# Colles

Semaine 14 : 16 décembre - 20 décembre

## I. Questions de cours

**Exercice 1**
Démontrer que toute suite convergente est bornée.

**Exercice 2**
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $(c_n)$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n \;=\; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Démontrer :

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

**Exercice 3**
Énoncer et démontrer le théorème d'encadrement pour des fonctions

**Exercice 4**
Soit $f$ une fonction monotone sur $I = \,]a,b[$ $(a < b)$.
(avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)
Démontrer que $f$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en $b$. Plus précisément :

***a)*** si $f$ est croissante sur $I$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

***b)*** si $f$ est décroissante sur $I$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x\in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

# II. Exercices

## Suites classiques

### Exercice 5

On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

***a.*** Montrer que la suite $(v_n)$ de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique.

***b.*** En déduire une expression de $u_n$.

### Exercice 6

On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2 \end{cases}$

***a.*** Montrer que la suite $(u_n)$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$.

***b.*** On considère la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$.
Justifier que $(v_n)$ est bien définie.

***c.*** Quelle est la nature de la suite $(v_n)$ ?

***d.*** En déduire la formule explicite de $u_n$.

### Exercice 7

Soit $(u_n)$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$

***a.*** Montrer que la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \ln(u_n)$ est bien définie.

***b.*** Calculer $v_n$ et déduire la valeur de $u_n$.

### Exercice 8

On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{cases}$

***a.*** Vérifier que cette suite est bien définie.

***b.*** Donner une expression explicite de $u_n$. Comme dans les exercices précédents, on pourra introduire une suite auxiliaire $(v_n)$ bien choisie.

### Exercice 9

Soit $(u_n)$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \end{cases}$

On introduit la suite auxiliaire $(t_n)$ de terme général :

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$$

***a.*** Montrer que $(t_n)$ est une suite géométrique.

***b.*** En déduire une expression de $t_n$ puis de $u_n$.

## Définition de la convergence

**Exercice 10**
Soit $(u_n)$ une suite convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
On se propose de montrer que $\mathrm{e}^{u_n} \to \mathrm{e}^{\ell}$.

***a.*** Soit $A > 0$. Expliquer pourquoi, à partir d'un certain rang, on a :

$$-A \leqslant u_n - \ell \leqslant A$$

***b.*** En déduire qu'à partir d'un certain rang, on a :

$$-\mathrm{e}^{A} + 1 \leqslant \mathrm{e}^{u_n - \ell} - 1 \leqslant \mathrm{e}^{A} - 1$$

***c.*** En déduire que la suite $(1 - \mathrm{e}^{u_n - \ell})$ tend vers 0.

***d.*** Conclure.

**Exercice 11**
Soit $(u_n)$ une suite à termes entiers relatifs. On suppose que $(u_n)$ est convergente.

***1.*** Montrer que la limite de la suite $(u_n)$ appartient nécessairement à $\mathbb{Z}$.

***2.*** Montrer que la suite $(u_n)$ est stationnaire.

**Exercice 12**
Soit $(u_n)$ une suite réelle. On pose :

$$A \;=\; \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

***1.*** On suppose que $(u_n)$ diverge vers $+\infty$. Démontrer que $A$ admet un plus petit élément.

***2.*** On suppose que $(u_n)$ converge. Démontrer que $A$ admet un plus petit ou un plus grand élément.

**Exercice 13** *(Autour de Césaro)*
Soit $(u_n)$ une suite complexe telle que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$.

***1.*** On définit une suite $(v_n)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \;=\; \frac{u_1 + 2\,u_2 + \cdots + n\,u_n}{n^2} \;=\; \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\,u_k$$

Démontrer : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{2}$.

***2.*** On définit une suite $(w_n)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \;=\; \frac{\binom{n}{0}\,u_0 + \binom{n}{1}\,u_1 + \cdots + \binom{n}{n}\,u_n}{2^n} \;=\; \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_k$$

Démontrer : $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

## Calculs de limites

### Exercice 14

***a.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-3n^7+5n-n^3}{n^2+1}$

***b.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n\ n^2+3n}{n^2+\sqrt{n}}$

***c.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}+2}{\mathrm{e}^{\ln n+3}-5}$

***d.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2\mathrm{e}^n-n\mathrm{e}^{2n}}{n^3\ln n-n\,(\ln n)^3}$

***e.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^2+3n+1}{\ln n+5}$

***f.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3-5n\sqrt{n}+n-\ln n+n^{-1}}{\mathrm{e}^{3n}-\mathrm{e}^n+1-\mathrm{e}^{-n}}$

***g.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2}-n$

***h.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}$

***i.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

***j.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\ \mathrm{e}^{-3n}$

***k.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{n!}$

### Exercice 15

***a.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^{\frac{1}{n}}+5^{\frac{1}{n}})^n$

***b.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+n^2\right)^{1/n}$

***c.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{e}^n+\sqrt{2})^{\frac{1}{n^2}}$

***d.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1+\mathrm{e}^{n^2})^{\frac{1}{n}}}{n\ \ln n-\sqrt{n}}$

### Exercice 16

***a.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

***b.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)}$

***c.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-3)\ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$

***d.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

### Exercice 17

***a.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n^3)}{n}$

***b.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$

***c.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$

***d.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan\left(\dfrac{n^2-n\ \cos(n)+(-1)^n}{\ln(n)+n^2}\right)$

***e.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(5\ \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+\dfrac{1}{5}\ \cos(n)\right)^n$

***f.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} n+(-1)^n\sqrt{n}$

## Suites extraites

### Exercice 18

Montrer que les suites suivantes sont divergentes.

