Colles

Semaine 16 : 13 janvier - 17 janvier

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Démontrer que la fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$. On la note arcsin.
2. Quelle est le sens de variation de arcsin sur $[-1,1]$?
3. Démontrer que arcsin est impaire.
4. Démontrer que arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et donner une expression de sa dérivée.

Exercice 2

1. Démontrer que la fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. On la note arctan.
2. Quelle est le sens de variation de arctan sur $\mathbb{R}$?
3. Démontrer que arctan est impaire.
4. Démontrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

Exercice 3

Démontrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.

II. Exercices

Régularité des fonctions réelles

Exercice 4

On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telle que la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1-a$, et d'une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telle que la suite $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$, f est discontinue en a (on pourra raisonner par l'absurde).
3. Montrer que f est continue en $\frac{1}{2}$ (on reviendra à la définition formelle de la notion de limite).

Exercice 5

On considère la fonction :

$$f :]0,\pi[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $]0,\pi[$.
2. Démontrer que f réalise une bijection de réciproque dérivable.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner une expression explicite $\big(f^{-1}\big)'(x)$.
4. Calculer alors la dérivée de $x \mapsto \arctan(x) + f^{-1}(x)$. Que peut-on en conclure ?

Prolongement par continuité

Exercice 6
On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-\sin(x)}{\sin\big(\cos(x)\big)} \end{array}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Prolonger f par continuité en tous les points de $\mathbb{R}$ où cela est possible.

Exercice 7
On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Suites implicites

Exercice 8
Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^n} \end{array}$$

1. Expliciter, pour tout entier naturel non nul n, la dérivée de f_n.

2. Dans cette question, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

   a) Déterùiner une fonction polynomiale g_n telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} f_n'(t) = 0 & \Leftrightarrow & g_n(t) = 0 \\ f_n'(t) > 0 & \Leftrightarrow & g_n(t) > 0 \end{cases}$$

   b) Montrer alors que g_n s'annule exactement deux fois : une fois sur $]0, 1[$ et une fois sur $]1, +\infty[$.

   c) Dresser le tableau de variations complet de f_n

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on note a_n la solution de l'équation $g_n(x) = 0$ d'inconnue x appartenant à $]0, 1[$.

   a) Si A est un élément de $]0, 1[$, préciser, si elle existe, la limite de la suite $(1 + A^n - n\,A^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b) En déduire l'existence d'un entier N supérieur ou égal à 3 tel que, pour tout $n \geqslant N$, $A \leqslant a_n \leqslant 1$. Que vient-on de démontrer ?

4. Démontrer : $a_n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Déterminer enfin, si elle existe, la limite de la suite $\big(f_n(u_n)\big)_{n\geqslant 3}$.

Exercice 9
On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ t & \mapsto & t+\ln(t) \end{array}$$

1. Montrer que f est bijective.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = f^{-1}(n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2\,u_n \geqslant n$. Que peut-on déduire sur le comportement asymptotique de la suite (u_n) ?

3. Démontrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = u_n - n$.

a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n + \ln\left(1+\dfrac{v_n}{n}\right) + \ln(n) = 0$.

b) En déduire un équivalent de $(u_n - n)$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 10
Montrer qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11
Montrer que les équations suivantes ont une solution dans l'intervalle I :

a) $\ln x = \dfrac{x^2-5}{x+2}$ sur $I = [1, 10]$.

b) $x^{2015} - x^{2016} = -1$ sur $I = [-1, 1]$.

c) $x^n + 9x^2 - 4 = 0$, sur $I = \mathbb{R}_+^*$ (n est un entier positif).

d) $x \ln x = 2$ sur $I = [2, 3]$.

Exercice 12
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On suppose que : $\forall x \in I,\ |f(x)| = 1$.

Montrer que f est constante sur I.

Exercice 13
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On suppose que : $\forall x \in I,\ f^2(x) = 1$.

Montrer que f est constante sur I.

Exercice 14
Soit f une fonction continue définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$.

Montrer que f admet un point fixe : $\exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) = x_0$.
(on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$)

Exercice 15
Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :

$$f(0) = g(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = g(0) = 1$$

Montrer que : $\forall \lambda \geqslant 0,\ \exists x_0 \in [0, 1],\ f(x_0) = \lambda\, g(x_0)$.
(on pourra considérer la fonction $h : x \mapsto f(x) - \lambda\, g(x)$)

Continuité sur un segment

Exercice 16
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et une limite finie en $-\infty$.

Montrer que f est bornée dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17

1. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est bornée et atteint ses bornes.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer :

$$\sup_{[a,b]} (f) \;=\; \sup_{]a,b[} (f)$$

On commencera par montrer que ces bornes supérieures existent.

3. Soient f et g deux fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in [a, b], \quad 0 < f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe $k \in \,]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant k\, g(x)$$

Exercice 18
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On suppose que : $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure. Qu'en est-il de sa borne inférieure ?

Exercice 19
Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall x \in [-1, 1],\ f(x) > 0$.

