PCSI

Programme de colle - Semaine 5

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Décomposition en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire**

  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

  Toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

  Démonstration.
  Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
  On procède par analyse-synthèse.

  - **Analyse** : Supposons qu'il existe deux fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ telles que :
    1) $f = g + h$,
    2) g est paire,
    3) h est impaire.

    On remarque tout d'abord, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ (car l'intervalle I est symétrique par rapport à 0) et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (g+h)(-x) && \textit{(d'après 1))} \\ &= g(-x) + h(-x) \\ &= g(x) - h(x) && \textit{(car } g \textit{ paire et } h \textit{ impaire)} \end{aligned}$$

    On obtient ainsi le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} g(x) & + & h(x) & = & f(x) \\ g(x) & - & h(x) & = & f(-x) \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} g(x) & + & h(x) & = & f(x) \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) + f(-x) \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,g(x) & & & = & f(x) + f(-x) \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) + f(-x) \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} g(x) & = & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) & = & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}\right.$$

- **Synthèse** : On pose

$$\begin{array}{rcccl} g_0 & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcccl} h_0 & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}$$

On remarque alors :

× tout d'abord : $f = g_0 + h_0$. En effet, pour tout $x \in I$:

$$(g_0+h_0)(x) = g_0(x)+h_0(x) = \frac{f(x)+\cancel{f(-x)}}{2} + \frac{f(x)-\cancel{f(-x)}}{2} = \frac{\cancel{2}\,f(x)}{\cancel{2}} = f(x)$$

× ensuite, g_0 est paire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

$$g_0(-x) = \frac{f(-x)+f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g_0(x)$$

× enfin, h_0 est impaire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

$$h_0(-x) = \frac{f(-x)-f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h_0(x)$$

□

- **Calcul d'une somme double**.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n}\frac{i}{j}\right) = \frac{(n-1)n}{4}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n}\frac{i}{j}\right) &= \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{i}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j-1}\frac{i}{j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j-1} i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\times\frac{(j-1)\left((j-\cancel{1})+\cancel{1}\right)}{2}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\cancel{j}}\,\frac{(j-1)\,\cancel{j}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j-1) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k \qquad \textit{(avec le décalage d'indice } k=j-1\textit{)} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{(n-1)\left((n-\cancel{1})+\cancel{1}\right)}{2} \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n}\frac{i}{j}\right) = \frac{(n-1)\,n}{4}$. □

- **Irrationnalité de $\sqrt{2}$**
  Le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

  Démonstration.
  On procède par l'absurde. Supposons : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
  Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ (car $\sqrt{2} \geqslant 0$) tel que :
  - × d'une part : $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$,
  - × d'autre part : a et b n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1 (on dit que a et b sont premiers entre eux).

  - Tout d'abord :

$$\begin{array}{lrcl} \text{comme} & \sqrt{2} & = & \dfrac{a}{b} \\ \text{alors} & \left(\sqrt{2}\right)^2 & = & \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \\ \text{donc} & 2 & = & \dfrac{a^2}{b^2} \\ \text{d'où} & 2b^2 & = & a^2 \end{array}$$

    On en déduit que a^2 est pair.
  - Montrons qu'alors a est pair.
    On procède par encore par l'absurde. Supposons que a est impair.
    Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = 2k + 1$. On obtient :

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$$

    Il existe donc $k_0 = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ tel que : $a^2 = 2k_0 + 1$.
    L'entier a^2 est donc impair. Absurde !

    On en déduit que a est pair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = 2k$.
  - On obtient :

$$\begin{array}{lrcl} \text{puisque} & 2b^2 & = & a^2 \\ \text{alors} & 2b^2 & = & (2k)^2 \\ \text{donc} & 2b^2 & = & 4k^2 \\ \text{d'où} & b^2 & = & 2k^2 \end{array}$$

    On en déduit que b^2 est pair, et donc b est pair par le même raisonnement que pour a.
  - On sait donc :
    - × l'entier a est divisible par 2,
    - × l'entier b est divisible par 2.

    Les entiers a et b admettent donc un autre diviseur commun que 1.
    Absure !

  Ainsi : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Connaissances exigibles

Généralités sur les fonctions

- Schéma d'étude d'une fonction
- Monotonie :
  - × Définitions de croissance, décroissance, monotonie, stricte croissance, stricte décroissance, stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle
  - × Somme de fonctions croissantes, somme de fonctions décroissantes sur un même intervalle
  - × Produit de fonctions croissantes positives sur un même intervalle
  - × Composée de fonctions monotones sur des intervalles adéquats
- Fonctions majorées, minorée, bornées
- Extrema locaux, extrema globaux
- Borne supérieure et borne inférieure d'une fonction
- Réduction de l'ensemble d'étude par parité, par imparité, par périodicité
- Translations et homothéties : $x \mapsto f(x+a)$ et $x \mapsto f(ax)$. Lien entre la courbe représentative de ces fonctions et celle de f.
- Règles de dérivation : somme, produit, composée, réciproque.

Ce point ne fera l'objet d'aucune question nécessitant un retour à la définition de dérivabilité. Cette dernière sera vue dans un chapitre ultérieure.

- Théorème de la bijection.

Fonctions usuelles

- Fonction valeur absolue et inégalité triangulaire
- Fonction ln et logarithme en base b
- Fonction exp
- Fonctions puissances (entières et quelconques)
- Fonction partie entière par défaut et par excès
- Fonctions trigonométriques sin, cos, tan
- Fonctions trigonométriques hyperboliques : ch, sh (la fonction th est hors programme)

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× toute transgression à la rédaction de la récurrence vue en classe,

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration citées ci-dessus.