

Programme de colle - Semaine 31

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8 .
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note ≤ 8 .

Questions de cours

• Calcul de somme

On demandera à l'étudiant de démontrer qu'une ou plusieurs séries convergent et calculer leur somme.

Par exemple, démontrer que la série $\sum \frac{n^2}{3^n}$ converge et calculer sa somme.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{3^k} &= \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1) + k}{3^k} \\
 &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{1}{3^k} + \sum_{k=1}^n k \frac{1}{3^k} \\
 &= \frac{1}{3^2} \sum_{k=2}^n k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}
 \end{aligned}$$

- Les séries $\sum n(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ et $\sum n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ sont des séries géométriques dérivées de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$. Elles sont donc convergentes et $\sum \frac{n^2}{3^n}$ aussi. De plus :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{3^k} = \frac{1}{3^2} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

□

- **Nature d'une série**

On demandera à l'étudiant d'étudier la nature d'une ou plusieurs séries (sans calcul de somme en cas de convergence).

Par exemple, déterminer la nature de la série $\sum \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{n}$.

Démonstration.

On remarque :

× tout d'abord : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi :

$$\frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n^2}$$

× ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0$,

× enfin, la série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{n}$ est convergente. $\square$

- **Comparaison série - intégrale**

On demandera à l'étudiant d'effectuer une comparaison série-intégrale dans un cas pratique.

Par exemple, démontrer, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, que la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [k, k+1]$.

$$\begin{array}{ccc} k & \leq & t \leq k+1 \\ \text{donc} & \frac{1}{k} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1} & \begin{array}{l} \text{(par décroissance de} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \end{array} \end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leq k+1$) :

$$\begin{array}{ccc} \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt & \geq & \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \\ \parallel & & \parallel \\ \frac{1}{k} & & \frac{1}{k+1} \end{array}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les encadrements précédents pour k variant de 1 à n , on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \right) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ \parallel & & \\ \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt & & \begin{array}{l} \text{(par relation de} \\ \text{Chasles)} \end{array} \end{array}$$

Or :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = [\ln(|t|)]_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

On en déduit (en particulier) :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$$

• Ainsi :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$$

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

$$\text{Par théorème de comparaison : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = +\infty.$$

On en conclut que la série numérique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. □

• Décomposition en supplémentaire adaptée à un projecteur

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit p un projecteur de E .

Alors : $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.

Démonstration.

Soit $x \in E$. On procède par analyse-synthèse.

• Analyse.

Supposons qu'il existe $(v, w) \in E^2$ tel que :

$$\times v \in \text{Im}(p). \text{ Il existe donc } u \in E \text{ tel que : } v = p(u).$$

$$\times w \in \text{Ker}(p). \text{ Ainsi : } p(w) = 0_E.$$

$$\times x = v + w.$$

On remarque :

$$\begin{aligned} p(x) &= p(v + w) \\ &= p(v) + p(w) \quad (\text{car } p \text{ est linéaire}) \\ &= p(p(u)) + 0_E \quad (\text{par définition de } v \text{ et } w) \\ &= (p \circ p)(u) \\ &= p(u) \quad (\text{car, comme } p \text{ est un projecteur : } p \circ p = p) \\ &= v \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{cases} v + w = x \\ v = p(x) \end{cases} \quad (*)$$

Or :

$$(*) \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{cases} w = x - p(x) \\ v = p(x) \end{cases}$$

• **Synthèse.**

On note :

$$\begin{cases} v_0 &= p(x) \\ w_0 &= x - p(x) \end{cases}$$

× Tout d'abord : $v_0 = p(x) \in \text{Im}(p)$.

× Ensuite :

$$\begin{aligned} p(w_0) &= p(x - p(x)) \\ &= p(x) - p(p(x)) && (\text{car } p \text{ est linéaire}) \\ &= p(x) - (p \circ p)(x) \\ &= p(x) - p(x) && (\text{car } p \text{ est un projecteur}) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Donc : $w_0 \in \text{Ker}(p)$.

× Enfin : $v_0 + w_0 = \cancel{p(x)} + (x - \cancel{p(x)}) = x$. □

• **Décomposition en supplémentaire adaptée à une symétrie**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit s une symétrie de E .

Alors : $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Démonstration.

Soit $x \in E$. On procède par analyse-synthèse.

• **Analyse.**

Supposons qu'il existe $(u, v) \in E^2$ tel que :

× $u \in \text{Ker}(s - \text{id}_E)$. Ainsi : $(s - \text{id}_E)(u) = 0_E$. Autrement dit : $s(u) = u$.

× $v \in \text{Ker}(s + \text{id}_E)$. Ainsi : $(s + \text{id}_E)(v) = 0_E$. Autrement dit : $s(v) = -v$.

× $x = u + v$.

