Colles

Semaine 12 : 2 décembre - 6 décembre

I. Questions de cours

Exercice 1
Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y' + 2\,y \;=\; x\,\mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 2
Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + 2y \;=\; \cos(x)$$

Exercice 3
On note (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4\,u_n - 6 \end{cases}$$

Déterminer une formule explicite du terme général de la suite (u_n).

Exercice 4
On note (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5\,u_{n+1} - 6\,u_n \end{cases}$$

Déterminer une formule explicite du terme général de la suite (u_n).

Exercice 5
On note E l'ensemble des fonctions bornées.
Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{\, \left|f(x)\right| \mid x \in [0,1] \}$.
Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} \left|f(x)\right| = \sup(A_f)$.

1. Que signifie $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E ?

2. Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est homogène.

II. Exercices

Équations différentielles linéaires

EDL d'ordre 1

Exercice 6
Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $y' = y + 1$

b) $y' = 3y + \mathrm{e}^{3x}$

c) $y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}\,(1 + x)$

d) $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

e) $y' = -y + x\,\mathrm{e}^x$

f) $y' = 2y + 2x^2 - 1$

g) $y = \dfrac{y}{x^2}$

h) $y' + \dfrac{2x}{1 + x^2}\;y = \dfrac{1 + 3x^2}{1 + x^2}$

i) $y' - \ln(x)\,y = x^x$

j) $(x - 1)\,y' + x\,y = \sin(x)$

k) $(1 + x)\,y' + y = 1 + \ln(1 + x)$

l) $x\,(x - 1)\,y' - (3x - 1)\,y + x^2\,(x + 1) = 0$

m) $y' + y = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^x}$

Exercice 7
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\left\{\begin{array}{l} y' + 2y \;=\; 3 \\ y(0) = 10 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} y' - y \;=\; t^2 + 1 \\ y(0) = -3 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} y' + y \;=\; t\,\mathrm{e}^t \\ y(1) = -1 \end{array}\right.$

Exercice 8. *Lemme de Gronwall*
Soient $c \in [0, +\infty[$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a, b[, \quad \left|u(x)\right| \;\leqslant\; c + \int_a^x \left|u(t)\right| g(t)\;dt$$

1. On pose $v : x \mapsto c + \displaystyle\int_a^x \left|u(t)\right| g(t)\;dt$ et $w : x \mapsto v(x)\,\exp\left(-\displaystyle\int_a^x g(t)\;dt\right)$. Montrer que w est décroissante sur I.

2. En déduire : $\forall x \in [a, b]$, $\left|u(x)\right| \leqslant c\,\exp\left(\displaystyle\int_a^x g(t)\;dt\right)$.

Exercice 9
Résoudre, sur $]0, 1[$, l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)\,y' + x\,y = \frac{1}{x} + x\,\ln(x) - x$$

Exercice 10
Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)\,(2x - 3t)\;dt \;=\; \frac{x^2}{2}$$

Exercice 11
Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\;dt \;=\; 0$$

EDL d'ordre 2

Exercice 12
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{3x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$
3. $y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{x}$
4. $y'' + 4y' + 4y = 2$
5. $y'' - 2y' + y = x\,\mathrm{e}^{x}$
6. $y'' + y' - 2y = \mathrm{ch}(x)$
7. $y'' - y = |x| + 1$
8. $y'' - 2y' + 2y = 8\,\sin(2x)$
9. $y'' + y = \sin^3(x)$
10. $y'' - 4y' + 4y = x\,\mathrm{ch}(2x)$

Exercice 13
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(-1) = 1 \\ y'(-1) = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'' - 2y = \mathrm{e}^{t} \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y'' - 6y' + 3y = t\mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y'' + y = 3\,x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

Exercice 14
Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)\,f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$$

Exercice 15
On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(1+x)\,y'' - y' - xy = 0 \qquad (E)$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ est solution.
2. Soit y une solution de (E). Déterminer les fonctions $z : x \mapsto y(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
3. Conclure.

Exercice 16. *Changements de variable*

1. En posant $x = \tan(t)$, résoudre l'équation différentielle :

$$(1+x^2)^2\,y'' + 2x\,(1+x^2)\,y' + 4\,y = 0$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En posant $x = \mathrm{sh}(t)$, résoudre l'équation différentielle :

$$(1+x^2)\,y'' + x\,y' - \alpha^2\,y = 0$$

3. En posant $t = \sqrt{x}$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$4x\,y'' + 2\,y' - y = 0$$

Exercice 17
Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'' & = & \omega\, y' \\ y'' & = & -\omega\, x' \\ z'' & = & 0 \end{array}\right.$$

où ω est une constante dépendant de la masse, de la charge de la particule et du champ magnétique. En considérant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Équations fonctionnelles

Exercice 18
Soit f une fonction réelle à valeurs réelles deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) + f(x-y) \;=\; 2\, f(x)\, f(y)$$

1. On commence par étudier la fonction f.
  a) Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
  b) Montrer que si $f(0) = 0$, la fonction f est la fonction identiquement nulle.
  c) Montrer que f est paire et : $f'(0) = 0$.

2. Démontrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f''(x)\, f(y) \;=\; f(x)\, f''(y)$$

3. En déduire que f est soit nulle, soit solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

4. Déterminer l'ensemble des fonctions f satisfaisant l'équation fonctionnelle.

Équations différentielles non linéaires

Exercice 19
On considère l'équation différentielle :

$$x\, y' - x\, \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}} - y \;=\; 0 \qquad (E)$$

Résoudre cette équation différentielle à l'aide du changement de variable
$z : x \mapsto \dfrac{1}{x}\; y(x)$.

Exercice 20

1. Déterminer les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) \;=\; \mathrm{e}^x\, f(y) + f(x)\, \mathrm{e}^y$$

2. Déterminer les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) \neq 0$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) \;=\; f(x)\, f'(y) + f'(x)\, f(y)$$

Exercice 21
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \;=\; f(2-x)$$

Exercice 22
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)\, f(t)\; dt \; = \; 1$$

Exercice 23
On considère l'équation différentielle : $y' = 1 + y^2$.

1. Trouver une solution particulière de cette équation sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. Soient $a < b$ deux réels, $I = \,]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation.
On définit $g : \begin{array}{ccc} I & \to &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \arctan\big(f(x)\big) \end{array}$. Démontrer que g est dérivable sur I et déterminer g'.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation sur l'intervalle $]a, b[$.

4. Montrer que l'équation possède une unique solution sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Propriétés de $\mathbb{R}$

Exercice 24
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (a,b) \in A \times B, \; a \leqslant b$$

1. Démontrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et : $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

2. On suppose maintenant :

$$\forall (a,b) \in A \times B, \; a < b$$

Peut-on en conclure : $\sup(A) < \inf(B)$?

Exercice 25
Déterminer, s'ils existent, les bornes supérieures, les bornes inférieures, les maxima et les minima des parties de $\mathbb{R}$ suivantes.

1. $A \; = \; \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \mid (n,p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2 \right\}$

2. $B \; = \; \left\{ \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

3. $C \; = \; \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^p \mid (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \right\}$

Exercice 26
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{a + b \mid (a,b) \in A \times B\} \\ D & = & \{\lambda\, a \mid a \in A\} \\ E & = & \{a\, b \mid (a,b) \in A \times B\} \end{array}$$

1. Démontrer que $\sup(C)$ existe et vaut $\sup(A) + \sup(B)$.

2. Que peut-on dire de l'existence et de la valeur de $\sup(D)$ et $\sup(E)$?
On pourra formuler des hypothèses supplémentaires adéquates sur A et B.