PCSI

Programme de colle - Semaine 7

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Binôme de Newton**

  Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u+v)^n \; = \; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n-k}$$

Démonstration.

Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$

où $\quad \mathscr{P}(n)$: $(u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n-k}$.

▸ **Initialisation** :

× D'une part : $(u+v)^0 = 1$.

× D'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} u^k \, v^{0-k} = \binom{0}{0} u^0 \, v^0 = 1$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$

(*i.e.* $(u+v)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^k \, v^{(n+1)-k}$).

$$\begin{array}{rll}
& (u+v)^{n+1} & \\
= & (u+v)\,(u+v)^n & \\
= & (u+v) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n-k} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
= & u \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n-k} + v \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n-k} & \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{k+1} \, v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n+1-k} & \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{n}{k-1} u^k \, v^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n+1-k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k \, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n+1-k} &
\end{array}$$

Or :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \\
= \quad & \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n}{n} u^{n+1}\, v^{n+1-(n+1)} \right) \\
+ \quad & \left(\binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \\
= \quad & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0 \\
= \quad & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0 \qquad \textit{(par triangle de Pascal)} \\
= \quad & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} u^{n+1}\, v^0 \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ (u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k}$. $\square$

- **Formule de Vandermonde**
  Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.
  Soit $p \in [\![0, a+b]\!]$.

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k} \binom{b}{p-k} = \binom{a+b}{p}$$

Démonstration.

- Méthode 1 : calcul.
  Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.
  - Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$(1+x)^{a+b} \;=\; (1=x)^a \, (1=x)^b$$

D'après le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{a+b} \binom{a+b}{k} x^k &= \left(\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k\right) \left(\sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} x^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{a+b} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{a}{\ell} x^{\ell} \times \binom{b}{k-\ell} x^{k-\ell}\right) \qquad \textit{(par produit de Cauchy)} \\
&= \sum_{k=0}^{a+b} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{a}{\ell} \binom{b}{k-\ell}\right) x^k
\end{aligned}$$

  - Comme cette égalité est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit l'égalité entre polynômes suivante :

$$\sum_{k=0}^{a+b} \binom{a+b}{k} X^k \;=\; \sum_{k=0}^{a+b} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{a}{\ell} \binom{b}{k-\ell}\right) X^k$$

Comme ces polynômes sont égaux, alors ils ont même coefficients. On obtient alors, pour tout $k \in [\![0, a+b]\!]$:

$$\binom{a+b}{p} \;=\; \sum_{\ell=0}^{k} \binom{a}{\ell} \binom{b}{k-\ell}$$

- Méthode 2 : dénombrement.
  Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Soit $p \in [\![0, a+b]\!]$.
  On considère deux ensembles :
  - un ensemble A à a éléments,
  - un ensemble B à b éléments.

  On note ensuite E la réunion disjointe des ensembles A et B : $E = A \cup B$. En particulier :

$$\text{Card}(E) \;=\; \text{Card}(A) + \text{Card}(B) \;=\; a+b$$

On peut penser à une pièce qui contient $a+b$ individus, séparés en 2 groupes, selon une caractéristique particulière (homme / femme, adulte / enfant, droitier / gaucher, etc).
On souhaite alors construire une partie P à p éléments de l'ensemble E
Dans l'illustration précédente, cela revient à choisir dans la pièce un groupe de p individus parmi les $a+b$ présents.
Pour ce faire, on peut procéder de 2 manières.

1) On choisit p éléments dans E : $\binom{a+b}{p}$ possibilités.
Cela revient à choisir p individus dans la pièce sans distinction de type.

2) Par ailleurs, une partie à p éléments de E est entièrement déterminée par les éléments qu'elle contient. Une partie de ses éléments appartient à A et le reste appartient à B.

Plus précisément, une partie à p éléments de E est constituée de :

- $\times$ 0 éléments de A : $\binom{a}{0}$ possibilités
- $\times$ p éléments de B : $\binom{b}{p}$ possibilités

Il y a en tout $\binom{a}{0}\binom{b}{p}$ telles parties à p éléments de E.
Cela revient à choisir 0 *individu du* 1^{er} *type et* p *individus du* 2^{nd} *type.*

OU

- $\times$ 1 éléments de A : $\binom{a}{1}$ possibilités
- $\times$ $p-1$ éléments de B : $\binom{b}{p-1}$ possibilités

Il y a en tout $\binom{a}{1}\binom{b}{p-1}$ telles parties à p éléments de E.
Cela revient à choisir 1 *individu du* 1^{er} *type et* $p-1$ *individus du* 2^{nd} *type.*

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

OU

- $\times$ k éléments de A : $\binom{a}{k}$ possibilités
- $\times$ $p-k$ éléments de B : $\binom{b}{p-k}$ possibilités

Il y a en tout $\binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$ telles parties à p éléments de E.
Cela revient à choisir k *individus du* 1^{er} *type et* $p-k$ *individus du* 2^{nd} *type.*

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

OU

- $\times$ p éléments de A : $\binom{a}{p}$ possibilités
- $\times$ 0 éléments de B : $\binom{b}{0}$ possibilités

Il y a en tout $\binom{a}{p}\binom{p}{0}$ telles parties à p éléments de E.
Cela revient à choisir p *individus du* 1^{er} *type et* 0 *individu du* 2^{nd} *type.*

Toutes ces parties étant constituées différemment, il y a en tout $\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$ parties à p éléments de E.

$\square$

3. **Lien argument / forme algébrique**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$.

On note θ un argument de z.

$$\cos(\theta) \;=\; \frac{x}{|z|} \quad \sin(\theta) \;=\; \frac{y}{|z|}$$

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$. On note M le point d'affixe z et θ un argument de z.