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $f(x) \geqslant m$.

Théorème de la bijection

Exercice 20
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on note : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer qu'il existe un unique u_n positif tel que $f_n(u_n) = 0$.

c) Calculer u_1.

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

e) En déduire le signe de u_n et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.

f) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

g) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, f_n(x) = \dfrac{2x - x^{n+1} - 1}{1 - x}$.

h) En déduire que : $2\, u_n - 1 = u_n^{n+1}$.

i) Démontrer que (u_n^{n+1}) converge vers 0 et en déduire la limite de (u_n).

Exercice 21
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ puis déterminer son signe.
Pour ce faire, on pourra étudier la fonction auxiliaire $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$ définie pour $x > -1$.

c) Montrer que f peut être prolongée par continuité à $[-1, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

d) Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in [-1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

e) Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
On pourra utiliser le fait que : $\ln 2 \approx 0,69$ *et* $\ln 5 \approx 1,61$.

Exercice 22
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$

a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer les limites de f_n quand $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.

d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.
On notera u_n cette solution.

e) Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{-1}{n} < u_n < 0$.

f) En déduire la limite de la suite (u_n).

g) En revenant à la définition de u_n, montrer que : $n\,u_n \to -\dfrac{1}{2}$.

Théorème de la limite monotone

Exercice 23
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.
On souhaite démontrer que la fonction f admet un unique point fixe autrement dit qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$.
Pour ce faire, on considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

a) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

b) En déduire que f admet un point fixe.

c) En procédant par l'absurde, démontrer que ce point fixe est unique.

d) Ce résultat est-il valable si la fonction f est croissante ?

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 24
Simplifier les expressions : $\sin\big(\arccos(x)\big)$, $\tan\big(\arcsin(x)\big)$, $\tan\big(2\arcsin(x)\big)$ et $\sin\big(2\arctan(x)\big)$ pour les réels x pour lesquels elles sont définies.

Exercice 25
On pose $x = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$. Calculer $\cos(2x)$ et donner une valeur explicite de x.

Exercice 26
Déterminer les domaines de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \arcsin(2x^2 - 3x + 2)$

2. $x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$

3. $x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Exercice 27
On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f et préciser la régularité de f.

2. Donner une expression explicite de f'. Simplifier alors l'expression de f.

3. En calculant, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ où cela a un sens, $f\big(\tan(x)\big)$, retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 28
On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Que pouvez-vous dire concernant la régularité de f sans étude particulière ?

3. Donner une expression explicite de $f'(x)$ pour tout réel x où cela a un sens. Que pouvez-vous en conclure ? Que dire alors de la dérivabilité de f en 1 ?

Exercice 29

1. Démontrer : $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Résoudre alors le système suivant, d'inconnue $(x, y) \in [-1, 1]^2$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \arcsin(y) & = & 2\arcsin(x) \\ 2\arccos(y) & = & \arccos(x) \end{array} \right.$$

Exercice 30
Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Écrire une relation analogue valable sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 31
On considère l'équation (E) $\arctan(x) + \arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$ d'inconnue réelle x, dont on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

1. Montrer que si x est une solution de (E), alors : $\dfrac{2x}{2-x^2} = \dfrac{1}{x}$. (on pourra utiliser la fonction tangente)

2. Déduire de la question précédente : $\mathcal{S} \subset \{-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}$.

3. On introduit la fonction f définie par $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(x-1) + \arctan(x+1)$.

   a) Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ ainsi que les variations de f au sens strict. Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\mathcal{S}$?

   b) Calculer $f(0)$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 32
Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan\big(\operatorname{sh}(x)\big) = \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Exercice 33
En s'inspirant des méthodes de l'exercice 31, résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x.

1. $\arctan(2x) + \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}$

2. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$

Exercice 34
On considère l'équation (E) $2\arcsin(x) = \arcsin\big(2x\sqrt{1-x^2}\big)$ d'inconnue réelle x, dont on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

1. On considère la fonction :

$$g : \begin{array}{rcl} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4\,x^2\,(1-x^2) \end{array}$$

Montrer que l'ensemble des valeurs prises par cette fonction est inclus dans $[0,1]$ (on pourra étudier directement deux inéquations ou déterminer les variations de la fonction).
En déduire que l'ensemble $\mathcal{S}$ est inclus dans l'intervalle $[-1,1]$.

2. Soit $x \in [-1,1]$.

a) Justifier l'existence et l'unicité de $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que : $\sin(\alpha) = x$.

b) Montrer alors que x est une solution de l'équation (E) si et seulement si $2\alpha = \arcsin\big(\sin(2\alpha)\big)$.

c) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$.

Divisibilité

Exercice 35
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $5n^3 + n$ est divisible par 6.
Indication : être divisible par 6, c'est être divisible par 3 et par 2.

Exercice 36
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ est divisible par 9.
Indication : calculer la congruence de $(3k)^3$, $(3k+1)^3$ et $(3k+2)^3$ modulo 9.

