0$

4. $z^4 + 2i = 0$

5. $z^2 + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{11}\right) z + 1 = 0$

6. $z^6 - z^3 + 1 = 0$

7. $z^6 - 3z = 0$

8. $z^8 = \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^3$

9. $iz^2 - 3z + 2 = 0$

10. $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$

Exercice 19

On considère le polynôme P défini par :

$$P(X) \;=\; X^3 - 6X^2 + 13X - 10$$

1. Calculer $P(2)$ et en déduire une factorisation de P.

2. Déterminer les racines complexes de P.

Exercice 20

Donner la forme algébriques des solutions complexes des équations suivantes :

(1) $z^2 + 2(i-1)z + 8 - 2i = 0$

(2) $z^4 - 3iz^2 + i - 3 = 0$

(3) $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$

(4) $z^2 + 3(i-1)z + 2 - 3i = 0$

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 - (5-14i)\,z^2 - 2\,(5i+12) = 0$.

Exercice 22

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + z + 1 = 0$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0$

Exercice 23
Soit $(n,\alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Donner la forme trigonométrique des solutions complexes des équations suivantes :

(1) $z^4 - 2\sin(\alpha)z^2 + \big(\tan(\alpha)\big)^2 = 0$

(2) $z^2 - 2i\sin(\alpha)z + 2\big(1+\cos(\alpha)\big) = 0$

(3) $(z+1)^n = z^n$

(4) $z^6 + (1-2i)z^3 = i+1$

(5) $z^{2n} + 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0$

(6) $(z^2+1)^n = 1$

Exercice 24
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^n = (z-1)^n$.
Combien de solutions compte cette équation ?

Exercice 25
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère l'équation :

$$(E) \qquad (z^3+1)^{n-1} + (z^3+1)^{n-2} + \cdots + (z^3+1)^2 + (z^3+1) + 1 \ = \ 0$$

d'inconnue complexe z. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E). Dans tout cet exercice, on ne cherchera pas spécialement à mettre les résultats sous forme algébrique ou trigonométrique.

1. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_k$ des racines cubiques de $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1$.

2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, le complexe z est solution de (E) si et seulement si $(z^3+1)^n - 1 = 0$.

3. Résoudre l'équation (E).

Exercice 26
Déterminer l'ensemble des solutions du système d'équation d'inconnue complexe z :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |z| & = & 1 \\ iz & = & \bar{z} \end{array} \right.$$

Exercice 27
Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue complexe z :

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 \ = \ 0$$

Indication : on pourra remarquer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $8|z|^2 - 3$ est un réel.

Exercice 28
Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^5 + \bar{z}^5 + z^7 \ = \ 0$$

Exercice 29
Déterminer l'ensemble des complexes z tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |z| & = & |z+2| \\ \arg(z) & = & \arg(z+3+i) \ [2\pi] \end{array} \right.$$

Indication : on pourra mener une analyse géométrique du problème.

Équations exponentielles

Exercice 30
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $\mathrm{e}^z = \sqrt{3} - 3i$

2. $\mathrm{e}^z = (1+i)^3$

3. $\mathrm{e}^{4z} - \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{2z} + 1 = 0$

Utilisations locales de la dérivabilité

Exercice 31
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La dérivée d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).

2. Si f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $\max(f,g)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Si f est définie sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et bornée sur $[-1,1]$, alors il existe $x_0 \in\,]-1,1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

4. Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ est dérivable à droite en tout point.

5. Toute fonction croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ a une fonction dérivée positive ou nulle en tout point.

6. Toute fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ a une dérivée strictement positive en x_0.

7. Si f est dérivable sur $[0,1]$, alors $\lim\limits_{t \to 0} f'(t) = f'(0)$.

8. Si f est définie sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$ et si $\lim\limits_{t \to 0} f'(t)$ existe dans $\mathbb{R}$, alors f est dérivable en 0 et $\lim\limits_{t \to 0} f'(t) = f'(0)$.

9. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

10. Soit f une fonction 1-périodique telle que $f_{|[0,1]}$ est dérivable. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

11. Soit f une fonction 1-périodique telle que $f_{|[0,2]}$ est dérivable. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32
Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\left(\sqrt{x}\right) \end{array}$$

1. en revenant à la définition de la dérivabilité en un point,

2. en utilisant le théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 33
Montrer que la dérivée d'une fonction paire (resp. périodique) est une fonction impaire (resp. périodique).

Exercice 34
On pose : $f = \arcsin^2$.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions polynomiales et admettant f' comme solution.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n+2)}(0) = n^2\, f^{(n)}(0)$.

