Colles

Semaine 10 : 18 novembre - 22 novembre

I. Questions de cours

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer :

$$C_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \cos(k\,x) \;=\; \begin{cases} n+1 & \text{si } x \equiv 0 \ [2\pi] \\ \dfrac{\sin\left((n+1)\,\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(n\ \dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x \not\equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_2^3 \ln(x^2-1)\,dx$ ***c)*** $\displaystyle\int_0^1 \sin^3(x)\,\cos^2(x)\,dx.$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\,\sin(t)\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\cos(x)\,dx$ ***c)*** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(x)\,dx.$

II. Exercices

Conjugaison et module d'un complexe

Exercice 4
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $(c,d) \neq (0,0)$ pour que $\dfrac{a+ib}{c+id}$ soit réel.

Exercice 5
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\bar{a}b \neq 1$. On pose : $c = \dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}$.

1. Démontrer que $|c| = 1$ si et seulement si $|a| = 1$ ou $|b| = 1$.

2. Démontrer que $|c| < 1$ si et seulement si $|a|$ et $|b|$ sont tous deux strictements supérieurs ou strictement inférieurs à 1.

Exercice 6
Soient a et b deux nombres complexes. Démontrer :

$$|a| + |b| \ \leqslant\ |a+b| + |a-b|$$

Déterminer les cas d'égalités.

Exercice 7
Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \ = \ n\, z^n$$

Démontrer : $|z| \leqslant 1$.

Exercice 8

1. Soient a et b deux nombres complexes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note : $M = \max\big(|a|, |b|\big)$. Démontrer :

$$|a^n - b^n| \ \leqslant\ n\, M^{n-1}\, |a-b|$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \ \leqslant\ \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$$

Linéarisation et factorisation

Exercice 9
Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Linéariser les expressions de $\big(\sin(x)\big)^n$ et $\big(\cos(x)\big)^n$.

Exercice 10
Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Factoriser les expressions de $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$.

Exercice 11
Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^2(x)\, \sin^3(x)$.

Exercice 12

1. **Linéarisations**. Linéariser les expressions suivantes en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

a) $\cos^3(2x)$ *b)* $\sin^5(x)$

2. **Application : calcul de primitives**. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

a) $t \mapsto \sin^3(t)\,\cos^3(t)$ *b)* $t \mapsto \cos^5(t)\,\sin^4(t)$

Exercice 13

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ *b)* $\sum\limits_{k=0}^{n} k\,\cos(kx)$ *c)* $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \sin(kx)$

2. *a)* Supposons : $x \notin 2\pi\,\mathbb{Z}$. Démontrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\ell=-k}^{k} \mathrm{e}^{i\ell x} \right) = \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\ x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$$

Calculs de sommes et produits

Exercice 14

Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Calculer $\sum\limits_{p=0}^{n} \big(\cos(p\alpha)\big)^2$.

Exercice 15

Soit $(a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$.

1. Développer l'expression $(1 + i\,\sqrt{a})^{2n}$.

2. Calculer alors le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} a^k$.

3. Donner une expression simple du résultat lorsque $a = 3$.

Exercice 16

Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

1. Calculer le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$.

2. Vérifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Calculer alors le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$.

3. En s'inspirant de la question précédente, calculer les réels suivants :

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$ *b)* $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$

Exercice 17
Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On pose : $\varphi : h \mapsto \sum\limits_{p=0}^{n} \cos(x+ph)$.

1. Déterminer une expression sans symbole de sommation de la fonction φ.

2. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, calculer $\sum\limits_{p=0}^{n} p \sin(x+ph)$.

Exercice 18
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on pose : $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{p=0}^{n-1} a_p \, \mathrm{e}^{\frac{2ipk\pi}{n}}$.

Démontrer, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$: $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{p=0}^{n-1} b_p \, \mathrm{e}^{-\frac{2ipk\pi}{n}}$.

Exercice 19
Soit $(n,z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$. On pose : $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(z+\omega^k\right)^n$.

Lieux de points

Exercice 20

1. $(*)$ On note $f : z \mapsto \dfrac{1}{z-i}$. Déterminer $f(\mathbb{R})$.

2. On note $f : z \mapsto \dfrac{z-2}{z-6}$. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{6\}$ tels que : $f(z) \in i\mathbb{R}$.

3. On note $f : z \mapsto \dfrac{z+1}{\bar{z}-1}$. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tels que : $f(z) \in \mathbb{R}$.

4. On note $f : z \mapsto \dfrac{z+|z|}{2}$. Déterminer $f(\mathbb{C})$.

Exercice 21
Représenter graphiquement les ensembles suivants.

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = 2\}$

2. $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant |z-i| \leqslant 3\}$

3. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leqslant 3\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| \leqslant 3\}$

4. $\{z \in \mathbb{C} \mid \max\big(\mathrm{Re}\,(z-i), \mathrm{Im}\,(z+1)\big) \leqslant 2\}$

5. $(*)$ $\{z \in \mathbb{C} \mid \big|\mathrm{Re}\,(z-1-i)\big| + \big|\mathrm{Im}\,(z-1-i)\big| \leqslant 2\}$

6. $(*)$ $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| + |z-1| = \sqrt{5}\}$

Oraux CCINP

Exercice 22
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On pose : $z = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose : $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2. On pose : $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Démontrer : $S = \dfrac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Calculs de primitives

Exercice 23

Calculer les primitives suivantes.

a) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$

b) $\begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x\,\ln(x)} \end{array}$

c) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^2(x)\,\sin^4(x) \end{array}$

d) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^2(x)\,\sin^5(x) \end{array}$

e) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x)\,\mathrm{ch}(3x)\,\mathrm{e}^{-x} \end{array}$

f) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x}\left(\sqrt{3}\,\cos(2x) - \sin(2x)\right) \end{array}$

g) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2+x)\,\cos(x) \end{array}$

h) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\,\mathrm{e}^x\,\cos(3x) \end{array}$

i) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) \end{array}$

j) $\begin{array}{ccc}]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} \end{array}$

k) $\begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3\sqrt{1-x^4} \end{array}$

l) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \end{array}$

m) $\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+x+1}{x-1} \end{array}$

n) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^3-x+1}{x^2+x+1} \end{array}$

o) $\begin{array}{ccc}]\frac{3}{2},+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+1}{\sqrt{2x-3}} \end{array}$

p) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{4x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} \end{array}$

Suite d'intégrales

Exercice 24

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pn note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x\,dx$.

a. À l'aide d'un raisonnement par encadrement, montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b. Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a $I_n = \dfrac{\mathrm{e}}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} I_{n+1}$.

c. Montrer que : $n\,I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}$.

Exercice 25

On note $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,dx$.

a. À l'aide d'un raisonnement par encadrement, montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

c. En déduire que $\mathrm{e} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 26
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx$$

1. Calculer le premier terme u_1 de la suite.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs.

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

4. Montrer que l'on a, pour tout entier n strictement positif : $u_{n+1}+u_n = \dfrac{1}{n}$.

5. En déduire une fonction **Python** qui prend un entier n strictement positif et qui renvoie u_n, le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7. À l'aide de l'inégalité précédente, trouver un équivalent simple de u_n.

Exercice 27
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$I_n \;=\; \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

2. Calculer I_n.

3. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}\dbinom{n}{k}$.