Exercice 37
Montrer qu'un entier de la forme $8n+7$ ne peut être somme de trois carrés parfaits.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde, regarder la parité de ces trois carrés parfaits, puis la congruence modulo 8 de $(4k+1)^2$ et $(4k+3)^2$.

Exercice 38
Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons : $x^2 - y^2 \equiv 1\ [5]$. Démontrer : $5 \mid xy$.
Indication : on pourra commencer par examiner la congruence modulo 5 de a^2 en fonction de la congruence modulo 5 de a.

Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun

Exercice 39
Déterminer le PGCD et le PPCM des familles d'entiers suivantes.

1. $(15, 25, 35, 45)$

2. $(734, 848)$

3. $(78, 91, 143, 169)$

Exercice 40
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}$ n'est pas décimal.

Exercice 41
Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.

Exercice 42
Trouver un entier naturel dont le produit des diviseurs vaut 45^{42}.

Exercice 43
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $(n! + 1) \wedge \big((n+1)! + 1\big) = 1$.

Exercice 44
Soit $(p, q, r) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $p \wedge q = 1$. Démontrer : $p \wedge r = p \wedge qr$.

Exercice 45
Soit $(a, b) \in [\![0, 10]\!]^2$.

1. Montrer que $a^2 + b^2$ est divisible par 11 si et seulement si $a = b = 0$.
Indication : on pourra faire une étude exhaustive de tous les cas.

2. En déduire que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, 11 divise $a^2 + b^2$ si et seulement si 11 divise a et 11 divise b.

Congruences

Exercice 46
Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{Z}^*)^2$. Démontrer :

1. si $a \equiv b\ [c]$ et $d \mid c$, alors $a \equiv b\ [d]$

2. si $a \equiv b\ [c]$ et $a \equiv b\ [d]$, alors $a \equiv b\ [c \vee d]$.

3. si $ac \equiv bc\ [d]$ et $c \neq 0$, alors $a \equiv b\ [d/(d \wedge c)]$

Exercice 47
Soit $x \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $x^2 \equiv 1\ [35]$ si et seulement si $\big(x \equiv 1\ [5]$ ou $x \equiv -1\ [5]\big)$ et $\big(x \equiv 1\ [7]$ ou $x \equiv -1\ [7]\big)$.

2. Résoudre alors l'équation $x^2 \equiv 1\ [35]$.

Exercice 48
On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5\,u_n - 6 \end{cases}$$

1. Quelle conjecture peut-on émettre sur les deux derniers chiffres de (u_n) ?

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+2} \equiv u_n$ [4].
En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_{2k} \equiv 2\ [4] \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} \equiv 0\ [4]$$

3. ***a)*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\,u_n = 5^{n+2} + 3$.
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\,u_n \equiv 28$ [100].

4. Valider la conjecture émise à la première question.

Exercice 49
Quel est le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de $7^{(7^7)}$?

Exercice 50

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les décimales d'un entier naturel n pour que $3 \mid n$ (resp. $11 \mid n$).

2. En quelles bases l'écriture d'un entier naturel donné en base 10 est-elle évidente à trouver ?

3. Étudier alors la divisibilité de 11 257 838 271 654 382 948 276 par 7, puis par 37.

Nombres premiers

Exercice 51
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, il en est de même de n. Que dire de la réciproque ?

Exercice 52
Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n + 1$ soit premier. Montrer que a est pair, puis qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^m$.
Indication : on pourra écrire n sous la forme d'un produit d'un nombre impair et d'une puissance de 2.

Exercice 53
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 54
Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ un couple d'entiers premiers entre eux. Montrer que si ab est un carré parfait, alors a et b sont des carrés parfaits.

Exercice 55
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $F_n = 2^{2^n} + 1$. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme celle des *nombres de Fermat* dont on a cru, un temps, qu'elle était constituée de nombres premiers. Euler démontra que F_5 n'était pas premier, mettant fin à cette croyance.

1. **Pourquoi imposer un exposant égal à une puissance de 2 ?**
Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que si $2^a + 1$ est premier, alors a est une puissance de 2.

2. **Relation entre les F_n.**
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$F_{n+1} \ = \ (F_n - 1)^2 + 1 \quad \text{et} \quad F_n \ = \ 2 + \prod_{i=0}^{n-1} F_i$$

3. En déduire que les F_n sont deux-à-deux premiers entre eux.

Exercice 56
On considère l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N}^* \\ & & n & \mapsto & \mathrm{Card}\big(\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \leqslant n \ \texttt{ET} \ m \wedge n = 1\}\big) \end{array}$$

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{\substack{d \in \mathbb{N}^* \\ d \mid n}} \varphi(d) \ = \ n.$

Exercice 57
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

1. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} \leqslant p_1 \cdots p_n + 1$$

2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant 2^{2^n}$.

3. *a)* Démontrer : $\forall n \geqslant 3$, $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{n-1}} \geqslant 2^{2^n}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Montrer que pour x assez grand :

$$\ln\big(\ln(x)\big) \ \leqslant \ \pi(x) \ \leqslant \ x$$