3. Donner alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de $f^{(n)}(0)$.

Étude de $(f^{-1})'$

Exercice 35

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.

c) Dresser le tableau de variations de f^{-1}.

d) Quel est l'unique antécédent de 0 par f ? En déduire $(f^{-1})'(0)$.

e) Donner une expression générale de $(f^{-1})'$.

Exercice 36

On note $f : x \mapsto x\, e^x$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Étudier ses variations.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans I, où I est un intervalle à préciser.

c) On note h la bijection réciproque. Déterminer sa dérivée h'.

d) Faire une étude complète de h (variations, allure de la courbe).

e) Justifier que l'équation $e^{-x} = 2x$ admet une unique solution réelle, et exprimer cette solution à l'aide de h.

Développement limité à l'ordre 1 en x_0

Exercice 37

Soit f une fonction dérivable en a.

Le but de l'exercice est de déterminer : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(f(a+3h))^2 - (f(a-h))^2}{h}$.

a) On considère la fonction $h : x \mapsto f(a+x)$.
Montrer que la fonction h est dérivable en 0.

b) Écrire le dévelppement limité à l'ordre 1 de la fonction h en 0.
(on utilisera l'écriture avec la fonction $\varepsilon(.)$)

c) En déduire une écriture de $(f(a+x))^2$ pour x au voisinage de 0.

d) Démontrer que : $(f(a+x))^2 = (f(a))^2 + 2\,xf(a)f'(a) + \underset{x\to 0}{o}(x)$.
Conclure.

Caractère $\mathcal{C}^n/\mathcal{C}^\infty$

Exercice 38

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, les éventuels prolongements par continuité, et déterminer la classe la plus fine possible de la fonction (éventuellement prolongée). Donner l'équation des tangentes (si elles existent) aux points qui posent problème.

a) $f : x \mapsto e^{x+\frac{1}{x}}$

b) $f : x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $f : x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2}$

d) $f : x \mapsto \sqrt{x}\, e^{-x}$

e) $f : x \mapsto x\sqrt{x+x^2}$

f) $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$

Exercice 39
On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul de dérivée $n^{\text{ème}}$

Exercice 40
Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de :

a) $f : x \mapsto (x^2+1)\,\mathrm{e}^x$

b) $f : x \mapsto x^2\,(1+x)^n$

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

d) $f : x \mapsto \Big(\sin(x) + x\,\big(\cos(x)\big)^2\Big)\,x$

Exercice 41
a) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\dfrac{1}{1-x^2} = a\,\dfrac{1}{1-x} + b\,\dfrac{1}{1+x}$.

b) En déduire la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercice 42
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées $n^{\text{ème}}$ des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto x^2\,\sin(x)$

b) $x \mapsto x^2\,(1+x)^n$

c) $x \mapsto \mathrm{e}^x\,\sin(x)$

Théorème de Rolle

Exercice 43
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Montrer qu'il existe un élément $c \in\,]a,b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.
(on pourra introduire la fonction $g : x \mapsto e^x\,(f(x) - f'(x))$)

Théorème des accroissements finis

Exercice 44
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer :

$$\forall x > 0,\ \exists c > 0, \quad f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$$

(on pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - f(-x)$)

Exercice 45
Soit f une fonction réelle dérivable sur $[0,1]$ et telle que : $f(1) - f(0) = \dfrac{1}{2}$.
Montrer que f' n'admet aucun point fixe.

Exercice 46
Soit f une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que : $2\,f(1) = f(2)$.
Montrer que le graphe Γ de f admet une tangente passant par l'origine du repère dans lequel on trace Γ.

Exercice 47
Majorer, lorsque (a,b) est un couple de réels et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le nombre de solutions réelles de l'équation $x^n + ax + b = 0$.

Applications de l'IAF

Exercice 48

On considère la fonction f suivante.

$$f \; : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \end{array} \right.$$

a) Calculer, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, $f'(x)$.

b) Montrer que $\forall x \in \,]0,+\infty[\,, f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^3}(x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + x + 2)$.

c) Étudier les variations de la fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0,+\infty[$, par : $g(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + x + 2$.
En déduire : $\forall x \in \,]0;+\infty[\,, f''(x) > 0$.

d) En déduire le sens de variation de f (on admettra que $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$).
On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

e) On considère la suite (u_n) par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$

Montrer $\forall x \in \,]0,+\infty[\,, \left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

f) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$.

g) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \ln 2|$.

h) Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 49
Soit la suite la suite (u_n) par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{array} \right.$
On pose $f(x) = \sqrt{x+1}$.

a. Montrer que $[0,2]$ est stable par f et que : $\forall x \in [0,2], |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Déterminer les points fixes de f. Notons r l'unique point fixe dans $[0,2]$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{|u_n - r|}{2}$ puis que $|u_n - r| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$

e. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

f. Déterminer un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$.

g. Écrire un programme **Python** donnant une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

Exercice 50
On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$, que l'on notera α.

2. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

3. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,|u_n - \alpha|$.

c) Puis que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n$.

d) En déduire enfin que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 51
On considère la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4 + \frac{\ln u_n}{4} \end{cases}$

a) Soit $f : x \mapsto 4 + \dfrac{\ln x}{4}$.
Étudier la fonction f et montrer que $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$ est stable par f.

b) Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$. En déduire que f possède un unique point fixe dans cet intervalle.

c) Montrer que pour tout n, u_n existe et appartient à l'intervalle $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$.

d) Étudier la monotonie de (u_n) et montrer qu'elle converge vers une limite L à préciser.

e) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, donner une majoration de $|u_n - L|$ en fonction de n.

Exercice 52
Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} f_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \end{array}$$

1. Démontrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in [0,1]$: $\left|f_n'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{n!}$

2. En déduire que la suite réelle $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 53
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} p^\alpha$.

1. Démontrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $(\alpha+1)\,p^\alpha \leqslant (p+1)^{\alpha+1} - p^{\alpha+1} \leqslant (\alpha+1)\,(p+1)^\alpha$.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n^{\alpha+1} \leqslant (\alpha+1)\,S_n \leqslant (n+1)^{\alpha+1}$.

3. Déterminer un équivalent « simple » de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis la limite, si elle existe de la suite $(n^\beta\, S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour chaque valeur du réel β.

Exercice 54
On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} \times \dfrac{\ln(x)}{2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue sur son ensemble de définition.

2. Démontrer : $\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x - 1$.

3. Construire le tableau de variations de f et démontrer : $\forall x > 1,\ f(x) < x$.

4. Soit $a > 1$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

a) Démontrer que la suite (x_n) est bien définie et à valeurs dans $]1, +\infty[$.

b) Établir que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite ℓ.

c) Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |x_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{3}\,|x_n - \ell|$$

d) En déduire :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |x_n - \ell| \leqslant \frac{1}{3^{n-n_0}}\,|x_{n_0} - \ell|$$

e) En déduire : $x_n = \ell + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Exercice 55
Étudier la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \,]\frac{2}{3}, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2} \end{cases}$

Exercice 56
Étudier la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2u_n^2 + 1} \end{cases}$

Fonctions lipschitziennes

Exercice 57
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont lipschitziennes ? On déterminera alors, s'il existe, leur plus petit rapport de Lipschitz.

1. $f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

2. $f : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

3. $f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

4. $f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

Exercice 58
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soient f et g deux fonctions définies et lipschitziennes sur $[a,b]$.

1. Démontrer que $f+g$ et $f \times g$ sont lipschitziennes.

2. Démontrer que, si f ne s'annule pas sur $[a,b]$, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est lipschitzienne.

3. Les résultats précédents restent-ils nécessairement vrais si f et g ne sont pas définies sur un segment ?

Exercice 59
Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$.

a) Démontrer que si la restriction à $[a,b]$ de f est lipschitzienne, alors elle est bornée.

b) Ce résultat est-il encore nécessairement vrai pour la restriction de f à un intervalle non borné sur lequel cette dernière est supposée lipschitzienne ?

2. On suppose f lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout $p \in \,]-\infty, -1[$, la fonction $g : x \mapsto x^p f(x)$ admet 0 comme limite en $+\infty$.

3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant : $a < b < c$. On suppose que les restrictions de f sur $[a,b]$ et $[b,c]$ sont lipschitziennes. Montrer que la restriction de f sur $[a,c]$ est lipschitzienne.

Exercice 60
Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction réelle définie sur I vérifiant : $g(I) \subset I$. On suppose qu'il existe $k \in \,]0,1[$ tel que g soit k-lipschitzienne sur I. On définit par récurrence une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

2. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$: $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k\,|u_n - u_{n-1}|$.

3. En déduire que, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $q > p \geqslant 0$:

$$(1-k)\,|u_q - u_p| \ \leqslant\ k^p\,|u_1 - u_0|$$

4. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

5. On admet l'existence d'une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel noté L.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

b) En appliquant la question *2.*, montrer que la suite $(u_n - u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, puis que (u_n) converge vers L.

c) Vérifier : $g(L) = L$. Puis démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - L| \ \leqslant\ \frac{k^n\,|u_1 - u_0|}{1-k}$$