Programme de colle - Semaine 4

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Irrationnalité de $\sqrt{2}$**
  Le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

  Démonstration.
  On procède par l'absurde. Supposons : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
  Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ (car $\sqrt{2} \geqslant 0$) tel que :

  × d'une part : $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$,

  × d'autre part : a et b n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1 (on dit que a et b sont premiers entre eux).

  - Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcccl} \text{comme} & \sqrt{2} & = & \dfrac{a}{b} \\[2ex] \text{alors} & \left(\sqrt{2}\right)^2 & = & \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \\[2ex] \text{donc} & 2 & = & \dfrac{a^2}{b^2} \\[2ex] \text{d'où} & 2b^2 & = & a^2 \end{array}$$

    On en déduit que a^2 est pair.

  - Montrons qu'alors a est pair.
    On procède par encore par l'absurde. Supposons que a est impair.
    Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = 2k + 1$. On obtient :

$$a^2 \;=\; (2k+1)^2 \;=\; 4k^2 + 4k + 1 \;=\; 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$$

    Il existe donc $k_0 = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ tel que : $a^2 = 2k_0 + 1$.
    L'entier a^2 est donc impair. Absurde !

    On en déduit que a est pair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = 2k$.

  - On obtient :

$$\begin{array}{rccl} \text{puisque} & 2b^2 & = & a^2 \\ \text{alors} & 2b^2 & = & (2k)^2 \\ \text{donc} & 2b^2 & = & 4k^2 \\ \text{d'où} & b^2 & = & 2k^2 \end{array}$$

    On en déduit que b^2 est pair, et donc b est pair par le même raisonnement que pour a.

- On sait donc :
  - × l'entier a est divisible par 2,
  - × l'entier b est divisible par 2.

  Les entiers a et b admettent donc un autre diviseur commun que 1.
  Absure !

Ainsi : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

- **Propriété reliant $\cup$ et $\subset$**

  Soit E un ensemble.

  Soient A et B des parties de E.

$$A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$$

Démonstration.
Il s'agit ici de démontrer une équivalence.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons $A \cup B = A$ et démontrons $B \subset A$.
Soit $x \in B$.
Comme $B \subset A \cup B = A$, alors $x \in A$.
($B \subset A \cup B = A$ est une démonstration suffisante et qui permet de ne pas avoir à introduire d'élément)

($\Leftarrow$) Supposons $B \subset A$ et démontrons $A \cup B = A$.
Il s'agit ici de démontrer une égalité. On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $x \in A \cup B$.
Ceci signifie que $x \in A$ ou $x \in B$. Deux cas se présentent alors :
- × si $x \in A$: alors on a bien $x \in A$.
- × si $x \notin A$: alors, comme $x \in A \cup B$, on a forcément $x \in B$.
  Or $B \subset A$. Comme $x \in B$, on en déduit que $x \in A$.

($\supset$) $A \cup B \supset A$

□

- **Propriété des fonctions indicatrices**

  Soit E un ensemble.

  Soient A et B des parties de E.

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$$

Démonstration.
Soit $x \in E$. Deux cas se présentent.

- Si $x \in A \cap B$ alors :
  - × $x \in A$ et donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$.
  - × $x \in B$ et donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$.

  Finalement :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) & = & 1 & \textit{(puisque } x \in A \cap B\textit{)} \\ & = & \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)\textit{)} \\ & = & \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) & \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)\textit{)} \end{array}$$

  Si $x \in A \cap B$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.

- Si $x \notin A \cap B$ alors $x \in \overline{A \cap B}$ est vérifiée ou encore $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
  Deux cas se présentent :
  × si $x \in \overline{A}$ alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A \cap B}(x) &= 0 && \textit{(puisque } x \notin A \cap B\textit{)} \\ &= \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) && \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \\ &= \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) && \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \end{aligned}$$

  × si $x \notin \overline{A}$ alors comme $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ on a forcément $x \in \overline{B}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A \cap B}(x) &= 0 && \textit{(puisque } x \notin A \cap B\textit{)} \\ &= \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) && \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \\ &= \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) && \textit{(puisque } \mathbb{1}_A(x) = 0\textit{)} \end{aligned}$$

  Si $x \notin A \cap B$, $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \min\big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\big) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.

□

Connaissances exigibles

Généralités sur les fonctions

- Schéma d'étude d'une fonction
- Monotonie :
  × Définitions de croissance, décroissance, monotonie, stricte croissance, stricte décroissance, stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle
  × Somme de fonctions croissantes, somme de fonctions décroissantes sur un même intervalle
  × Produit de fonctions croissantes positives sur un même intervalle
  × Composée de fonctions monotones sur des intervalles adéquats
- Fonctions majorées, minorée, bornées
- Extrema locaux, extrema globaux
- Borne supérieure et borne inférieure d'une fonction
- Réduction de l'ensemble d'étude par parité, par imparité, par périodicité
- Translations et homothéties : $x \mapsto f(x+a)$ et $x \mapsto f(ax)$. Lien entre la courbe représentative de ces fonctions et celle de f.
- Règles de dérivation : somme, produit, composée, réciproque.

  > Ce point ne fera l'objet d'aucune question nécessitant un retour à la définition de dérivabilité. Cette dernière sera vue dans un chapitre ultérieure.

- Théorème de la bijection.

Fonctions usuelles

- Fonction valeur absolue et inégalité triangulaire
- Fonction ln et logarithme en base b
- Fonction exp
- Fonctions puissances (entières et quelconques)
- Fonction partie entière par défaut et par excès
- Fonctions trigonométriques sin, cos, tan
- Fonctions hyperboliques ch, sh

Ensembles

- Définition d'ensemble et de la notion d'appartenance
- Écriture d'un ensemble sous forme extensive et compréhensive
- Définition d'un ensemble fini et de cardinal
- Inclusion entre ensembles et propriétés. Structure de démonstration d'une inclusion
- Égalité entre ensembles. Structure de démonstration d'une égalité entre ensembles.
- Ensemble des parties d'un ensemble E : $\mathscr{P}(E)$
- Réunion :
  - × définition
  - × représentation graphique
  - × propriétés de $\cup$
  - × liens entre $\cup$ et $\subset$
- Intersection :
  - × définition
  - × représentation graphique
  - × propriétés de $\cap$
  - × liens entre $\cap$ et $\subset$
- Complémentaire d'une partie :
  - × définition
  - × propriétés
- Fonctions indicatrices :
  - × définition
  - × propriétés
- Propriétés reliant $\cup$, $\cap$ et passage au complémentaire :
  - × distributivités,
  - × lois de De Morgan
- Partition d'un ensemble
- Recouvrement d'un ensemble
- Différence ensembliste de parties :
  - × définition
  - × lien avec le passage au complémentaire
- Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× toute transgression à la rédaction de la récurrence vue en classe,

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration citées ci-dessus.