Programme de colle - Semaine 8

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Lien argument / forme algébrique**

  Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\, y$.

  On note θ un argument de z.

$$\cos(\theta) \ = \ \frac{x}{|z|} \sin(\theta) \ = \ \frac{y}{|z|}$$

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\, y$. On note M le point d'affixe z et θ un argument de z.

- Par définition du produit scalaire :

$$\begin{array}{cll} & < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM} > & \\ = & \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{OM}\| \times \cos\Big((\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\Big) & \\ = & \|\overrightarrow{u}\| \times |z| \times \cos(\theta) & \textit{(par définition du module et d'un argument de } z\textit{)} \\ = & 1 \times |z| \cos(\theta) & \textit{(car } (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \textit{ est un repère (ortho)normé)} \end{array}$$

  Par ailleurs :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  Ainsi, par propriété du produit scalaire :

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM} > = \ 1 \times x + 0 \times y \ = \ x$$

  On en déduit : $x = |z| \cos(\theta)$. Or, comme $z \neq 0$, alors : $|z| \neq 0$. D'où :

$$\cos(\theta) \ = \ \frac{x}{|z|}$$

- Par définition du produit scalaire :

$$\begin{array}{rl} & < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM} > \\ = & \|\overrightarrow{v}\| \times \|\overrightarrow{OM}\| \times \cos\Big((\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM})\Big) \\ = & 1 \times |z| \times \cos\Big((\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM})\Big) \qquad \textit{(mêmes arguments que le point précédent)} \\ = & |z| \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \\ = & |z| \sin(\theta) \end{array}$$

Par ailleurs :

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ainsi, par propriété du produit scalaire :

$$< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM} > = 0 \times x + 1 \times y = y$$

On en déduit : $y = |z| \sin(\theta)$. Or, comme $z \neq 0$, alors : $|z| \neq 0$. D'où :

$$\sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

□

- **Un calcul de somme**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\,x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \equiv 0 \ [2\pi] \\ \dfrac{\sin\left((n+1)\,\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(n\ \dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x \not\equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\,x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}\right)$$

- On note alors : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$. Or :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{ix}\right)^k$$

Deux cas se présentent.

× si $x \equiv 0 \ [2\pi]$, alors : $\mathrm{e}^{ix} = 1$. D'où :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

× si $x \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors : $e^{ix} \neq 1$. D'où :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{e^{i\,\frac{n+1}{2}\,x}}{e^{i\,\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\,(n+1)\,\frac{x}{2}} - e^{i\,(n+1)\,\frac{x}{2}}}{e^{-i\,\frac{x}{2}} - e^{i\,\frac{x}{2}}} \\
&= e^{i\,n\,\frac{x}{2}} \times \frac{\cancel{-2\,i}\ \sin\left((n+1)\,\frac{x}{2}\right)}{\cancel{-2\,i}\ \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \textit{(par formules d'Euler)} \\
&= \frac{\sin\left((n+1)\,\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times e^{i\,n\,\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

- On en déduit que :
  - si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors : $C_n = \mathrm{Re}\,(S_n) = n + 1$.
  - si $x \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors :

$$C_n \;=\; \mathrm{Re}\,(S_n) \;=\; \frac{\sin\left((n+1)\,\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(n\ \frac{x}{2}\right)$$

□

- **Calcul d'intégrales**
  On demandera à l'étudiant de calculer deux intégrales utilisant deux méthodes distinctes parmi les suivantes :
  - primitive à vue,
  - intégration par parties,
  - changement de variables.

  Par exemple :

  a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x\,\big(\ln(x)\big)^3}\ dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ \cos(x)\ dx$ ***c)*** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\ \cos^3(x)\ dx$

Connaissances exigibles

Nombres complexes

- Écriture algébrique d'un nombre complexe : définition et unicité
- Partie réelle, partie imaginaire d'un nombre complexe : définition, linéarité
- Propriétés de $+$ et $\times$: associativité de $+$ et $\times$, commutativité de $+$ et $\times$, distributivité de $\times$ sur $+$, éléments neutres pour $+$ et $\times$, existence d'opposés et d'inverses, intégrité.
- Résolution d'équations de degré 1 dans $\mathbb{C}$.
- Conjugué d'un nombre complexe :
  - × définition
  - × propriétés : caractère involutif, linéarité, compatibilité avec le produit, avec l'inverse, avec le quotient
  - × lien avec la partie réelle et la partie imaginaire
- Résolution d'équations faisant intervenir un nombre complexe et son conjugué.
- Factorielle, p-combinaison et coefficient binomial
  - × définitions
  - × propriétés classiques sur les coefficients binomiaux (dont triangle de Pascal et formule de Vandermonde)
- Formule du binôme de Newton et variante
- Bijection entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$
- Image d'un nombre complexe
- Affixe dun point, d'un vecteur, du milieu d'un segment
- Module d'un nombre complexe
  - × définition
  - × propriétés : positivité, séparation, compatibilité avec le produit, l'inverse, le quotient
  - × module du conjugué
  - × inégalités triangulaires
- Ensemble $\mathbb{U}$
  - × définition
  - × propriétés : stabilité par produit, par passage à l'inverse
- Angle orienté
- Argument d'un nombre complexe
  - × définition
  - × lien avec la partie réelle et la partie imaginaire
  - × propriétés : argument de $\lambda\, z$, de $\overline{z}$, de $z_1 z_2$, de $\dfrac{1}{z}$, de $\dfrac{z_1}{z_2}$ caractérisation de $z \in \mathbb{R}^*$ et $z \in i\mathbb{R}$
  - × caractérisation de l'alignement de 3 points 2 à 2 distincts
  - × caractérisation d'un angle droit
- Interprétations géométriques :
  - × du conjugué
  - × du module
  - × d'un argument
  - × de l'inégalité triangulaire
  - × des ensembles $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}$, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leqslant r\}$ et $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$

- Forme trigonométrique / exponentielle d'un nombre complexe
- Propriétés de la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{it}$
  - × non sujectivité (si on considère f à valeurs dans $\mathbb{C}$)
  - × non injectivité
  - × propriété de morphisme de groupes
  - × formule de Moivre
  - × formules d'Euler
- Technique de mise en facteur de l'exponentielle de l'angle moitié
- Calculs de $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kx)$
- Factorisation et linéarisation d'expressions trigonométriques

Calcul d'intégrales sur un segment

- Intégration à vue
- Intégration par parties
- Changement de variables (les élèves doivent être capables de repérer des changements de variables affines et certains changement de variables usuels du type $\boxed{t = \cos(x)}$ ou $\boxed{t = \sin(x)}$)

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.