PCSI

Programme de colle - Semaine 4

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Somme des n premiers entiers.**

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n\,(n+1)}{2}$$

  Démonstration.

  TOUTE RÉDACTION DE LA RÉCURRENCE QUI DIFFÈRE NE SERAIT-CE QUE D'UN CARACTÈRE DE LA RÉDACTION SUIVANTE SERA CONSIDÉRÉE COMME FAUSSE

  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2}$.

  ▸ **Initialisation** :

  × D'une part : $\sum_{k=1}^{0} k = \sum_{k\in\varnothing} k = 0$.

  × D'autre part : $\frac{0\times(0+1)}{2} = 0$.

  D'où $\mathscr{P}(0)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum_{k=1}^{n+1} k \;=\; \frac{(n+1)(n+2)}{2}$)

$$\begin{aligned} \text{Or on a :}\quad \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{n+1}{2}(n+2) \end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

  Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. □

- **Somme des n premiers carrés d'entiers.**

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  Démonstration.
  TOUTE RÉDACTION DE LA RÉCURRENCE QUI DIFFÈRE NE SERAIT-CE QUE D'UN CARACTÈRE DE LA RÉDACTION SUIVANTE SERA CONSIDÉRÉE COMME FAUSSE
  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

  ▸ **Initialisation** :

  × D'une part : $\sum_{k=1}^{0} k^2 = \sum_{k\in\varnothing} k^2 = 0$.

  × D'autre part : $\frac{0 \times (0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$.

  D'où $\mathscr{P}(0)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$)

$$\begin{aligned}
\text{On écrit : } \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (\sum_{k=1}^{n} k^2) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n+1}{6}\,(n(2n+1) + 6(n+1)) \\
&= \frac{n+1}{6}\,(2n^2+7n+6) \\
&= \frac{n+1}{6}\,(n+2)(2n+3)
\end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

  Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. □

- **Somme des n premiers cubes d'entiers.**

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

  Démonstration.
  TOUTE RÉDACTION DE LA RÉCURRENCE QUI DIFFÈRE NE SERAIT-CE QUE D'UN CARACTÈRE DE LA RÉDACTION SUIVANTE SERA CONSIDÉRÉE COMME FAUSSE
  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

  ▸ **Initialisation** :

  × D'une part : $\sum_{k=1}^{0} k^3 = \sum_{k\in\varnothing} k^3 = 0$.

  × D'autre part : $\frac{0^2 \times (0+1)^2}{4} = 0$.

  D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$)

$$\begin{aligned}
\text{On écrit : } \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4n + 4\right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. □

- **Calcul d'une somme double**.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j}\right) = \frac{(n-1)n}{4}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j}\right) &= \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j-1} i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j} \times \frac{(j-1)\left((j-1)+1\right)}{2}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\,\frac{(j-1)\,j}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j-1) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k && \textit{(avec le décalage d'indice } k = j-1\textit{)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{(n-1)\left((n-1)+1\right)}{2}
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j}\right) = \frac{(n-1)\,n}{4}$. □

- **Décomposition en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire**

  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

  Toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

  Démonstration.
  Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
  On procède par analyse-synthèse.

  - **Analyse** : Supposons qu'il existe deux fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ telles que :

    1) $f = g + h$,

    2) g est paire,

    3) h est impaire.

    On remarque tout d'abord, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ (car l'intervalle I est symétrique par rapport à 0) et :

    $$\begin{aligned} f(-x) &= (g+h)(-x) && \textit{(d'après 1))} \\ &= g(-x) + h(-x) \\ &= g(x) - h(x) && \textit{(car } g \textit{ paire et } h \textit{ impaire)} \end{aligned}$$

    On obtient ainsi le système suivant :

    $$\left\{ \begin{array}{rcrcl} g(x) & + & h(x) & = & f(x) \\ g(x) & - & h(x) & = & f(-x) \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcl} g(x) & + & h(x) & = & f(x) \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) + f(-x) \end{array} \right.$$

    $$\overset{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,g(x) & & & = & f(x) + f(-x) \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) + f(-x) \end{array} \right.$$

    $$\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} g(x) & = & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) & = & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array} \right.$$

  - **Synthèse** : On pose

    $$g_0 : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad h_0 : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}$$

    On remarque alors :

    × tout d'abord : $f = g_0 + h_0$. En effet, pour tout $x \in I$:

    $$(g_0 + h_0)(x) = g_0(x) + h_0(x) = \frac{f(x) + \cancel{f(-x)}}{2} + \frac{f(x) - \cancel{f(-x)}}{2} = \frac{\cancel{2}\,f(x)}{\cancel{2}} = f(x)$$

    × ensuite, g_0 est paire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

    $$g_0(-x) = \frac{f(-x) + f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g_0(x)$$

    × enfin, h_0 est impaire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

    $$h_0(-x) = \frac{f(-x) - f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h_0(x)$$

    □

Connaissances exigibles

Logique

- Définitions d'une proposition et d'un prédicat
- Connecteurs logiques `ET` et `OU`
  - × Distributivité de `ET` sur `OU`
  - × Distributivité de `OU` sur `ET`
- Connecteur logique `NON`()
  - × Lois de De Morgan
  - × `NON`(`NON`(p)) a même valeur de vérité que p
- Connecteur logique $\Rightarrow$
  - × Structure de démonstration d'une implication
  - × Transitivité de $\Rightarrow$
  - × Contraposée et structure de démonstration associée
  - × Négation d'une implication
  - × Implication réciproque
- Connecteur logique $\Leftrightarrow$
  - × Structure de démonstration d'une équivalence
  - × Vocabulaire : condition nécessaire, condition suffisante
  - × Négation d'une équivalence
- Quantificateurs
  - × Quantificateur universel $\forall$ et structure de démonstration associée
  - × Quantificateur existentiel $\exists$ et structure de démonstration associée
  - × Négation d'énoncés comportant des quantificateurs
- Structure de démonstration par l'absurde
- Structure de démonstration par disjonction de cas
- Résolution d'équations et inéquations.
  On rappelle qu'il est indispensable de déterminer l'ensemble de définition d'une équation / inéquation avant de chercher à la résoudre.

Récurrence, somme, produit

- Récurrences simple, double, forte
- Sommes finies :
  - × Notation $\sum$
  - × Sommation d'une constante
  - × Sommation par paquets (ou relation de Chasles discrète)
  - × Sommation sur une union d'ensembles
  - × Linéarité de $\sum$
  - × Décalage d'indice et sommation dans l'autre sens
  - × Sommes télescopiques
  - × Sommes finies usuelles : somme des n premiers entiers, des n premiers carrés d'entiers, des n premiers cubes d'entiers et somme géométrique
  - × Sommes doubles : sommes sur un rectangle, sur un triangle supérieur, sur un triangle supérieur strict. Formules d'interversion des sommes finies.
  - × Produits finis

Généralités sur les fonctions

- Schéma d'étude d'une fonction
- Monotonie :
  - × Définitions de croissance, décroissance, monotonie, stricte croissance, stricte décroissance, stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle
  - × Somme de fonctions croissantes, somme de fonctions décroissantes sur un même intervalle
  - × Produit de fonctions croissantes positives sur un même intervalle
  - × Composée de fonctions monotones sur des intervalles adéquats
- Fonctions majorées, minorée, bornées
- Extrema locaux, extrema globaux
- Borne supérieure et borne inférieure d'une fonction
- Réduction de l'ensemble d'étude par parité, par imparité, par périodicité

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× toute transgression à la rédaction de la récurrence vue en classe,

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration citées ci-dessus.