***a)*** $\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right)$ ***b)*** $\left(\dfrac{5n^2+\sin(n)}{2\,(n+1)^2\,\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)}\right)$ ***c)*** $\left(\dfrac{2+n\,\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\,\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)}\right)$

### Exercice 19

***1.*** Soit $(u_n)$ une suite réelle croissante. On suppose que $(u_n)$ admet une suite extraite convergente. Démontrer que la suite $(u_n)$ converge.

***2.*** Démontrer que si les suites extraites $(u_{3n})$, $(u_{3n+1})$ et $(u_{3n+2})$ convergent vers le même complexe $\ell$, alors $(u_n)$ converge vers $\ell$.

***3.*** On suppose qu'il existe un réel $\ell$ tel que pour tout $k \in [\![2,+\infty[\![$, la suite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$. Peut-on en déduire la convergence de la suite $(u_n)$ ?

## Théorème de convergence monotone / d'encadrement

### Exercice 20

Soit la suite définie par $u_n = \dfrac{5^n}{n!}$ pour tout $n \geqslant 0$.

***a.*** Calculer les cinq premiers termes. La suite $(u_n)$ semble-t-elle monotone ?

***b.*** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante à partir de $n = 4$.

***c.*** Montrer que pour $n \geqslant 5$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{5}{6}\, u_n$.

***d.*** Soit la suite géométrique $(v_n)$ de premier terme $v_5 = u_5$ et de raison $\dfrac{5}{6}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 5$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

***e.*** Déterminer la limite de $(u_n)$.

### Exercice 21

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

***a.*** Montrer que la suite est bien définie et à termes strictement positifs.

***b.*** En déduire que $(u_n)$ est monotone.

***c.*** Pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, exprimer ${u_{k+1}}^2 - {u_k}^2$ en fonction de ${u_k}^2$.

***d.*** En déduire que pour tout $n > 0$, on a :

$${u_n}^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{{u_k}^2}$$

***e.*** En déduire que pour $n$ non nul, ${u_n}^2 \geqslant 2n+1$ puis la limite de $(u_n)$.

## Suites implicites

**Exercice 22**
Pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$$

*1.* Démontrer que, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On la note $u_n$.

*2.* Pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n) - f(u_n)$. En déduire que $(u_n)$ est monotone.

*3.* Démontrer que la suite $(u_n)$ converge vers 0.

*4.* Démontrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

## Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

**Exercice 23**
Étudier les suites $(u_n)$ définies ci-dessous.

*1.* $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\ \ln(1 + u_n) \end{cases}$

*2.* $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\,(1 - u_n) \end{cases}$

*3.* $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2 + u_n} \end{cases}$

**Exercice 24**
On définit une suite réelle $(u_n)$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \,]0,1[ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2} \end{cases}$$

*1.* Démontrer que la suite $(u_n)$ converge vers 1.

*2.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{1 - u_n}$. Démontrer que la suite $(v_{n+1} - v_n)$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

*3.* Démontrer, en utilisant le théorème démontré en question *1.* de l'exercice **??** :

$$1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

## Suites adjacentes

**Exercice 25**
Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 3 & \text{et} & v_0 = 11 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4} & \text{et} & v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

*a.* Étudier la suite $(v_n - u_n)$. Calculer son terme général en fonction de $n$, quel est son signe ? Donner sa limite.

*b.* Montrer que $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ est décroissante.
Que peut-on en déduire ?

*c.* Étudier la suite $(u_n + v_n)$. Que conclure ?

**Exercice 26**
Soit $a$ et $b$ deux réels positifs. Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \ \texttt{ET} \ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

***1.*** ***a)*** Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont bien définies, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant v_n$$

***b)*** En déduire la monotonie des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

***c)*** Démontrer que $(u_n)$ et $v_n)$ sont convergentes et ont même limite que l'on note $M(a, b)$.

***2.*** ***a)*** Calculer $M(0, 1)$ et $M(1, 1)$.

***b)*** Démontrer, pour tout $(x, y) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^2$ :

$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad M(1, x) \leqslant M(1, y)$$

**Exercice 27** *(e est irrationnel)*
Le but de cet exercice est de montrer que e est un nombre irrationnel.

***1.*** On note $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n \ = \ u_n + \frac{1}{n\, n!}$$

***a)*** Déterminer le sens de monotonie de $(u_n)$ et $(v_n)$.

***b)*** En déduire qu'elles convergent vers une limite commune. On la note $\ell$.

***c)*** Supposons que $\ell$ est rationnel. Il existe alors $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $\ell = \frac{p}{q}$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ < \ \frac{p}{q} \ < \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\, n!}$$

***d)*** Conclure à une absurdité en choisissant $n = q$.

***2.*** Le but de cette question est de démontrer : $\ell = \mathrm{e}$.

***a)*** Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathrm{e} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^t\ dt$$

***b)*** Démontrer :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\ dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

***c)*** Conclure.

**Exercice 28**
On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par leur premier terme $(u_0, v_0) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \ = \ \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \ = \ \frac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n}$$

*1.* Montrer que cette définition est licite puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant v_n$.

