Colles

Semaine 13 : 9 décembre - 13 décembre

I. Questions de cours

Exercice 1
On note (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\,u_n + 4 \end{cases}$$

Déterminer une formule explicite du terme général de la suite (u_n).

Exercice 2
On note (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2} \end{cases}$$

Déterminer une formule explicite du terme général de la suite (u_n).

Exercice 3
On note E l'ensemble des fonctions bornées.
Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{\, |f(x)| \mid x \in [0,1]\}$.
Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| = \sup(A_f)$.

1. Que signifie $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E ?

2. Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est homogène.

Exercice 4

1. Démontrer que toute suite convergente est bornée.

2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note (c_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Démontrer :

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

II. Exercices

Propriétés de $\mathbb{R}$

Exercice 6
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b$$

1. Démontrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et : $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

2. On suppose maintenant :

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a < b$$

Peut-on en conclure : $\sup(A) < \inf(B)$?

Exercice 7
Déterminer, s'ils existent, les bornes supérieures, les bornes inférieures, les maxima et les minima des parties de $\mathbb{R}$ suivantes.

1. $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \mid (n,p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2 \right\}$

2. $B = \left\{ \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

3. $C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^p \mid (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \right\}$

Exercice 8
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{aligned} C &= \{a + b \mid (a,b) \in A \times B\} \\ D &= \{\lambda\, a \mid a \in A\} \\ E &= \{a\, b \mid (a,b) \in A \times B\} \end{aligned}$$

1. Démontrer que $\sup(C)$ existe et vaut $\sup(A) + \sup(B)$.

2. Que peut-on dire de l'existence et de la valeur de $\sup(D)$ et $\sup(E)$?
On pourra formuler des hypothèses supplémentaires adéquates sur A et B.

Suites classiques

Exercice 9
Pour chacune des suites suivantes, définies par récurrence, donner une expression explicite de u_n.

a. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 6$.

b. $u_0 = 1$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

c. $u_0 = 1$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

d. $u_0 = 2$; $u_1 = \dfrac{10}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$.

Exercice 10 *(Somme d'une suite arithmétique)*
Soit (u_n) une suite arithmétique.

a. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n$.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$.

c. Retrouver la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} k$ à l'aide de cette formule.

Exercice 11
Déterminer les suites bornées vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Exercice 12
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n \end{cases}$

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique.

b. En déduire une expression de u_n.

Exercice 13
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

a. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique.

b. En déduire une expression de u_n.

Exercice 14
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2 \end{cases}$

a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$.

b. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$.
Justifier que (v_n) est bien définie.

c. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

d. En déduire la formule explicite de u_n.

Exercice 15
Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$

a. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$ est bien définie.

b. Calculer v_n et déduire la valeur de u_n.

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{cases}$

a. Vérifier que cette suite est bien définie.

b. Donner une expression explicite de u_n. Comme dans les exercices précédents, on pourra introduire une suite auxiliaire (v_n) bien choisie.

Exercice 17 *(Des suites récurrentes croisées)*

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ v_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

a. Pour tout entier n strictement positif, on pose : $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Pour tout entier n strictement positif, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
Démontrer que la suite (t_n) est constante.

c. Exprimer w_n en fonction de n.

d. En déduire une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n.

e. Calculer u_2, v_2, u_3 et v_3 à l'aide de la relation de récurrence, puis en utilisant le résultat de la question précédente.

Exercice 18

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \end{cases}$

On introduit la suite auxiliaire (t_n) de terme général :

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$$

a. Montrer que (t_n) est une suite géométrique.

b. En déduire une expression de t_n puis de u_n.

Exercice 19

On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3$$

a. Déterminer deux réels a et b tels que la suite (v_n) définie par $v_n = an + b$ vérifie la relation ci-dessus.

b. Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n - v_n$ est d'un type bien connu, en déduire la valeur de z_n et celle de u_n.

Définition de la convergence

Exercice 20 *Quelques démonstrations du cours ...*

a. On suppose que (u_n) et (v_n) convergent vers 0.
Montrer (avec les ε) que $u_n v_n$ tend vers 0.

b. On suppose que (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ'.
Montrer que $(u_n - \ell)(v_n - \ell')$ tend vers 0 et en déduire la limite de $u_n v_n$.

c. On suppose $u_n > 0$ (à partir d'un certain rang) et $u_n \to 0$.
Montrer que $1/u_n \to +\infty$.

d. On suppose que $u_n \to +\infty$. Montrer que $1/u_n \to 0$.

