Colles

Semaine 18 : 27 janvier - 31 janvier

I. Questions de cours

Exercice 1
Résoudre le système suivant :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & & & + & 3\,t & = & 0 \\ & - & y & + & 9\,z & & & = & 0 \\ & - & 2\,y & + & 19\,z & - & t & = & 0 \\ 5\,x & + & 12\,y & - & 19\,z & + & 16\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2
Démontrer que $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 3
Démontrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 4
Énoncer et démontrer la formule de Taylor polynomiale.

II. Exercices

Résolution de systèmes linéaires

Exercice 5
Résoudre les systèmes suivants.

a.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 2t & = & -8 \\ x & + & y & - & 2z & + & t & = & 4 \\ x & - & 2y & + & z & + & t & = & -2 \\ 2x & - & y & - & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

b.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 6
On cherche un polynôme P de degré 3 qui vérifie $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$.

1) Un tel polynôme existe-t-il ? Est-il unique ?

2) Même question pour un polynôme P de degré 4 vérifiant $P(i) = i$, pour $i = 0, 1, 2, 3$ et 4.

Exercice 7
Résoudre les systèmes suivants.

a)

$$\begin{cases} -x + 5y = 5 \\ 2x + 7y + z = -6 \\ -9x + y - 7z = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -25 \\ x + 2y - 3z = 20 \\ 3x + y - 2z = 14 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -y + z = -1 \\ -x - z = -2 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ -x - 3y + 8z - 9t = 3 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x + 2y + 3t = 1 \\ -y + 9z = 2 \\ -2y + 19z - t = 3 \\ 5x + 11y - 9z + 16t = 4 \end{cases}$$

Exercice 8
Résoudre les systèmes suivants.

a)

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 3z + t = -8 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Produit de matrices via la formule du cours (définition)

Exercice 9
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $S(A)$ la somme des termes de A.
On note $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $J = (1)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.
Vérifier que : $J \times A \times J = S(A) \cdot J$.

Exercice 10
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soient i, j dans $[\![1, n]\!]$.
On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient $e_{i,j}$ égal à 1.

a. Calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.

b. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.
(on pourra utiliser la notation $\delta_{i,j}$ qui désigne 1 si $i = j$ et 0 sinon)

Exercice 11
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n dans chacun des cas suivants.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Équations matricielles

Exercice 12
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(*i.e.* l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telles que $AM = MA$)

Exercice 13
On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.
Résoudre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $A^2 = B$, d'inconnue A.

Exercice 14
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.

b) Déterminer toutes les matrices $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

Matrices symétriques, antisymétriques, transposée

Exercice 15

1) Exhiber les matrices à la fois antisymétriques et diagonales.

2) Montrer que $A\,A^T$ est symétrique pour toute matrice A.

3) Soient A, B deux matrices symétriques.

  a) Montrer que : AB est symétrique $\Leftrightarrow$ $AB = BA$

  b) Que dire si elles sont antisymétriques ?

  c) Si l'une est symétrique et l'autre antisymétrique ?

Trace d'une matrice

Exercice 16

Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})$, de taille $n \times n$, on appelle *trace* de A, et on note $\mathrm{tr}(A)$, le nombre $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$.

a) Quelle est la trace de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$? Que valent $\mathrm{tr}(I_n)$ et $\mathrm{tr}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})})$?

b) Démontrer, pour tout $(A, B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$: $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

c) Démontrer, pour tout $(A, B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

d) En déduire que l'équation $AB - BA = I$, d'inconnues $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, n'a pas de solution.

Exercice 17

Trouver toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\mathrm{tr}(A\,A^T) = 0$.

Obtention de l'inverse de A par une relation $AB = I_n$

Exercice 18

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = 2\,I_3 - A$.

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 19

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^3 - A$.

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 20

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$.

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Calcul d'inverse par pivot de Gauss

Exercice 21

Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Puissance $m^{\text{ème}}$ par récurrence

Exercice 22

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

a) Montrer que $B^2 = 3B$.

b) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B$.

Puissance $m^{\text{ème}}$ par la formule du binôme

Exercice 23

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Soit $B = A - I_3$. Calculer B^2, B^3 et en déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer (simplifier !) A^n par la formule du binôme.

Exercice 24

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $(A - I)^2 = 0$.

b) En utilisant le fait que $A = (A - I) + I$, calculer A^n pour $n \geqslant 2$.

Exercice 25

Soit P une matrice carrée telle que $P^2 = P$.

a) Montrer que si P est inversible, alors $P = I$.
Donner un exemple de matrice P qui n'est ni nulle ni égale à I.

b) Montrer que la matrice $Q = I - P$ vérifie aussi $Q^2 = Q$.

c) Montrer que $PQ = QP = 0$.

d) Calculer $(I + P)^n$, pour tout entier naturel n.

Puissance $m^{\text{ème}}$ de matrices et suites définies par récurrence

Exercice 26

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = u_n A + v_n I$.
On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1}, u_n, v_{n+1} et v_n.

c) On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$.
Reconnaître les suites (α_n) et (β_n).

d) En déduire u_n et v_n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 1,\ u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que $Q = P^{-1}$.

b) Que vaut $D = QAP$? En déduire D^n.

c) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $A^n = PD^nQ$.
En déduire les coefficients de A^n.

d) Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire une expression de u_n suivant n.