- Par définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned} & < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM} > \\ = \; & \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{OM}\| \times \cos\left((\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\right) \\ = \; & \|\overrightarrow{u}\| \times |z| \times \cos(\theta) && \textit{(par définition du module et d'un argument de } z\textit{)} \\ = \; & 1 \times |z| \cos(\theta) && \textit{(car } (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \textit{ est un repère (ortho)normé)} \end{aligned}$$

  Par ailleurs :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  Ainsi, par propriété du produit scalaire :

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM} > = \; 1 \times x + 0 \times y \;=\; x$$

  On en déduit : $x = |z| \cos(\theta)$. Or, comme $z \neq 0$, alors : $|z| \neq 0$. D'où :

$$\cos(\theta) \;=\; \frac{x}{|z|}$$

- Par définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned} & < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM} > \\ = \; & \|\overrightarrow{v}\| \times \|\overrightarrow{OM}\| \times \cos\left((\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM})\right) \\ = \; & 1 \times |z| \times \cos\left((\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM})\right) && \textit{(mêmes arguments que le point précédent)} \\ = \; & |z| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ = \; & |z| \sin(\theta) \end{aligned}$$

  Par ailleurs :

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  Ainsi, par propriété du produit scalaire :

$$< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM} > = \; 0 \times x + 1 \times y \;=\; y$$

  On en déduit : $y = |z| \sin(\theta)$. Or, comme $z \neq 0$, alors : $|z| \neq 0$. D'où :

$$\sin(\theta) \;=\; \frac{y}{|z|}$$

$\square$

4. Un calcul de somme

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\,x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \equiv 0\ [2\pi] \\ \dfrac{\sin\left((n+1)\,\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(n\,\dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x \not\equiv 0\ [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\,x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$$

- On note alors : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikx}$. Or :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k$$

  Deux cas se présentent.

  × si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors : $e^{ix} = 1$. D'où :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

  × si $x \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors : $e^{ix} \neq 1$. D'où :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{i\,\frac{n+1}{2}\,x}}{e^{i\,\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\,(n+1)\,\frac{x}{2}} - e^{i\,(n+1)\,\frac{x}{2}}}{e^{-i\,\frac{x}{2}} - e^{i\,\frac{x}{2}}} \\ &= e^{i\,n\,\frac{x}{2}} \times \frac{\cancel{-2\,i}\,\sin\left((n+1)\,\frac{x}{2}\right)}{\cancel{-2\,i}\,\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \textit{(par formules d'Euler)} \\ &= \frac{\sin\left((n+1)\,\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times e^{i\,n\,\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

- On en déduit que :
  - si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors : $C_n = \mathrm{Re}\,(S_n) = n+1$.
  - si $x \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors :

$$C_n = \mathrm{Re}\,(S_n) = \frac{\sin\left((n+1)\,\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(n\,\frac{x}{2}\right)$$

$\square$

Connaissances exigibles

Nombres complexes

- Écriture algébrique d'un nombre complexe : définition et unicité
- Partie réelle, partie imaginaire d'un nombre complexe : définition, linéarité
- Propriétés de $+$ et $\times$: associativité de $+$ et $\times$, commutativité de $+$ et $\times$, distributivité de $\times$ sur $+$, éléments neutres pour $+$ et $\times$, existence d'opposés et d'inverses, intégrité.
- Résolution d'équations de degré 1 dans $\mathbb{C}$.
- Conjugué d'un nombre complexe :
  - × définition
  - × propriétés : caractère involutif, linéarité, compatibilité avec le produit, avec l'inverse, avec le quotient
  - × lien avec la partie réelle et la partie imaginaire
- Résolution d'équations faisant intervenir un nombre complexe et son conjugué.
- Factorielle, p-combinaison et coefficient binomial
  - × définitions
  - × propriétés classiques sur les coefficients binomiaux (dont triangle de Pascal et formule de Vandermonde)
- Formule du binôme de Newton et variante
- Bijection entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$
- Image d'un nombre complexe
- Affixe dun point, d'un vecteur, du milieu d'un segment
- Module d'un nombre complexe
  - × définition
  - × propriétés : positivité, séparation, compatibilité avec le produit, l'inverse, le quotient
  - × module du conjugué
  - × inégalités triangulaires
- Ensemble $\mathbb{U}$
  - × définition
  - × propriétés : stabilité par produit, par passage à l'inverse
- Angle orienté
- Argument d'un nombre complexe
  - × définition
  - × lien avec la partie réelle et la partie imaginaire
  - × propriétés : argument de $\lambda\, z$, de $\overline{z}$, de $z_1 z_2$, de $\dfrac{1}{z}$, de $\dfrac{z_1}{z_2}$ caractérisation de $z \in \mathbb{R}^*$ et $z \in i\mathbb{R}$
  - × caractérisation de l'alignement de 3 points 2 à 2 distincts
  - × caractérisation d'un angle droit
- Interprétations géométriques :
  - × du conjugué
  - × du module
  - × d'un argument
  - × de l'inégalité triangulaire
  - × des ensembles $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}$, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leqslant r\}$ et $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$

- Forme trigonométrique / exponentielle d'un nombre complexe
- Propriétés de la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{it}$
  - × non sujectivité (si on considère f à valeurs dans $\mathbb{C}$)
  - × non injectivité
  - × propriété de morphisme de groupes
  - × formule de Moivre
  - × formules d'Euler
- Technique de mise en facteur de l'exponentielle de l'angle moitié
- Calculs de $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kx)$
- Factorisation et linéarisation d'expressions trigonométriques

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.