Exercice 21
Soit (u_n) une suite convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
On se propose de montrer que $\mathrm{e}^{u_n} \to \mathrm{e}^{\ell}$.

a. Soit $A > 0$. Expliquer pourquoi, à partir d'un certain rang, on a :

$$-A \leqslant u_n - \ell \leqslant A$$

b. En déduire qu'à partir d'un certain rang, on a :

$$-\mathrm{e}^{A} + 1 \leqslant \mathrm{e}^{u_n - \ell} - 1 \leqslant \mathrm{e}^{A} - 1$$

c. En déduire que la suite $(1 - \mathrm{e}^{u_n - \ell})$ tend vers 0.

d. Conclure.

Exercice 22
Soit (u_n) une suite à termes entiers relatifs. On suppose que (u_n) est convergente.

1. Montrer que la limite de la suite (u_n) appartient nécessairement à $\mathbb{Z}$.

2. Montrer que la suite (u_n) est stationnaire.

Exercice 23
Soit (u_n) une suite réelle. On pose :

$$A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

1. On suppose que (u_n) diverge vers $+\infty$. Démontrer que A admet un plus petit élément.

2. On suppose que (u_n) converge. Démontrer que A admet un plus petit ou un plus grand élément.

Exercice 24 *(Autour de Césaro)*
Soit (u_n) une suite complexe telle que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$.

1. On définit une suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + 2\,u_2 + \cdots + n\,u_n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\,u_k$$

Démontrer : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{2}$.

2. On définit une suite (w_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{\binom{n}{0} u_0 + \binom{n}{1} u_1 + \cdots + \binom{n}{n} u_n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_k$$

Démontrer : $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Calculs de limites

Exercice 25

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-3n^7+5n-n^3}{n^2+1}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n\ n^2+3n}{n^2+\sqrt{n}}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}+2}{\mathrm{e}^{\ln n+3}-5}$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2\mathrm{e}^n-n\mathrm{e}^{2n}}{n^3\ln n-n\,(\ln n)^3}$

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^2+3n+1}{\ln n+5}$

f. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3-5n\sqrt{n}+n-\ln n+n^{-1}}{\mathrm{e}^{3n}-\mathrm{e}^n+1-\mathrm{e}^{-n}}$

g. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2}-n$

h. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}$

i. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

j. $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\ \mathrm{e}^{-3n}$

k. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{n!}$

Exercice 26

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^{\frac{1}{n}}+5^{\frac{1}{n}})^n$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+n^2\right)^{1/n}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{e}^n+\sqrt{2})^{\frac{1}{n^2}}$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1+\mathrm{e}^{n^2})^{\frac{1}{n}}}{n\ \ln n-\sqrt{n}}$

Exercice 27

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-3)\ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Exercice 28

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n^3)}{n}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan\left(\dfrac{n^2-n\ \cos(n)+(-1)^n}{\ln(n)+n^2}\right)$

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(5\ \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+\dfrac{1}{5}\ \cos(n)\right)^n$

f. $\lim\limits_{n\to+\infty} n+(-1)^n\sqrt{n}$

Suites extraites

Exercice 29
Montrer que les suites suivantes sont divergentes.

a) $\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right)$ *b)* $\left(\dfrac{5n^2+\sin(n)}{2\,(n+1)^2\,\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)}\right)$ *c)* $\left(\dfrac{2+n\,\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\,\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)}\right)$

Exercice 30

1. Soit (u_n) une suite réelle croissante. On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente. Démontrer que la suite (u_n) converge.

2. Démontrer que si les suites extraites (u_{3n}), (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) convergent vers le même complexe ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

3. On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que pour tout $k \in [\![2,+\infty[\![$, la suite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Peut-on en déduire la convergence de la suite (u_n) ?

Théorème de convergence monotone / d'encadrement

Exercice 31
Soit la suite définie par $u_n = \dfrac{5^n}{n!}$ pour tout $n \geqslant 0$.

a. Calculer les cinq premiers termes. La suite (u_n) semble-t-elle monotone ?

