Programme de colle - Semaine 6

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
- si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Composée et injectivité**

  Soient E, F, G des ensembles.

  Soit $f : E \to F$ une application.

  Soit $g : F \to G$ une application.

1. $\left.\begin{array}{l} f \text{ est injective} \\ g \text{ est injective} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \circ f : E \to G$ est injective

2. $g \circ f$ est injective $\quad \Rightarrow \quad f$ injective

Démonstration.

1. Supposons f et g injectives et démontrons que $g \circ f : E \to G$ est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Supposons : $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
Autrement dit : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
Or, comme g est injective, on en déduit : $f(x_1) = f(x_2)$.
Or f est injective, on en déduit : $x_1 = x_2$.

Ainsi $g \circ f$ est injective.

2. Supposons $g \circ f$ injective et démontrons que $f : E \to F$ est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Supposons : $f(x_1) = f(x_2)$.
On a alors : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
(égalité obtenue en composant chaque membre de l'égalité précédente par g)
Autrement dit : $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
Or, comme $g \circ f$ est injective, on en déduit : $x_1 = x_2$.

Ainsi f est injective.

□

- **Composée et surjectivité**

  Soient E, F, G des ensembles.

  Soit $f : E \to F$ une application.

  Soit $g : F \to G$ une application.

1. $\left.\begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ g \text{ est surjective} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f : E \to G$ est surjective

2. $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ g surjective

Démonstration.

1. Supposons f et g surjectives et démontrons que $g \circ f$ est surjective.
Soit $z \in G$.
Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$.
Comme $g : F \to G$ est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
Comme $f : E \to F$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
On a alors : $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$.

Ainsi $g \circ f$ est surjective.

2. Supposons $g \circ f$ surjective et démontrons que g est surjective.
Soit $z \in G$.
Démontrons qu'il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$.
Notons $y = f(x)$. Alors $y \in F$ et y vérifie $z = g(y)$.

Ainsi f est surjective.

□

- **Composée et bijectivité**

  Soient E et F deux ensembles.

  Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des applications.

$$\left.\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont bijectives.} \\ \text{De plus : } g = f^{-1} \text{ et } f = g^{-1} \end{array}$$

Démonstration.
Supposons : $\left\{\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right.$

a. Démontrons d'abord que f et g sont bijectives.

- On sait que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Or id_E est une bijection de E dans E.
  Donc $g \circ f$ est bijective.
  - Comme $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
  - Comme $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- De même, $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Or id_F est une bijection de F dans F.
  Donc $f \circ g$ est bijective.
  × Comme $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.
  × Comme $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

  Finalement f et g sont bijectives.

b. La réciproque de f est par définition l'application qui à $y \in F$ associe son unique antécédent par f.
Soit $y \in F$. Alors $f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{id}_F(y) = y$.
L'élément $g(y)$ est un antécédent de y par f.
Comme f est bijective, cet élément est unique. D'où $g(y) = f^{-1}(y)$.
Ainsi : $\forall y \in F,\ g(y) = f^{-1}(y)$.
Autrement dit : $g = f^{-1}$.

$\square$

- **Binôme de Newton**

  Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u+v)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n-k}$$

Démonstration.
Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$

où $\quad \mathscr{P}(n) : (u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n-k}$.

▸ **Initialisation** :

× D'une part : $(u+v)^0 = 1$.

× D'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} u^k \, v^{0-k} = \binom{0}{0} u^0 \, v^0 = 1$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$
(*i.e.* $(u+v)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^k \, v^{(n+1)-k}$).

$$\begin{aligned}
& (u+v)^{n+1} \\
= \ & (u+v)\,(u+v)^n \\
= \ & (u+v) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n-k} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
= \ & u \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n-k} + v \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n-k} && \textit{(par distributivité de $\times$ sur $+$)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{k+1} \, v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n+1-k} && \textit{(par distributivité de $\times$ sur $+$)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n}{k-1} u^k \, v^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n+1-k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k \, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \, v^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n}{n} u^{n+1}\, v^{n+1-(n+1)} \right)$$

$$+ \left(\binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \right)$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0$$

$$= \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0 \qquad \textit{(par triangle de Pascal)}$$

$$= \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} u^{n+1}\, v^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ (u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k}$. $\square$

- **Formule de Vandermonde**

  Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

  Soit $p \in [\![0, a+b]\!]$.

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k} \binom{b}{p-k} = \binom{a+b}{p}$$

Démonstration.

- Méthode 1 : calcul.
  Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

  × Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$(1+x)^{a+b} \;=\; (1=x)^a \, (1=x)^b$$

  D'après le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{a+b} \binom{a+b}{k} x^k \;&=\; \left(\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} x^k \right) \\
&=\; \sum_{k=0}^{a+b} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{a}{\ell} x^\ell \times \binom{b}{k-\ell} x^{k-\ell} \right) \qquad \textit{(par produit de Cauchy)} \\
&=\; \sum_{k=0}^{a+b} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{a}{\ell} \binom{b}{k-\ell} \right) x^k
\end{aligned}$$

  × Comme cette égalité est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit l'égalité entre polynômes suivante :

$$\sum_{k=0}^{a+b} \binom{a+b}{k} X^k \;=\; \sum_{k=0}^{a+b} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{a}{\ell} \binom{b}{k-\ell} \right) X^k$$

  Comme ces polynômes sont égaux, alors ils ont même coefficients. On obtient alors, pour tout $k \in [\![0, a+b]\!]$:

$$\binom{a+b}{p} \;=\; \sum_{\ell=0}^{k} \binom{a}{\ell} \binom{b}{k-\ell}$$

- Méthode 2 : dénombrement.
  Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Soit $p \in [\![0, a+b]\!]$.
  On considère deux ensembles :

  × un ensemble A à a éléments,

  × un ensemble B à b éléments.

