Programme de colle - Semaine 9

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Calcul d'intégrales**
  On demandera à l'étudiant de calculer deux intégrales utilisant deux méthodes distinctes parmi les suivantes :
  - primitive à vue,
  - intégration par parties,
  - changement de variables.

  Par exemple :

  a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x\,\big(\ln(x)\big)^3}\ dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\cos(x)\ dx$ ***c)*** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,\cos^3(x)\ dx$

- **Équation différentielle linéaire d'ordre** 1
  On demandera à l'étudiant de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 non homogène.
  Par exemple, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$t\,y'(t) + y(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2} \qquad (E)$$

  Démonstration.
  - On commence par résoudre l'équation homogène associée à (E), notée (H) :
$$t\,y' + y = 0$$
    Tout d'abord, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:
$$t\,y'(t) + y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) + \frac{1}{t}\,y(t) = 0$$
    On remarque que :
    × l'équation $y'(t) + \dfrac{1}{t}\,y(t) = 0$ est linéaire homogène d'ordre 1,
    × une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est $t \mapsto \ln(t)$

    L'ensemble des solutions de l'équation (H) est donc :
$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\ln(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \ = \ \{t \mapsto \frac{\lambda}{t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
On applique la méthode de variation de la constante.
Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note alors $h : t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcl} h \text{ est solution de } (E) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t\,h'(t) + h(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t\left(\dfrac{\lambda'(t)}{t} - \dfrac{\lambda(t)}{t^2}\right) + \dfrac{\lambda(t)}{t} = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t) - \cancel{\dfrac{\lambda(t)}{t}} + \cancel{\dfrac{\lambda(t)}{t}} = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2} \end{array}$$

On en déduit que la fonction λ cherchée peut être choisie parmi les primitives de $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{t^2}$.
La fonction $\lambda : t \mapsto \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t^2}$ convient.
Ainsi, la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{2t}\,\mathrm{e}^{t^2}$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \frac{1}{2t}\,\mathrm{e}^{t^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

□

- **Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**
On demandera à l'étudiant de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants non homogène. Par exemple, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y'' - 4\,y' + 3\,y = (2t+1)\,\mathrm{e}^t$$

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène (H) associée à (E) :

$$y'' - 4\,y' + 3\,y = 0$$

  × L'équation (H) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.
  × Son équation caractéristique est :

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

  Les solutions de cette équation sont 1 et 3.

  L'ensemble des solutions de (H) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note $h : t \mapsto (at^2 + bt)\,\mathrm{e}^t$.
La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} h'(t) & = & (2at+b)\,\mathrm{e}^t + (at^2+bt)\,\mathrm{e}^t \\ & = & \big(at^2 + (2a+b)t + b\big)\,\mathrm{e}^t \\ h''(t) & = & \big(2at + 2a + b\big)\,\mathrm{e}^t + \big(at^2 + (2a+b)t + b\big)\,\mathrm{e}^t \\ & = & \big(at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b\big)\,\mathrm{e}^t \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{cl}
 & h \text{ solution de } (E) \\
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\quad h''(t) - 4\,h'(t) + 3\,h(t) = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\quad \big(at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b\big)\,\mathrm{e}^t \\
 & \qquad\qquad -4\,\big(at^2 + (2a+b)t + b\big)\,\mathrm{e}^t \\
 & \qquad\qquad +3\,(at^2 + bt)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\quad \big(-4at + 2a - 2b\big)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\quad -4at + 2a - 2b = 2t + 1 \qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ e^t \neq 0\textit{)} \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} -4a & & & = & 2 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & 1 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array}\right. \\
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & -1 \\ & - & 2b & = & 2 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & -\dfrac{1}{2} \\ & & b & = & -1 \end{array}\right.
\end{array}$$

Ainsi la fonction $h : t \mapsto \left(-\dfrac{1}{2}\,t^2 - t\right)\mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} - \left(\frac{1}{2}\,t^2 + t\right)\mathrm{e}^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

□

Connaissances exigibles

Calcul d'intégrales sur un segment

- Intégration à vue
- Intégration par parties
- Changement de variables (les élèves doivent être capables de repérer des changements de variables affines et certains changement de variables usuels du type $\boxed{t = \cos(x)}$ ou $\boxed{t = \sin(x)}$)

Équations différentielles linéaires

- Définitions d'une équation différentielle d'ordre p, linéaire, à coefficients constants, homogène. Définitions d'une solution d'une équation différentielle, d'une trajectoire, d'un équilibre, d'un problème de Cauchy d'ordre p.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre p définie sur I est un sous-espace vectoriel de $C^p(I, \mathbb{R})$.

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire (E) définie sur I est $\{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$ où f_0 est une solution particulière de (E) et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).
  Méthode de résolution d'une EDL.
- Principe de superposition
- Équations différentielles linéaire d'ordre 1 :
  - × Solution de l'équation homogène associée.
  - × Solutions particulières dans le cas d'une EDL à coefficients constants.
  - × Méthode de la variation de la constante.
  - × Le problème de Cauchy d'ordre 1 admet une unique solution.
  - × L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & g(0) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
- Équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
  - × Définitions d'équation caractéristique et polynôme caractéristique, régime apériodique, régime critique, régime pseudo-périodique.
  - × Solution de l'équation homogène associée.
  - × Recherche de solutions particulières.
  - × Le problème de Cauchy d'ordre 2 admet une unique solution.
  - × L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R}^2 \\ g & \mapsto & \big(g(0), g'(0)\big) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

⚠

On sanctionnera fortement les points suivants :

- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.