Exercice 28

On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ et les relations de récurrences $u_{n+1} = 6u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 4v_n$.

a) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b) Montrer qu'on peut décomposer A sous la forme $A = 5I + J$, où J est une matrice qui vérifie $J^2 = 0$. En déduire A^n pour tout $n \geqslant 0$.

c) Obtenir alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Vers la $2^{\text{ème}}$ année

Exercice 29

On note : $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A+I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. Déterminer $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n$.

4. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^{n+1}\big((n-1)\,I + n\,A\big)$.

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Exercice 30

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A-2I)(A-I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.

3. Déterminer $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\}$.

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

5. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Structure algébrique de $\mathbb{K}[X]$

Exercice 31
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n.

1. Montrer que P' divise P si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$(X - \lambda)\, P'(X) \;=\; n\, P(X)$$

2. En déduire les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé.
*On pourra décomposer le polynôme P introduit en question **1.** sur la famille* $\big(1, X-\lambda, \dots, (X-\lambda)^n\big)$.

Exercice 32
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer le degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$ en fonction du degré de P.

Exercice 33
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z},\ P(n) = P(n+1)$. Montrer que $\deg(P) \leqslant 0$.

Fonctions polynomiales, racines

Exercice 34
On considère le polynôme P défini par $P(X) = 3X^2 - X - 2$.

a. Montrer que 1 est une racine de P, et trouver un polynôme Q tel que :
$P(X) = (X-1)Q(X)$.

b. Étudier le signe de P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 35
Démontrer par l'absurde qu'un polynôme de degré 2 ne peut avoir 3 racines distinctes ou plus.

Exercice 36

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x$.

2. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \bar{z}$.

Exercice 37
Pour $T \in \mathbb{C}^*$, déterminer les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est T-périodique.

Exercice 38
Soit P une fonction polynomiale paire. Montrer que P n'a que des puissances paires.

Exercice 39
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$. On pourra en particulier s'intéresser à une racine de module maximal d'un polynôme P non nul satisfaisant l'équation.

Exercice 40
Soit $p \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2p+1$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0, 2p+1]\!]$, $P^{(k)}(0) < 0$.

1. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

2. Montrer que toutes les racines réelles de P sont strictement négatives.

Exercice 41
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On pose :

$$P(X) \ = \ \big((X-a)^n \, (X-b)^n\big)^{(p)}$$

Un des objectifs de l'exercice est de calculer la valeur prise par la fonction polynomiale $\tilde{P}$ associée à P au point a.

1. On suppose : $p > 2n$. Que vaut P ? Conclure quant à l'objectif de cet exercice.

2. On suppose : $p < n$. Justifier le fait que a est racine de P. En déduire la valeur de $\tilde{P}(a)$.

3. On suppose : $n \leqslant p \leqslant 2n$.

  a) Pour tout $(\lambda, m, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^2$ vérifiant $k \leqslant m$, donner une expression explicite du polynôme dérivé d'ordre k de $(X-\lambda)^m$.

  b) En utilisant alors la formule de Leibniz, démontrer :

$$\tilde{P}(a) \ = \ \frac{p! \, n!}{(p-n)! \, (2n-p)!} \ (a-b)^{2n-p}$$

Exercice 42
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \circ P = P$.

Exercice 43
Déteminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

Exercice 44
On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Delta & : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

1. Montrer pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Delta^q(P) \ = \ \sum_{k=0}^{q} (-1)^{q-k} \binom{q}{k} P(X+k)$$

en notant Δ^q la composée de Δ avec elle-même q fois.

2. *a)* Montrer que pour tout polynôme réel P non nul : $\deg\big(\Delta(P)\big) \leqslant \deg(P) - 1$.

  b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$, la valeur de $\Delta^n(P)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\tilde{P}(k) = r^k$. Calculer la valeur de $\tilde{P}(n+1)$.

Exercice 45
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant : $P(X^2) = P \times P(X+1)$.

1. Soit P un polynôme non nul de $\mathcal{A}$.
   a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors il en est de même, pour tout $r \in \mathbb{N}$, de $a^{(2^r)}$.
   b) En déduire que les racines non nulles de P sont de module 1.

2. Soit P un polynôme non nul de $\mathcal{A}$.
   a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors il en est de même de $(a-1)^2$.
   b) Quelles sont les racines de P ?

3. Déterminer explicitement les éléments de $\mathcal{A}$.

Résolution d'équations

Exercice 46
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$

b. $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$

c. $x = \sqrt{x} + 2$

d. $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

e. $(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 + 2x - 5)^2$

f. $(2x-3)^2 = (7x+5)^2$

Exercice 47
Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout x différent de 0, 1 et -1, on ait :

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

Autour de la division euclidienne

Exercice 48
À quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 49
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de valeurs prises par la fonction polynomiale associée à P et par les dérivées de cette dernière.

Exercice 50
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 51
Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(X) - X$ divise $(P \circ P)(X) - X$.

Exercice 52
Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de la division euclidienne de X^n par P.

Exercice 53
On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$.

1. Calculer, en fonction de a, $P(a)$, $P'(a)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X-a)^2$ divise P.

2. Soit $b \in \mathbb{K}$ distinct de a. Calculer, en fonction de a, b, $P(a)$, $P(b)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X-a)(X-b)$ divise P.

Exercice 54
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X-1)^4$ divise $P+1$ et $(X+1)^4$ divise $P-1$.

1. Soit P un polynôme de $\mathcal{A}$. Démontrer que $(X^2-1)^3$ divise P'.

2. Déterminer un élément de $\mathcal{A}$ de degré 7.

3. Déterminer explicitement les éléments de $\mathcal{A}$.