Colles

Semaine 17 : 20 janvier - 24 janvier

I. Questions de cours

Exercice 1
Démontrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.

Exercice 2
Résoudre le système suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2t & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & + & t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & + & 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 3
Démontrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 4
Démontrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

II. Exercices

Divisibilité

Exercice 5
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $5n^3 + n$ est divisible par 6.
Indication : être divisible par 6*, c'est être divisible par* 3 *et par* 2*.*

Exercice 6
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ est divisible par 9.
Indication : calculer la congruence de $(3k)^3$, $(3k+1)^3$ *et* $(3k+2)^3$ *modulo* 9*.*

Exercice 7
Montrer qu'un entier de la forme $8n + 7$ ne peut être somme de trois carrés parfaits.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde, regarder la parité de ces trois carrés parfaits, puis la congruence modulo 8 *de* $(4k+1)^2$ *et* $(4k+3)^2$*.*

Exercice 8
Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons : $x^2 - y^2 \equiv 1\ [5]$. Démontrer : $5 \mid xy$.
Indication : on pourra commencer par examiner la congruence modulo 5 *de* a^2 *en fonction de la congruence modulo* 5 *de* a*.*

Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun

Exercice 9
Déterminer le PGCD et le PPCM des familles d'entiers suivantes.

1. $(15, 25, 35, 45)$

2. $(734, 848)$

3. $(78, 91, 143, 169)$

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}$ n'est pas décimal.

Exercice 11
Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.

Exercice 12
Trouver un entier naturel dont le produit des diviseurs vaut 45^{42}.

Exercice 13
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $(n! + 1) \wedge \big((n+1)! + 1\big) = 1$.

Exercice 14
Soit $(p, q, r) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $p \wedge q = 1$. Démontrer : $p \wedge r = p \wedge qr$.

Exercice 15
Soit $(a, b) \in [\![0, 10]\!]^2$.

1. Montrer que $a^2 + b^2$ est divisible par 11 si et seulement si $a = b = 0$.
Indication : on pourra faire une étude exhaustive de tous les cas.

2. En déduire que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, 11 divise $a^2 + b^2$ si et seulement si 11 divise a et 11 divise b.

Congruences

Exercice 16
Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{Z}^*)^2$. Démontrer :

1. si $a \equiv b\ [c]$ et $d \mid c$, alors $a \equiv b\ [d]$

2. si $a \equiv b\ [c]$ et $a \equiv b\ [d]$, alors $a \equiv b\ [c \vee d]$.

3. si $ac \equiv bc\ [d]$ et $c \neq 0$, alors $a \equiv b\ [d/(d \wedge c)]$

Exercice 17
Soit $x \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $x^2 \equiv 1\ [35]$ si et seulement si $\big(x \equiv 1\ [5]$ ou $x \equiv -1\ [5]\big)$ et $\big(x \equiv 1\ [7]$ ou $x \equiv -1\ [7]\big)$.

2. Résoudre alors l'équation $x^2 \equiv 1\ [35]$.

Exercice 18
On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5\,u_n - 6 \end{cases}$$

1. Quelle conjecture peut-on émettre sur les deux derniers chiffres de (u_n) ?

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+2} \equiv u_n\ [4]$.
En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_{2k} \equiv 2\ [4] \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} \equiv 0\ [4]$$

3. *a)* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\,u_n = 5^{n+2} + 3$.
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\,u_n \equiv 28\ [100]$.

4. Valider la conjecture émise à la première question.

Exercice 19
Quel est le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de $7^{(7^7)}$?

Exercice 20

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les décimales d'un entier naturel n pour que $3 \mid n$ (resp. $11 \mid n$).

2. En quelles bases l'écriture d'un entier naturel donné en base 10 est-elle évidente à trouver ?

3. Étudier alors la divisibilité de 11 257 838 271 654 382 948 276 par 7, puis par 37.

Nombres premiers

Exercice 21
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, il en est de même de n. Que dire de la réciproque ?

Exercice 22
Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n + 1$ soit premier. Montrer que a est pair, puis qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^m$.
Indication : on pourra écrire n sous la forme d'un produit d'un nombre impair et d'une puissance de 2.

