Programme de colle - Semaine 3

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Décomposition en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire**

  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

  Toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

  Démonstration.
  Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
  On procède par analyse-synthèse.

  - **Analyse** : Supposons qu'il existe deux fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ telles que :

    1) $f = g + h$,

    2) g est paire,

    3) h est impaire.

    On remarque tout d'abord, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ (car l'intervalle I est symétrique par rapport à 0) et :

$$\begin{array}{rcll} f(-x) & = & (g+h)(-x) & \textit{(d'après 1))} \\ & = & g(-x) + h(-x) & \\ & = & g(x) - h(x) & \textit{(car } g \textit{ paire et } h \textit{ impaire)} \end{array}$$

    On obtient ainsi le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} g(x) & + & h(x) & = & f(x) \\ g(x) & - & h(x) & = & f(-x) \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} g(x) & + & h(x) & = & f(x) & & \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) & + & f(-x) \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,g(x) & & & = & f(x) & + & f(-x) \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) & + & f(-x) \end{array} \right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}\,L_2}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} g(x) & = & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h(x) & = & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array} \right.$$

- **Synthèse** : On pose

$$g_0 : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad h_0 : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}$$

On remarque alors :

× tout d'abord : $f = g_0 + h_0$. En effet, pour tout $x \in I$:

$$(g_0+h_0)(x) = g_0(x)+h_0(x) = \frac{f(x)+\cancel{f(-x)}}{2} + \frac{f(x)-\cancel{f(-x)}}{2} = \frac{\cancel{2}\,f(x)}{\cancel{2}} = f(x)$$

× ensuite, g_0 est paire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

$$g_0(-x) = \frac{f(-x)+f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g_0(x)$$

× enfin, h_0 est impaire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

$$h_0(-x) = \frac{f(-x)-f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h_0(x)$$

□

- **Propriétés d'une bijection**

Soit $f : E \to F$ une bijection de E sur F.

Et $f^{-1} : F \to E$ sa réciproque.

1) $\forall x \in E, \forall y \in F,\ (y = f(x) \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y))$

2) $\forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y$

3) $\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x$

4) $f^{-1} : F \to E$ est une bijection de F sur E.

Démonstration.

1) Soient $x \in E$ et $y \in F$.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons $y = f(x)$.
Alors x est un antécédent (il est unique puisque f est bijective) de y par f.
Or, par définition de f^{-1}, f^{-1} associe à chaque élément $y \in F$ son unique antécédent dans E par f : c'est précisément x. Cela démontre que $f^{-1}(y) = x$.

($\Leftarrow$) Supposons $x = f^{-1}(y)$.
Par définition de f^{-1}, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent dans l'ensemble E de l'élément y par la fonction f. On a donc $y = f(x)$.

2) Soit $y \in F$.
Par définition de f^{-1}, $f^{-1}(y)$ est l'unique x dans E tel que $y = f(x)$. Ainsi, $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

3) Soit $x \in E$.
Notons $y = f(x)$. Alors, d'après ***1)*** : $x = f^{-1}(y)$.
Ainsi, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$.

4) On souhaite démontrer : $\forall v \in E, \exists! u \in F,\ v = f^{-1}(u)$.
Soit $v \in E$.

- $\times$ D'après *3)* : $f^{-1}(f(v)) = v$. Ainsi, en notant $u = f(v)$, on a bien trouvé un élément $u \in F$ tel que $f^{-1}(u) = v$.
- $\times$ Il reste à démontrer l'unicité de u. On procède par l'absurde.
  Supposons qu'il existe $t \in F$ tel que :
  - d'une part : $t \neq u$,
  - d'autre part : $v = f^{-1}(t)$.

  Alors, d'après *1)* : $t = f(v)$. Ainsi : $t = f(v) = u$.
  Absurde !

□

- **Irrationnalité de $\sqrt{2}$**
Le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.
On procède par l'absurde. Supposons : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ (car $\sqrt{2} \geqslant 0$) tel que :

- $\times$ d'une part : $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$,
- $\times$ d'autre part : a et b n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1 (on dit que a et b sont premiers entre eux).

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{lccc} \text{comme} & \sqrt{2} & = & \dfrac{a}{b} \\[2ex] \text{alors} & \left(\sqrt{2}\right)^2 & = & \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \\[2ex] \text{donc} & 2 & = & \dfrac{a^2}{b^2} \\[2ex] \text{d'où} & 2b^2 & = & a^2 \end{array}$$

  On en déduit que a^2 est pair.
- Montrons qu'alors a est pair.
  On procède par encore par l'absurde. Supposons que a est impair.
  Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = 2k + 1$. On obtient :

$$a^2 \ = \ (2k+1)^2 \ = \ 4k^2 + 4k + 1 \ = \ 2\,(2k^2 + 2k) + 1$$

  Il existe donc $k_0 = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ tel que : $a^2 = 2k_0 + 1$.
  L'entier a^2 est donc impair. Absurde !

  On en déduit que a est pair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = 2k$.
- On obtient :

$$\begin{array}{lccc} \text{puisque} & 2b^2 & = & a^2 \\ \text{alors} & 2b^2 & = & (2k)^2 \\ \text{donc} & 2b^2 & = & 4k^2 \\ \text{d'où} & b^2 & = & 2k^2 \end{array}$$

  On en déduit que b^2 est pair, et donc b est pair par le même raisonnement que pour a.

- On sait donc :
  - × l'entier a est divisible par 2,
  - × l'entier b est divisible par 2.

  Les entiers a et b admettent donc un autre diviseur commun que 1.
  Absure !

Ainsi : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Connaissances exigibles

Généralités sur les fonctions

- Schéma d'étude d'une fonction
- Monotonie :
  - × Définitions de croissance, décroissance, monotonie, stricte croissance, stricte décroissance, stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle
  - × Somme de fonctions croissantes, somme de fonctions décroissantes sur un même intervalle
  - × Produit de fonctions croissantes positives sur un même intervalle
  - × Composée de fonctions monotones sur des intervalles adéquats
- Fonctions majorées, minorée, bornées
- Extrema locaux, extrema globaux
- Borne supérieure et borne inférieure d'une fonction
- Réduction de l'ensemble d'étude par parité, par imparité, par périodicité
- Translations et homothéties : $x \mapsto f(x+a)$ et $x \mapsto f(ax)$. Lien entre la courbe représentative de ces fonctions et celle de f.
- Règles de dérivation : somme, produit, composée, réciproque.

  ⚠ Ce point ne fera l'objet d'aucune question nécessitant un retour à la définition de dérivabilité. Cette dernière sera vue dans un chapitre ultérieure.

- Théorème de la bijection.

Fonctions usuelles

- Fonction valeur absolue et inégalité triangulaire
- Fonction ln et logarithme en base b
- Fonction exp
- Fonctions puissances (entières et quelconques)
- Fonction partie entière par défaut et par excès
- Fonctions trigonométriques sin, cos, tan

On sanctionnera fortement les points suivants :

- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × toute transgression à la rédaction de la récurrence vue en classe,
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration citées ci-dessus.