Programme de colle - Semaine 5

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Propriété reliant $\cup$ et $\subset$**

  Soit E un ensemble.

  Soient A et B des parties de E.

$$A \cup B = A \ \Leftrightarrow \ B \subset A$$

Démonstration.
Il s'agit ici de démontrer une équivalence.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons $A \cup B = A$ et démontrons $B \subset A$.
Soit $x \in B$.
Comme $B \subset A \cup B = A$, alors $x \in A$.
($B \subset A \cup B = A$ est une démonstration suffisante et qui permet de ne pas avoir à introduire d'élément)

($\Leftarrow$) Supposons $B \subset A$ et démontrons $A \cup B = A$.
Il s'agit ici de démontrer une égalité. On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $x \in A \cup B$.
Ceci signifie que $x \in A$ ou $x \in B$. Deux cas se présentent alors :

× si $x \in A$: alors on a bien $x \in A$.

× si $x \notin A$: alors, comme $x \in A \cup B$, on a forcément $x \in B$.
Or $B \subset A$. Comme $x \in B$, on en déduit que $x \in A$.

($\supset$) $A \cup B \supset A$

□

- **Propriété des fonctions indicatrices**

  Soit E un ensemble.

  Soient A et B des parties de E.

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$$

Démonstration.
Soit $x \in E$. Deux cas se présentent.

- Si $x \in A \cap B$ alors :
  - $\times$ $x \in A$ et donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$.
  - $\times$ $x \in B$ et donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$.

  Finalement :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) & = & 1 & \textit{(puisque } x \in A \cap B\textit{)} \\ & = & \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)\textit{)} \\ & = & \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)\textit{)} \end{array}$$

  Si $x \in A \cap B$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.

- Si $x \notin A \cap B$ alors $x \in \overline{A \cap B}$ est vérifiée ou encore $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
  Deux cas se présentent :
  - $\times$ si $x \in \overline{A}$ alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) & = & 0 & \textit{(puisque } x \notin A \cap B\textit{)} \\ & = & \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \end{array}$$

  - $\times$ si $x \notin \overline{A}$ alors comme $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ on a forcément $x \in \overline{B}$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) & = & 0 & \textit{(puisque } x \notin A \cap B\textit{)} \\ & = & \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \end{array}$$

  Si $x \notin A \cap B$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.

$\square$

- **Composée et injectivité**

  Soient E, F, G des ensembles.

  Soit $f : E \to F$ une application.

  Soit $g : F \to G$ une application.

  1. $\left.\begin{array}{l} f \text{ est injective} \\ g \text{ est injective} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad g \circ f : E \to G \text{ est injective}$

  2. $g \circ f$ est injective $\Rightarrow$ f injective

  Démonstration.

  1. Supposons f et g injectives et démontrons que $g \circ f : E \to G$ est injective.
  Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Supposons : $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
  Autrement dit : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
  Or, comme g est injective, on en déduit : $f(x_1) = f(x_2)$.
  Or f est injective, on en déduit : $x_1 = x_2$.

  Ainsi $g \circ f$ est injective.

  2. Supposons $g \circ f$ injective et démontrons que $f : E \to F$ est injective.
  Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Supposons : $f(x_1) = f(x_2)$.
  On a alors : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
  (égalité obtenue en composant chaque membre de l'égalité précédente par g)
  Autrement dit : $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
  Or, comme $g \circ f$ est injective, on en déduit : $x_1 = x_2$.

  Ainsi f est injective.

  □

- **Composée et surjectivité**

  Soient E, F, G des ensembles.

  Soit $f : E \to F$ une application.

  Soit $g : F \to G$ une application.

  1. $\left.\begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ g \text{ est surjective} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad g \circ f : E \to G \text{ est surjective}$

  2. $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ g surjective

  Démonstration.

  1. Supposons f et g surjectives et démontrons que $g \circ f$ est surjective.
  Soit $z \in G$.
  Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$.
  Comme $g : F \to G$ est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
  Comme $f : E \to F$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
  On a alors : $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$.