  On note ensuite E la réunion disjointe des ensembles A et B : $E = A \cup B$. En particulier :

$$\text{Card}(E) \;=\; \text{Card}(A) + \text{Card}(B) \;=\; a+b$$

  On peut penser à une pièce qui contient $a+b$ individus, séparés en 2 groupes, selon une caractéristique particulière (homme / femme, adulte / enfant, droitier / gaucher, etc).
  On souhaite alors construire une partie P à p éléments de l'ensemble E
  Dans l'illustration précédente, cela revient à choisir dans la pièce un groupe de p individus parmi les $a+b$ présents.
  Pour ce faire, on peut procéder de 2 manières.

  1) On choisit p éléments dans E : $\binom{a+b}{p}$ possibilités.
  Cela revient à choisir p individus dans la pièce sans distinction de type.

2) Par ailleurs, une partie à p éléments de E est entièrement déterminée par les éléments qu'elle contient. Une partie de ses éléments appartient à A et le reste appartient à B.

Plus précisément, une partie à p éléments de E est constituée de :

- $\times$ 0 éléments de A : $\binom{a}{0}$ possibilités
- $\times$ p éléments de B : $\binom{b}{p}$ possibilités

Il y a en tout $\binom{a}{0}\binom{b}{p}$ telles parties à p éléments de E.
Cela revient à choisir 0 *individu du* 1^{er} *type et* p *individus du* 2^{nd} *type.*

OU

- $\times$ 1 éléments de A : $\binom{a}{1}$ possibilités
- $\times$ $p-1$ éléments de B : $\binom{b}{p-1}$ possibilités

Il y a en tout $\binom{a}{1}\binom{b}{p-1}$ telles parties à p éléments de E.
Cela revient à choisir 1 *individu du* 1^{er} *type et* $p-1$ *individus du* 2^{nd} *type.*

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\vdots$

OU

- $\times$ k éléments de A : $\binom{a}{k}$ possibilités
- $\times$ $p-k$ éléments de B : $\binom{b}{p-k}$ possibilités

Il y a en tout $\binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$ telles parties à p éléments de E.
Cela revient à choisir k *individus du* 1^{er} *type et* $p-k$ *individus du* 2^{nd} *type.*

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\vdots$

OU

- $\times$ p éléments de A : $\binom{a}{p}$ possibilités
- $\times$ 0 éléments de B : $\binom{b}{0}$ possibilités

Il y a en tout $\binom{a}{p}\binom{p}{0}$ telles parties à p éléments de E.
Cela revient à choisir p *individus du* 1^{er} *type et* 0 *individu du* 2^{nd} *type.*

Toutes ces parties étant constituées différemment, il y a en tout $\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$ parties à p éléments de E.

$\square$

Connaissances exigibles

Ensembles

- Définition d'ensemble et de la notion d'appartenance
- Écriture d'un ensemble sous forme extensive et compréhensive
- Définition d'un ensemble fini et de cardinal
- Inclusion entre ensembles et propriétés. Structure de démonstration d'une inclusion
- Égalité entre ensembles. Structure de démonstration d'une égalité entre ensembles.
- Ensemble des parties d'un ensemble E : $\mathscr{P}(E)$
- Réunion :
  × définition
  × représentation graphique
  × propriétés de $\cup$
  × liens entre $\cup$ et $\subset$
- Intersection :
  × définition
  × représentation graphique
  × propriétés de $\cap$
  × liens entre $\cap$ et $\subset$
- Complémentaire d'une partie :
  × définition
  × propriétés
- Fonctions indicatrices :
  × définition
  × propriétés
- Propriétés reliant $\cup$, $\cap$ et passage au complémentaire :
  × distributivités,
  × lois de De Morgan
- Partition d'un ensemble
- Recouvrement d'un ensemble
- Différence ensembliste de parties :
  × définition
  × lien avec le passage au complémentaire
- Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles

Applications

- Définitions d'application, image, antécédent, ensemble de départ, ensemble d'arrivée
- Définition de $\mathrm{Im}(f)$
- Définition de id_E

- Image directe d'un ensemble par une application
  - × Définition
  - × Comportement avec l'inclusion
  - × Image directe d'une réunion d'ensembles et d'une intersection d'ensembles
- Image réciproque d'un ensemble par une application
  - × Définition
  - × Comportement avec l'inclusion
  - × Image réciproque d'une réunion d'ensembles et d'une intersection d'ensembles
- Restriction d'une application
- Composée de deux applications
  - × Définition
  - × Associativité de $\circ$
  - × $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$
- Injectivité
  - × Définition
  - × Structure de démonstration
  - × Comportement avec la composée
  - × f strictement croissante sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ injective
- Surjectivité
  - × Définition
  - × Structure de démonstration
  - × Comportement avec la composée
  - × $\begin{array}{rccc} \tilde{f} & : & E & \to & f(E) \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est toujours surjective
- Bijectivité
  - × Définition : $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$
  - × Conséquence : $\left.\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont bijectives.} \\ \text{De plus : } g = f^{-1} \text{ et } f = g^{-1} \end{array}$
  - × Réciproque de la composée
  - × Méthodes de détermination de la réciproque d'une application

⚠

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× toute transgression à la rédaction de la récurrence vue en classe,

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration citées ci-dessus.