Exercice 23
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 24
Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ un couple d'entiers premiers entre eux. Montrer que si ab est un carré parfait, alors a et b sont des carrés parfaits.

Exercice 25
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $F_n = 2^{2^n} + 1$. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme celle des *nombres de Fermat* dont on a cru, un temps, qu'elle était constituée de nombres premiers. Euler démontra que F_5 n'était pas premier, mettant fin à cette croyance.

1. **Pourquoi imposer un exposant égal à une puissance de 2 ?**
Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que si $2^a + 1$ est premier, alors a est une puissance de 2.

2. **Relation entre les F_n.**
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$F_{n+1} \;=\; (F_n - 1)^2 + 1 \quad \text{et} \quad F_n \;=\; 2 + \prod_{i=0}^{n-1} F_i$$

3. En déduire que les F_n sont deux-à-deux premiers entre eux.

Exercice 26
On considère l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{N}^* & \to \mathbb{N}^* \\ & & n & \mapsto \operatorname{Card}\big(\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \leqslant n \ \texttt{ET} \ m \wedge n = 1\}\big) \end{array}$$

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{\substack{d \in \mathbb{N}^* \\ d \mid n}} \varphi(d) \;=\; n.$

Exercice 27
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

1. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} \leqslant p_1 \cdots p_n + 1$$

2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant 2^{2^n}$.

3. *a)* Démontrer : $\forall n \geqslant 3$, $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{n-1}} \geqslant 2^{2^n}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Montrer que pour x assez grand :

$$\ln\big(\ln(x)\big) \;\leqslant\; \pi(x) \;\leqslant\; x$$

Résolution de systèmes linéaires

Exercice 28
Résoudre les systèmes suivants.

a.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 2t & = & -8 \\ x & + & y & - & 2z & + & t & = & 4 \\ x & - & 2y & + & z & + & t & = & -2 \\ 2x & - & y & - & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

b.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 29
On cherche un polynôme P de degré 3 qui vérifie $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$.

1) Un tel polynôme existe-t-il ? Est-il unique ?

2) Même question pour un polynôme P de degré 4 vérifiant $P(i) = i$, pour $i = 0, 1, 2, 3$ et 4.

Exercice 30
Résoudre les systèmes suivants.

a)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 5y & & & = & 5 \\ 2x & + & 7y & + & z & = & -6 \\ -9x & + & y & - & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & -25 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 20 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 14 \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 4 \\ & - & y & + & z & = & -1 \\ -x & & & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

d)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 1 \\ -x & - & 3y & + & 8z & - & 9t & = & 3 \end{array}\right.$$

e)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & & & + & 3t & = & 1 \\ & - & y & + & 9z & & & = & 2 \\ & - & 2y & + & 19z & - & t & = & 3 \\ 5x & + & 11y & - & 9z & + & 16t & = & 4 \end{array}\right.$$

Exercice 31
Résoudre les systèmes suivants.

a)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & & & = & 2 \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & 3t & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 3z & + & t & = & -8 \end{array}\right.$$

d)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & & & + & 2z & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Manipulations de base sur les matrices

Exercice 32
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A+B$, $2A-B$, AB, BA, $(AB)^T$ et $B^T\,A^T$.

b) Calculer $3(A-2B)+2(3B+C)-(2A+C)$.

c) Résoudre l'équation $A-3X=2B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 33

Calculer LC et CL, où $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 34
Soit $(A,B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$.

a) Développer et simplifier $S = (2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B)$.

b) Même question pour $T = (A+B)(2A^2-2B) - 2A^2(A+B) + (-A+B)^2$.

Produit de matrices via la formule du cours (définition)

Exercice 35
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $S(A)$ la somme des termes de A.
On note $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $J = (1)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.
Vérifier que : $J \times A \times J = S(A) \cdot J$.