  Ainsi $g \circ f$ est surjective.

  2. Supposons $g \circ f$ surjective et démontrons que g est surjective.
  Soit $z \in G$.
  Démontrons qu'il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
  Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$.
  Notons $y = f(x)$. Alors $y \in F$ et y vérifie $z = g(y)$.

  Ainsi f est surjective.

  □

- **Composée et bijectivité**

  Soient E et F deux ensembles.

  Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des applications.

$$\left.\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont bijectives.} \\ \text{De plus : } g = f^{-1} \text{ et } f = g^{-1} \end{array}$$

Démonstration.
Supposons : $\left\{\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right.$

a. Démontrons d'abord que f et g sont bijectives.

- On sait que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Or id_E est une bijection de E dans E.
  Donc $g \circ f$ est bijective.
  - Comme $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
  - Comme $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- De même, $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Or id_F est une bijection de F dans F.
  Donc $f \circ g$ est bijective.
  × Comme $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.
  × Comme $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

  Finalement f et g sont bijectives.

b. La réciproque de f est par définition l'application qui à $y \in F$ associe son unique antécédent par f.
Soit $y \in F$. Alors $f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{id}_F(y) = y$.
L'élément $g(y)$ est un antécédent de y par f.
Comme f est bijective, cet élément est unique. D'où $g(y) = f^{-1}(y)$.
Ainsi : $\forall y \in F,\ g(y) = f^{-1}(y)$.
Autrement dit : $g = f^{-1}$.

□

Connaissances exigibles

Ensembles

- Définition d'ensemble et de la notion d'appartenance
- Écriture d'un ensemble sous forme extensive et compréhensive
- Définition d'un ensemble fini et de cardinal
- Inclusion entre ensembles et propriétés. Structure de démonstration d'une inclusion
- Égalité entre ensembles. Structure de démonstration d'une égalité entre ensembles.
- Ensemble des parties d'un ensemble E : $\mathscr{P}(E)$
- Réunion :
  × définition
  × représentation graphique
  × propriétés de $\cup$
  × liens entre $\cup$ et $\subset$

- Intersection :
  - × définition
  - × représentation graphique
  - × propriétés de $\cap$
  - × liens entre $\cap$ et $\subset$
- Complémentaire d'une partie :
  - × définition
  - × propriétés
- Fonctions indicatrices :
  - × définition
  - × propriétés
- Propriétés reliant $\cup$, $\cap$ et passage au complémentaire :
  - × distributivités,
  - × lois de De Morgan
- Partition d'un ensemble
- Recouvrement d'un ensemble
- Différence ensembliste de parties :
  - × définition
  - × lien avec le passage au complémentaire
- Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles

Applications

- Définitions d'application, image, antécédent, ensemble de départ, ensemble d'arrivée
- Définition de $\mathrm{Im}(f)$
- Définition de id_E
- Image directe d'un ensemble par une application
  - × Définition
  - × Comportement avec l'inclusion
  - × Image directe d'une réunion d'ensembles et d'une intersection d'ensembles
- Image réciproque d'un ensemble par une application
  - × Définition
  - × Comportement avec l'inclusion
  - × Image réciproque d'une réunion d'ensembles et d'une intersection d'ensembles
- Restriction d'une application
- Composée de deux applications
  - × Définition
  - × Associativité de $\circ$
  - × $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$

- Injectivité
  - × Définition
  - × Structure de démonstration
  - × Comportement avec la composée
  - × f strictement croissante sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ injective
- Surjectivité
  - × Définition
  - × Structure de démonstration
  - × Comportement avec la composée
  - × $\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & E & \to & f(E) \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est toujours surjective
- Bijectivité
  - × Définition : $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$
  - × Conséquence : $\left.\begin{array}{r} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Rightarrow$ f et g sont bijectives. De plus : $g = f^{-1}$ et $f = g^{-1}$
  - × Réciproque de la composée
  - × Méthodes de détermination de la réciproque d'une application

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× toute transgression à la rédaction de la récurrence vue en classe,

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration citées ci-dessus.