Colles

Semaine 19 : 3 février - 7 février

I. Questions de cours

Exercice 1
Énoncer et démontrer la formule de Taylor polynomiale.

Exercice 2
Déterminer les racines carrées du nombre complexe $1-2i$.

Exercice 3
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme P défini par : $P(X) = X^4 + 2$.

II. Exercices

Structure algébrique de $\mathbb{K}[X]$

Exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n.

1. Montrer que P' divise P si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$(X-\lambda)\,P'(X) \;=\; n\,P(X)$$

2. En déduire les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé.
*On pourra décomposer le polynôme P introduit en question **1.** sur la famille $\big(1, X-\lambda, \dots, (X-\lambda)^n\big)$.*

Exercice 5
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer le degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$ en fonction du degré de P.

Exercice 6
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z},\ P(n) = P(n+1)$. Montrer que $\deg(P) \leqslant 0$.

Fonctions polynomiales, racines

Exercice 7
On considère le polynôme P défini par $P(X) = 3X^2 - X - 2$.

a. Montrer que 1 est une racine de P, et trouver un polynôme Q tel que : $P(X) = (X-1)Q(X)$.

b. Étudier le signe de P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8
Démontrer par l'absurde qu'un polynôme de degré 2 ne peut avoir 3 racines distinces ou plus.

Exercice 9

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x$.

2. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \bar{z}$.

Exercice 10
Pour $T \in \mathbb{C}^*$, déterminer les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est T-périodique.

Exercice 11
Soit P une fonction polynomiale paire. Montrer que P n'a que des puissances paires.

Exercice 12
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$. On pourra en particulier s'intéresser à une racine de module maximal d'un polynôme P non nul satisfaisant l'équation.

Exercice 13
Soit $p \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2p+1$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0, 2p+1]\!]$, $P^{(k)}(0) < 0$.

1. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

2. Montrer que toutes les racines réelles de P sont strictement négatives.

Exercice 14
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On pose :

$$P(X) \ = \ \big((X-a)^n \,(X-b)^n\big)^{(p)}$$

Un des objectifs de l'exercice est de calculer la valeur prise par la fonction polynomiale $\tilde{P}$ associée à P au point a.

1. On suppose : $p > 2n$. Que vaut P ? Conclure quant à l'objectif de cet exercice.

2. On suppose : $p < n$. Justifier le fait que a est racine de P. En déduire la valeur de $\tilde{P}(a)$.

3. On suppose : $n \leqslant p \leqslant 2n$.

- ***a)*** Pour tout $(\lambda, m, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^2$ vérifiant $k \leqslant m$, donner une expression explicite du polynôme dérivé d'ordre k de $(X-\lambda)^m$.
- ***b)*** En utilisant alors la formule de Leibniz, démontrer :

$$\tilde{P}(a) \ = \ \frac{p!\,n!}{(p-n)!\,(2n-p)!}\ (a-b)^{2n-p}$$

Exercice 15
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \circ P = P$.

Exercice 16
Déteminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

Exercice 17
On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

1. Montrer pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Delta^q(P) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^{q-k} \binom{q}{k} P(X+k)$$

en notant Δ^q la composée de Δ avec elle-même q fois.

2. ***a)*** Montrer que pour tout polynôme réel P non nul : $\deg\big(\Delta(P)\big) \leqslant \deg(P) - 1$.
b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$, la valeur de $\Delta^n(P)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\tilde{P}(k) = r^k$. Calculer la valeur de $\tilde{P}(n+1)$.

Exercice 18
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant : $P(X^2) = P \times P(X+1)$.

1. Soit P un polynôme non nul de $\mathcal{A}$.
a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors il en est de même, pour tout $r \in \mathbb{N}$, de $a^{(2^r)}$.
b) En déduire que les racines non nulles de P sont de module 1.

2. Soit P un polynôme non nul de $\mathcal{A}$.
a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors il en est de même de $(a-1)^2$.
b) Quelles sont les racines de P ?

3. Déterminer explicitement les éléments de $\mathcal{A}$.

Résolution d'équations

Exercice 19
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$

b. $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$

c. $x = \sqrt{x} + 2$

d. $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

e. $(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 + 2x - 5)^2$

f. $(2x-3)^2 = (7x+5)^2$

Exercice 20
Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout x différent de 0, 1 et -1, on ait :

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

Autour de la division euclidienne

Exercice 21
À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 22
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de valeurs prises par la fonction polynomiale associée à P et par les dérivées de cette dernière.

Exercice 23
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 24
Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(X) - X$ divise $(P \circ P)(X) - X$.

Exercice 25
Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Démontrer que $X^2 - 2\cos(\alpha)\,X + 1$ divise dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\cos\big((n-1)\,\alpha\big)\,X^{n+1} - \cos(n\,\alpha)\,X^n - \cos(\alpha)\,X + 1$$

Exercice 26
Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de la division euclidienne de X^n par P.

Exercice 27
On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$.

1. Calculer, en fonction de a, $P(a)$, $P'(a)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X-a)^2$ divise P.

2. Soit $b \in \mathbb{K}$ distinct de a. Calculer, en fonction de a, b, $P(a)$, $P(b)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X-a)(X-b)$ divise P.

Exercice 28
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X-1)^4$ divise $P+1$ et $(X+1)^4$ divise $P-1$.

1. Soit P un polynôme de $\mathcal{A}$. Démontrer que $(X^2-1)^3$ divise P'.

2. Déterminer un élément de $\mathcal{A}$ de degré 7.

3. Déterminer explicitement les éléments de $\mathcal{A}$.

Factorisation de polynômes

Exercice 29
Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 - 6X^2 + 7X - 6$, sachant qu'il admet deux racines évidentes.

Exercice 30
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 2$.

Exercice 31
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 32
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $6X^4 - 43X^3 + 107X^2 - 108X + 36$ sachant qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2$ tel que ses racines soient α, β, $\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\beta}{\alpha}$.