Colles

Semaine 11 : 25 novembre - 29 novembre

I. Questions de cours

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$ ***c)*** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1+x^4}\,dx$

Exercice 2
Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y' \;=\; -y + x\,\mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 3
Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + 2y \;=\; \sin(2x)$$

II. Exercices

Calculs de primitives

Exercice 4
Calculer les primitives suivantes.

a) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$

b) $\begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x\,\ln(x)} \end{array}$

c) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^2(x)\,\sin^4(x) \end{array}$

d) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^2(x)\,\sin^5(x) \end{array}$

e) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x)\,\mathrm{ch}(3x)\,\mathrm{e}^{-x} \end{array}$

f) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x}\left(\sqrt{3}\,\cos(2x) - \sin(2x)\right) \end{array}$

g) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2+x)\,\cos(x) \end{array}$

h) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\,\mathrm{e}^x\,\cos(3x) \end{array}$

i) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) \end{array}$

j) $\begin{array}{ccc}]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} \end{array}$

k) $\begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3\,\sqrt{1-x^4} \end{array}$

l) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \end{array}$

m) $\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+x+1}{x-1} \end{array}$

n) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^3-x+1}{x^2+x+1} \end{array}$

o) $\begin{array}{ccc}]\frac{3}{2},+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+1}{\sqrt{2x-3}} \end{array}$

p) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{4x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} \end{array}$

Suite d'intégrales

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pn note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$.

a. À l'aide d'un raisonnement par encadrement, montrer que : $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

b. Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a $I_n = \dfrac{e}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} I_{n+1}$.

c. Montrer que : $n\ I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e$.

Exercice 6

On note $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, dx$.

a. À l'aide d'un raisonnement par encadrement, montrer que : $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

b. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

c. En déduire que $e = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 7

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} \, dx$$

1. Calculer le premier terme u_1 de la suite.

2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs.

3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

4. Montrer que l'on a, pour tout entier n strictement positif : $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n}$.

5. En déduire une fonction **Python** qui prend un entier n strictement positif et qui renvoie u_n, le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

6. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

7. À l'aide de l'inégalité précédente, trouver un équivalent simple de u_n.

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

2. Calculer I_n.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$.

Équations différentielles linéaires

EDL d'ordre 1

Exercice 9
Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $y' = y + 1$

b) $y' = 3y + \mathrm{e}^{3x}$

c) $y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}\,(1 + x)$

d) $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

e) $y' = -y + x\,\mathrm{e}^x$

f) $y' = 2y + 2x^2 - 1$

g) $y = \dfrac{y}{x^2}$

h) $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}\ y = \dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$

i) $y' - \ln(x)\,y = x^x$

j) $(x-1)\,y' + x\,y = \sin(x)$

k) $(1+x)\,y' + y = 1 + \ln(1+x)$

l) $x\,(x-1)\,y' - (3x-1)\,y + x^2\,(x+1) = 0$

m) $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$

Exercice 10
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\left\{\begin{array}{l} y' + 2y \ = \ 3 \\ y(0) = 10 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} y' - y \ = \ t^2 + 1 \\ y(0) = -3 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} y' + y \ = \ t\,\mathrm{e}^t \\ y(1) = -1 \end{array}\right.$

Exercice 11. *Lemme de Gronwall*
Soient $c \in [0, +\infty[$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a, b[, \quad \left|u(x)\right| \ \leqslant \ c + \int_a^x \left|u(t)\right| g(t)\ dt$$

1. On pose $v : x \mapsto c + \displaystyle\int_a^x \left|u(t)\right| g(t)\ dt$ et $w : x \mapsto v(x)\,\exp\left(-\displaystyle\int_a^x g(t)\ dt\right)$. Montrer que w est décroissante sur I.

2. En déduire : $\forall x \in [a, b]$, $\left|u(x)\right| \leqslant c\,\exp\left(\displaystyle\int_a^x g(t)\ dt\right)$.

Exercice 12
Résoudre, sur $]0, 1[$, l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)\,y' + x\,y = \frac{1}{x} + x\,\ln(x) - x$$

Exercice 13
Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)\,(2x - 3t)\ dt \ = \ \frac{x^2}{2}$$

Exercice 14
Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\ dt \ = \ 0$$

EDL d'ordre 2

Exercice 15

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{3x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$
3. $y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{x}$
4. $y'' + 4y' + 4y = 2$
5. $y'' - 2y' + y = x\,\mathrm{e}^{x}$
6. $y'' + y' - 2y = \mathrm{ch}(x)$
7. $y'' - y = |x| + 1$
8. $y'' - 2y' + 2y = 8\,\sin(2x)$
9. $y'' + y = \sin^3(x)$
10. $y'' - 4y' + 4y = x\,\mathrm{ch}(2x)$

Exercice 16

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(-1) = 1 \\ y'(-1) = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 2y = \mathrm{e}^{t} \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' - 6y' + 3y = t\mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y'' + y = 3\,x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

Exercice 17

Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)\,f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$$

Exercice 18. *Changements de variable*

1. En posant $x = \tan(t)$, résoudre l'équation différentielle :
$$(1+x^2)^2\,y'' + 2x\,(1+x^2)\,y' + 4\,y = 0$$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En posant $x = \mathrm{sh}(t)$, résoudre l'équation différentielle :
$$(1+x^2)\,y'' + x\,y' - \alpha^2\,y = 0$$
3. En posant $t = \sqrt{x}$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :
$$4x\,y'' + 2\,y' - y = 0$$

Exercice 19

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} x'' = \omega\,y' \\ y'' = -\omega\,x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où ω est une constante dépendant de la masse, de la charge de la particule et du champ magnétique. En considérant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Équations fonctionnelles

Exercice 20
Soit f une fonction réelle à valeurs réelles deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) + f(x-y) \;=\; 2\,f(x)\,f(y)$$

1. On commence par étudier la fonction f.

a) Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

b) Montrer que si $f(0) = 0$, la fonction f est la fonction identiquement nulle.

c) Montrer que f est paire et : $f'(0) = 0$.

2. Démontrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f''(x)\,f(y) \;=\; f(x)\,f''(y)$$

3. En déduire que f est soit nulle, soit solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

4. Déterminer l'ensemble des fonctions f satisfaisant l'équation fonctionnelle.

Équations différentielles non linéaires

Exercice 21
On considère l'équation différentielle :

$$x\,y' - x\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}} - y \;=\; 0 \qquad (E)$$

Résoudre cette équation différentielle à l'aide du changement de variable
$z : x \mapsto \dfrac{1}{x}\; y(x)$.

Exercice 22

1. Déterminer les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) \;=\; \mathrm{e}^x\,f(y) + f(x)\,\mathrm{e}^y$$

2. Déterminer les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) \neq 0$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) \;=\; f(x)\,f'(y) + f'(x)\,f(y)$$

Exercice 23
On considère l'équation différentielle : $y' = 1 + y^2$.

1. Trouver une solution particulière de cette équation sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. Soient $a < b$ deux réels, $I =]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation.
On définit $g : \begin{array}{ccc} I & \to &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \arctan\big(f(x)\big) \end{array}$. Démontrer que g est dérivable sur I et déterminer g'.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation sur l'intervalle $]a, b[$.

4. Montrer que l'équation possède une unique solution sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.