PCSI

Programme de colle - Semaine 32

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Loi du maximum**

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers d'un dé non pipé à 6 faces.
  Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k la v.a. prenant la valeur du résultat obtenu au $k^{\text{ème}}$ lancer.
  On note : $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

  La loi de Y_n est donnée par :

  - $Y_n(\Omega) \subset [\![1,6]\!]$
  - $\forall k \in [\![1,6]\!]$, $\mathbb{P}(\{Y_n = k\}) = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{6}\right)^n$

Démonstration.

- Tout d'abord, on sait : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega) = [\![1,6]\!]$. Ainsi :

$$Y_n(\Omega) \ \subset \ [\![1,6]\!]$$

- Soit $k \in [\![1,6]\!]$.

  × Déterminons $\mathbb{P}(\{Y_n \leqslant k\})$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Y_n \leqslant k\}) &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant k\}\Big) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_i \leqslant k\}) && \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ (mutuellement) indépendantes)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{k}{6} && \textit{(car : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i \sim \mathcal{U}([\![1,6]\!])\textit{)} \\
&= \left(\frac{k}{6}\right)^n
\end{aligned}$$

  × Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Détaillons l'obtention de l'égalité $\mathbb{P}(\{X_i \leqslant k\}) = \dfrac{k}{6}$.

  - Tout d'abord, l'expérience (du lancer n°i) comporte 6 issues équiprobables numérotées de 1 à 6.
    La v.a. X_i prend la valeur de l'issue obtenue lors de cette expérience.
    Ainsi : $X_i \sim \mathcal{U}([\![1,6]\!])$.

- On remarque : $\{X_i \leqslant k\} = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \{X_i = j\}$. Donc :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{X_i \leqslant k\}\big) & = & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{k} \{X_i = j\}\Big) & \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big(\{X_i = j\}\big) & \textit{(car } \{X_i = 1\}, \ldots, \{X_i = k\} \textit{ incompatibles)} \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{1}{6} & \textit{(car } X_i \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)\textit{)} \\ & = & \dfrac{k}{6} & \end{array}$$

× On remarque de plus :

$$\begin{array}{rcll} \{Y_n \leqslant k\} & = & \{Y_n = k\} \cup \{Y_n < k\} & \\ & = & \{Y_n = k\} \cup \{Y_n \leqslant k-1\} & \textit{(car } Y_n \textit{ est à valeurs entières)} \end{array}$$

Comme les événements $\{Y_n = k\}$ et $\{Y_n \leqslant k-1\}$ sont incompatibles, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{Y_n = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Y_n \leqslant k\}\big) - \mathbb{P}\big(\{Y_n \leqslant k-1\}\big) = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n$$

$\square$

- **Espérance d'une v.a. à valeurs entières**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit X une v.a. finie à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

1. a) $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \{X > k-1\} = \{X = k\} \cup \{X > k\}}$

b) $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X > k-1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big)}$

2. $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big)}$

Démonstration.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Tout d'abord, comme la variable X est à valeurs entières :

$$\begin{array}{rcl} \{X > k-1\} & = & \{X \geqslant k\} \\ & = & \{X = k\} \cup \{X > k\} \end{array}$$

b) Les événements $\{X = k\}$ et $\{X > k\}$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{X > k-1\}) = \mathbb{P}(\{X = k\}) + \mathbb{P}(\{X > k\})$$

et ainsi : $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \mathbb{P}(\{X > k-1\}) - \mathbb{P}(\{X > k\})$.

2. On remarque :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = j\}\big)\right) && \textit{(car } X \textit{ est à valeurs dans } [\![1, n]\!]\textit{)} \\
&= \sum_{0 \leqslant k < j \leqslant n} \mathbb{P}\big(\{X = j\}\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{P}\big(\{X = j\}\big)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\, \mathbb{P}\big(\{X = j\}\big) \; = \; \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

□

- **Inégalité de Markov**

  Soit X une v.a. qui est d'espérance finie.
  On suppose de plus : $X(\Omega) \subset \ [0, +\infty[$.
  (autrement dit, X est à valeurs positives)

$$\boxed{\forall a > 0, \ \mathbb{P}\big(\{X \geqslant a\}\big) \ \leqslant \ \frac{\mathbb{E}(X)}{a}}$$

Démonstration.
Soit $a > 0$.

- Comme X est une variable discrète : $\{X \geqslant a\} \ = \displaystyle\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} \{X = x\}$.

  On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X \geqslant a\}\big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} \{X = x\}\Big) \\
&= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)
\end{aligned}$$

- Comme X est une variable positive, $\mathbb{E}(X) \in [0, +\infty]$ et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \\
&= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x < a}} x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \\
&\geqslant \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) && \textit{(car } X \textit{ est à valeurs positives)}
\end{aligned}$$

- Finalement :

$$\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} x\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \ \geqslant \ \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} a\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \ = \ a\, \mathbb{P}\big(\{X \geqslant a\}\big)$$

□

Connaissances exigibles

Variables aléatoires finies

- Variable aléatoire finie : définition, système complet d'événements associé à une v.a. , opérations sur les v.a. finies
- Transformée d'une v.a. finie
- Lois usuelles finies : loi (quasi)-certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale
  - × expression de la loi
  - × expérience aléatoire de référence
- Loi d'un couple de v.a. finies
- Système complet d'événements associé à un couple de v.a. finies
- Lois conditionnelles
- Lois marginales
- Indépendance de v.a. finies
- Opérations sur les couples de v.a. finies : somme, produit, max, min
- Stabilité par somme des lois binomiales
- Espérance d'un produit de v.a. indépendantes
- Covariance : définition, bilinéarité, symétrie, formule de Koenig-Huygens, condition nécessaire d'indépendance
- Variance d'une somme de v.a. (indépendantes ou non)
- Inégalités de concentration : inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.