*2.* Montrer que $(u_n)$ est décroissante à partir d'un certain rang et que $(v_n)$ est croissante à partir d'un certain rang.

*3.* ***a)*** Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_{n+1} - v_{n+1} \ \leqslant \ \frac{u_n - v_n}{2}$$

***b)*** En déduire, à l'aide des questions précédentes, que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

*4.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n\,v_n$.

*5.* En déduire les limites de $(u_n)$ et $(v_n)$.

## CCINP MP

**Exercice 29**
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite $(u_n)$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \ = \ x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \arctan(u_n) \end{array} \right.$$

*1.* ***a)*** Démontrer que la suite $(u_n)$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de $x_0$, le sens de variation de $(u_n)$.

***b)*** Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

*2.* Déterminer l'ensemble des fonctions $h$, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h\big(\arctan(x)\big)$.

## Calcul de limites

**Exercice 30**
Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(2x) - f(x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

*1.* Que vaut : $\sum\limits_{k=1}^{n} \left( f\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\dfrac{x}{2^k}\right) \right) + f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ ?

*2.* En déduire : $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

**Exercice 31**
Déterminer les limites suivantes.

***a.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{9x^3}$

***b.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x-1}}{(\ln x)^4}$

***c.*** $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-9}$

***d.*** $\lim\limits_{x\to1} \ln(x+3)-\ln(x-1)$

***e.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}$

***f.*** $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x^2-9}$

***g.*** $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$

***h.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$

***i.*** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$

***j.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+3)-\ln(x-1)$

***k.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)-2\ln x$

***l.*** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x\ln x}{\sqrt{x}+1}$

***m.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4\,e^{-\sqrt{x}}$

***n.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^3}}{x}$

## Utilisation du taux d'accroissement

**Exercice 32**
Déterminer les limites suivantes.

***a.*** $\lim\limits_{x\to0} (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$

***b.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$

**Exercice 33**
Déterminer les limites suivantes.

***a.*** $\lim\limits_{x\to0^+} \left(1+x^3\right)^{1/x}$

***b.*** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1-5x)}{x}$

***c.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

***d.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

***e.*** $\lim\limits_{x\to0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

***f.*** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

***g.*** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$

***h.*** $\lim\limits_{x\to0} (1+x)^{\ln x}$

***i.*** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$

***j.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\ln\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)$

## Limite à droite, limite à gauche

### Exercice 34

Soit $a \in \mathbb{R}$.

***a.*** La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle continue en $a$ ?

***b.*** La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ est-elle continue en $a$ ?

### Exercice 35

Étudier la continuité au point $x_0$ des fonctions suivantes.

***a.*** $x_0 = 2$ et $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$

***b.*** $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2+5x-4}{2x+1} & \text{si} \quad x \neq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

***c.*** $x_0 = 0$ et $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x - \mathrm{e}^{1/x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

***d.*** $x_0 = 0$ et $h(x) = \begin{cases} x \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

***e.*** $x_0 = 1$ et $j(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

***f.*** $x_0 = 0$ et $k(x) = \dfrac{x^2 + 2|x|}{x}$

## Limites infinies, définitions équivalentes

### Exercice 36

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.
Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

***a.*** $f$ admet la limite $+\infty$ en $x_0$.

***b.*** $\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B)$

***c.*** $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B)$

### Exercice 37

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.
Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

***a.*** $f$ admet la limite $-\infty$ en $x_0$.

***b.*** $\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B)$

***c.*** $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant B)$

**Exercice 38**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

***a.*** $f$ admet la limite $-\infty$ en $+\infty$.

***b.*** $\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B)$

***c.*** $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant B)$

## Démonstration « avec les $\varepsilon$ »

**Exercice 39**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.

***a.*** Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x \to x_0^-} (f+g)(x) = +\infty$$

Quel énoncé peut-on écrire quand $x \to x_0^+$ ?

***b.*** Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$$

***c.*** Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to x_0} (f \times g)(x) = \ell_1 \ell_2$$

On pourra remarquer que :
$f(x)g(x) - \ell_1\ell_2 = f(x)(g(x) - \ell_2) + \ell_2(f(x) - \ell_1)$.

**Exercice 40**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.
Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ bornée} \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f \times g)(x) = 0$$

**Exercice 41**
Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $f$ est constante.

**Exercice 42**
Montrer qu'une fonction réelle définie et périodique sur $\mathbb{R}$, admettant une limite en $+\infty$ est constante.

**Exercice 43**
Montrer qu'une fonction réelle $f$, définie sur $\mathbb{R}$, admettant une limite en 0 et vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f(2x) = f(x)$ est constante.