Exercice 36
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soient i,j dans $[\![1,n]\!]$.
On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient $e_{i,j}$ égal à 1.

a. Calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.

b. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.
(on pourra utiliser la notation $\delta_{i,j}$ qui désigne 1 si $i=j$ et 0 sinon)

Exercice 37
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n dans chacun des cas suivants.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Équations matricielles

Exercice 38
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(*i.e.* l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telles que $AM = MA$)

Exercice 39
On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.
Résoudre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $A^2 = B$, d'inconnue A.

Exercice 40
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.

b) Déterminer toutes les matrices $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

Matrices symétriques, antisymétriques, transposée

Exercice 41

1) Exhiber les matrices à la fois antisymétriques et diagonales.

2) Montrer que $A\,A^T$ est symétrique pour toute matrice A.

3) Soient A, B deux matrices symétriques.

- *a)* Montrer que : AB est symétrique $\Leftrightarrow$ $AB = BA$
- *b)* Que dire si elles sont antisymétriques ?
- *c)* Si l'une est symétrique et l'autre antisymétrique ?

Trace d'une matrice

Exercice 42
Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})$, de taille $n \times n$, on appelle *trace* de A, et on note $\mathrm{tr}(A)$, le nombre $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$.

a) Quelle est la trace de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$? Que valent $\mathrm{tr}(I_n)$ et $\mathrm{tr}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})})$?

b) Démontrer, pour tout $(A, B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$: $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

c) Démontrer, pour tout $(A, B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

d) En déduire que l'équation $AB - BA = I$, d'inconnues $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, n'a pas de solution.

Exercice 43
Trouver toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\mathrm{tr}(A\,A^T) = 0$.

Obtention de l'inverse de A par une relation $AB = I_n$

Exercice 44
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = 2\,I_3 - A$.

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 45

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^3 - A$.

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 46

On considère les matrices suivantes A et B suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A^2, A^3 puis montrer que $A^3 - A^2 - A + I = 0$.

b) En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

c) Montrer que $B^3 - 3B^2 + 2B = 0$.

d) En déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 47

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$.

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 48

Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB = A + I_n$.

a) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

b) En déduire que : $AB = BA$.

Calcul d'inverse par pivot de Gauss

Exercice 49

Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Puissance $m^{\text{ème}}$ par récurrence

Exercice 50

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

a) Montrer que $B^2 = 3B$.

b) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B$.

Puissance $m^{\text{ème}}$ par la formule du binôme

Exercice 51

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Soit $B = A - I_3$. Calculer B^2, B^3 et en déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer (simplifier !) A^n par la formule du binôme.

Exercice 52

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $(A - I)^2 = 0$.

b) En utilisant le fait que $A = (A - I) + I$, calculer A^n pour $n \geqslant 2$.

Exercice 53

Soit P une matrice carrée telle que $P^2 = P$.

a) Montrer que si P est inversible, alors $P = I$.
Donner un exemple de matrice P qui n'est ni nulle ni égale à I.

b) Montrer que la matrice $Q = I - P$ vérifie aussi $Q^2 = Q$.

c) Montrer que $PQ = QP = 0$.

d) Calculer $(I + P)^n$, pour tout entier naturel n.

Puissance $m^{\text{ème}}$ de matrices et suites définies par récurrence

Exercice 54

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 1,\ u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que $Q = P^{-1}$.

b) Que vaut $D = QAP$? En déduire D^n.

c) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $A^n = PD^nQ$.
En déduire les coefficients de A^n.

d) Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire une expression de u_n suivant n.

Exercice 55
On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ et les relations de récurrences $u_{n+1} = 6u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 4v_n$.

a) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b) Montrer qu'on peut décomposer A sous la forme $A = 5I + J$, où J est une matrice qui vérifie $J^2 = 0$. En déduire A^n pour tout $n \geqslant 0$.

c) Obtenir alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Vers la $2^{\text{ème}}$ année

Exercice 56
On note : $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A+I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. Déterminer $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n$.

4. a) Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^{n+1}\big((n-1)\,I + n\,A\big)$.

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Exercice 57
On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *a)* Calculer $(A-2I)(A-I)^2$.
   b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.

3. Déterminer $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\}$.

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.
   b) Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

5. *a)* Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.