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir de $n=4$.

c. Montrer que pour $n \geqslant 5$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{5}{6}\,u_n$.

d. Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_5 = u_5$ et de raison $\dfrac{5}{6}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 5$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

e. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 32
Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$. Calculer sa limite.

Exercice 33
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

a. Montrer que la suite est bien définie et à termes strictement positifs.

b. En déduire que (u_n) est monotone.

c. Pour tout k de $\mathbb{N}$, exprimer ${u_{k+1}}^2 - {u_k}^2$ en fonction de ${u_k}^2$.

d. En déduire que pour tout $n > 0$, on a :

$${u_n}^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{{u_k}^2}$$

e. En déduire que pour n non nul, ${u_n}^2 \geqslant 2n+1$ puis la limite de (u_n).

Exercice 34

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b. Démontrer que la suite (S_n) de terme général $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ converge vers un réel $\ell \in]2,3]$.

Exercice 35

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un rang n_0 à partir duquel : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

a. Montrer que si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.

b. Montrer que si $v_n \to 0$ alors $u_n \to 0$.

Suites implicites

Exercice 36

Pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On la note u_n.

2. Pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$, déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n) - f(u_n)$. En déduire que (u_n) est monotone.

3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 0.

4. Démontrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 37

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{2 + u_n} \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Exercice 38

Étudier les suites (u_n) définies ci-dessous.

1. $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\ \ln(1 + u_n) \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\,(1 - u_n) \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2 + u_n} \end{cases}$

Exercice 39
On définit une suite réelle (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 \in \,]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2} \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 1.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{1-u_n}$. Démontrer que la suite $(v_{n+1} - v_n)$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

3. Démontrer, en utilisant le théorème démontré en question ***1.*** de l'exercice 5 :

$$1 - u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

Suites adjacentes

Exercice 40
Soient (u_n) et (v_n) définies par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} u_0 & = & 3 & \text{et} & v_0 & = & 11 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + v_n}{4} & \text{et} & v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{array} \right.$$

a. Étudier la suite $(v_n - u_n)$. Calculer son terme général en fonction de n, quel est son signe ? Donner sa limite.

b. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
Que peut-on en déduire ?

c. Étudier la suite $(u_n + v_n)$. Que conclure ?

Exercice 41
Soit a et b deux réels positifs. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \ \texttt{ ET } \ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. ***a)*** Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant v_n$$

b) En déduire la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

c) Démontrer que (u_n) et $v_n)$ sont convergentes et ont même limite que l'on note $M(a,b)$.

2. ***a)*** Calculer $M(0,1)$ et $M(1,1)$.

b) Démontrer, pour tout $(x,y) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^2$:

$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad M(1,x) \leqslant M(1,y)$$

Exercice 42 *(e est irrationnel)*
Le but de cet exercice est de montrer que e est un nombre irrationnel.

1. On note (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n \ = \ u_n + \frac{1}{n\,n!}$$

a) Déterminer le sens de monotonie de (u_n) et (v_n).
b) En déduire qu'elles convergent vers une limite commune. On la note ℓ.
c) Supposons que ℓ est rationnel. Il existe alors $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $\ell = \frac{p}{q}$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ < \ \frac{p}{q} \ < \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,n!}$$

d) Conclure à une absurdité en choisissant $n = q$.

2. Le but de cette question est de démontrer : $\ell = \mathrm{e}$.
a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{e} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \, \mathrm{e}^t \, dt$$

b) Démontrer :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c) Conclure.

Exercice 43
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par leur premier terme $(u_0, v_0) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \ = \ \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \ = \ \frac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n}$$

1. Montrer que cette définition est licite puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant v_n$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang et que (v_n) est croissante à partir d'un certain rang.
3. ***a)*** Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - v_{n+1} \ \leqslant \ \frac{u_n - v_n}{2}$$

b) En déduire, à l'aide des questions précédentes, que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n\,v_n$.
5. En déduire les limites de (u_n) et (v_n).

CCINP MP

Exercice 44
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 \ = \ x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \arctan(u_n) \end{cases}$$

1. ***a)*** Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h\big(\arctan(x)\big)$.