On remarque :

$$\begin{aligned} (s - \text{id}_E)(x) &= (s - \text{id}_E)(u + v) \\ &= (s - \text{id}_E)(u) + (s - \text{id}_E)(v) && (\text{car } s - \text{id}_E \text{ est linéaire}) \\ &= 0_E + s(v) - v && (\text{car } u \in \text{Ker}(s - \text{id}_E)) \\ &= -2 \cdot v && (\text{car } v \in \text{Ker}(s + \text{id}_E)) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} (s + \text{id}_E)(x) &= (s + \text{id}_E)(u + v) \\ &= (s + \text{id}_E)(u) + (s + \text{id}_E)(v) && (\text{car } s + \text{id}_E \text{ est linéaire}) \\ &= s(u) + u + 0_E && (\text{car } v \in \text{Ker}(s + \text{id}_E)) \\ &= 2 \cdot u && (\text{car } u \in \text{Ker}(s - \text{id}_E)) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{cases} u &= \frac{1}{2} \cdot (s + \text{id}_E)(x) \\ v &= -\frac{1}{2} \cdot (s - \text{id}_E)(x) \end{cases}$$

• **Synthèse.**

On note :

$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \cdot (s + \text{id}_E)(x) \\ v_0 &= -\frac{1}{2} \cdot (s - \text{id}_E)(x) \end{cases}$$

× Tout d'abord :

$$\begin{aligned} (s - \text{id}_E)(u_0) &= (s - \text{id}_E) \left(\frac{1}{2} \cdot (s + \text{id}_E)(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (s - \text{id}_E) \circ (s + \text{id}_E)(x) \quad (\text{car } s - \text{id}_E \text{ est linéaire}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (s^2 - \text{id}_E)(x) \quad (\text{car } s \text{ et } \text{id}_E \text{ commutent}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0_E \quad (\text{car, comme } s \text{ est une symétrie : } s \circ s = \text{id}_E) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Donc : $u_0 \in \text{Ker } s - \text{id}_E$.

× Ensuite :

$$\begin{aligned} (s + \text{id}_E)(v_0) &= (s + \text{id}_E) \left(-\frac{1}{2} \cdot (s - \text{id}_E)(x) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (s + \text{id}_E) \circ (s - \text{id}_E)(x) \quad (\text{car } s + \text{id}_E \text{ est linéaire}) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (s^2 - \text{id}_E)(x) \quad (\text{car } s \text{ et } \text{id}_E \text{ commutent}) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 0_E \quad (\text{car, comme } s \text{ est une symétrie : } s \circ s = \text{id}_E) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Donc : $v_0 \in \text{Ker } s + \text{id}_E$.

× Enfin :

$$u_0 + v_0 = \frac{1}{2} \cdot (s + \text{id}_E)(x) - \frac{1}{2} \cdot (s - \text{id}_E)(x) = \frac{1}{2} \cdot \cancel{s(x)} + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \cancel{s(x)} + \frac{1}{2} \cdot x = x$$

□

Connaissances exigibles

Série

- Définitions : série, terme général, somme partielle convergence d'une série, divergence d'une série, somme d'une série en cas de série convergente, nature d'une série
- Convergence de séries à valeurs complexes
- Reste d'une série convergente
- Condition nécessaire de convergence d'une série, définition de série grossièrement divergente
- Série télescopique : définition, équivalence entre la convergence d'une suite et de sa série télescopique associée
- Séries usuelles : $\sum z^n$, $\sum n z^{n-1}$, $\sum n(n-1) z^{n-2}$, $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$
- Comparaison série-intégrale
- Cas particulier des séries à termes positifs / négatifs :
 - × (S_n) majorée $\Rightarrow \sum u_n$ converge
 - × (S_n) non majorée $\Rightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
 - × critère de comparaison des SATP
 - × critère d'équivalence des SATP
 - × critère de négligeabilité des SATP
 - × critère de domination des SATP
- Convergence absolue d'une série numérique : définition, inégalité triangulaire, utilisation du critère de domination pour démontrer l'absolue convergence d'une série
- Propriétés algébriques des séries convergentes
- Formule de Stirling

Applications linéaires et représentations matricielles

- Matrice colonne associé à un vecteur et isomorphisme de représentation
- Matrice de passage : définition, propriétés
- Matrice associée à une application linéaire et isomorphisme de représentation
- Formule de changement de bases
- Noyau d'une matrice :
 - × définition
 - × lien entre $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$
- Composée d'applications linéaires et produit matriciel
- Réciproque d'une application linéaire et inverse d'une matrice
- Image d'une matrice :
 - × définition
 - × rang d'une matrice : définition et propriétés
 - × $\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$
 - × f bijectif $\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ inversible
- Matrices par blocs et sous-espaces stables :
 - × définition de sous-espace stable
 - × lien entre sous-espaces stables et représentation matricielle par blocs en dimension finie
 - × exemples de sous-espaces stables
 - × matrice dans une base adaptée à des supplémentaires stables

- Projecteurs et symétries :
 - × définitions
 - × propriétés : équations fonctionnelles, supplémentarité, représentations matricielles par blocs dans des bases adaptées



On sanctionnera fortement les points suivants :

- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.