Programme de colle - Semaine 29

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Décomposition en supplémentaire adaptée à un projecteur**

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

  Soit p un projecteur de E.

  Alors : $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

  Démonstration.
  Soit $x \in E$. On procède par analyse-synthèse.

  - **Analyse**.
    Supposons qu'il existe $(v, w) \in E^2$ tel que :
    × $v \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe donc $u \in E$ tel que : $v = p(u)$.
    × $w \in \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi : $p(w) = 0_E$.
    × $x = v + w$.

    On remarque :

$$\begin{array}{rcll} p(x) & = & p(v+w) & \\ & = & p(v)+p(w) & \textit{(car } p \textit{ est linéaire)} \\ & = & p\big(p(u)\big)+0_E & \textit{(par définition de } v \textit{ et } w\textit{)} \\ & = & (p\circ p)(u) & \\ & = & p(u) & \textit{(car, comme } p \textit{ est un projecteur : } p\circ p = p\textit{)} \\ & = & v & \end{array}$$

    On obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} v & + & w & = & x \\ v & & & = & p(x) \end{array}\right. \qquad (*)$$

    Or :

$$(*) \underset{}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff}} \left\{\begin{array}{ccc} w & = & x - p(x) \\ v & = & p(x) \end{array}\right.$$

- **Synthèse**.
  On note :
$$\left\{\begin{array}{rcl} v_0 & = & p(x) \\ w_0 & = & x - p(x) \end{array}\right.$$
  × Tout d'abord : $v_0 = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$.
  × Ensuite :
$$\begin{array}{rcll} p(w_0) & = & p\big(x - p(x)\big) & \\ & = & p(x) - p\big(p(x)\big) & \textit{(car } p \textit{ est linéaire)} \\ & = & p(x) - (p \circ p)(x) & \\ & = & p(x) - p(x) & \textit{(car } p \textit{ est un projecteur)} \\ & = & 0_E & \end{array}$$
  Donc : $w_0 \in \mathrm{Ker}(p)$.
  × Enfin : $v_0 + w_0 = \cancel{p(x)} + \big(x - \cancel{p(x)}\big) = x$.

□

- **Décomposition en supplémentaire adaptée à une symétrie**
  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  Soit s une symétrie de E.
  Alors : $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Démonstration.
Soit $x \in E$. On procède par analyse-synthèse.
- **Analyse**.
  Supposons qu'il existe $(u, v) \in E^2$ tel que :
  × $u \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$. Ainsi : $(s - \mathrm{id}_E)(u) = 0_E$. Autrement dit : $s(u) = u$.
  × $v \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. Ainsi : $(s + \mathrm{id}_E)(v) = 0_E$. Autrement dit : $s(v) = -v$.
  × $x = u + v$.
  On remarque :
$$\begin{array}{rcll} (s - \mathrm{id}_E)(x) & = & (s - \mathrm{id}_E)(u + v) & \\ & = & (s - \mathrm{id}_E)(u) + (s - \mathrm{id}_E)(v) & \textit{(car } s - \mathrm{id}_E \textit{ est linéaire)} \\ & = & 0_E + s(v) - v & \textit{(car : } u \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)\textit{)} \\ & = & -2 \cdot v & \textit{(car : } v \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)\textit{)} \end{array}$$
  De même :
$$\begin{array}{rcll} (s + \mathrm{id}_E)(x) & = & (s + \mathrm{id}_E)(u + v) & \\ & = & (s + \mathrm{id}_E)(u) + (s + \mathrm{id}_E)(v) & \textit{(car } s + \mathrm{id}_E \textit{ est linéaire)} \\ & = & s(u) + u + 0_E & \textit{(car : } v \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)\textit{)} \\ & = & 2 \cdot u & \textit{(car : } u \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)\textit{)} \end{array}$$
  On obtient :
$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & \dfrac{1}{2} \cdot (s + \mathrm{id}_E)(x) \\ v & = & -\dfrac{1}{2} \cdot (s - \mathrm{id}_E)(x) \end{array}\right.$$

- **Synthèse**.
  On note :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \cdot (s + \mathrm{id}_E)(x) \\ v_0 & = & -\dfrac{1}{2} \cdot (s - \mathrm{id}_E)(x) \end{array} \right.$$

  × Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} (s - \mathrm{id}_E)(u_0) & = & (s - \mathrm{id}_E)\left(\dfrac{1}{2} \cdot (s + \mathrm{id}_E)(x)\right) & \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot \big((s - \mathrm{id}_E) \circ (s + \mathrm{id}_E)\big)(x) & \textit{(car } s - \mathrm{id}_E \textit{ est linéaire)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot (s^2 - \mathrm{id}_E)(x) & \textit{(car } s \textit{ et } \mathrm{id}_E \textit{ commutent)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot 0_E & \textit{(car, comme } s \textit{ est une symétrie : } s \circ s = \mathrm{id}_E\textit{)} \\ & = & 0_E & \end{array}$$

  Donc : $u_0 \in \operatorname{Ker} s - \mathrm{id}_E$.

  × Ensuite :

$$\begin{array}{rcll} (s + \mathrm{id}_E)(v_0) & = & (s + \mathrm{id}_E)\left(-\dfrac{1}{2} \cdot (s - \mathrm{id}_E)(x)\right) & \\ & = & -\dfrac{1}{2} \cdot \big((s + \mathrm{id}_E) \circ (s - \mathrm{id}_E)\big)(x) & \textit{(car } s + \mathrm{id}_E \textit{ est linéaire)} \\ & = & -\dfrac{1}{2} \cdot (s^2 - \mathrm{id}_E)(x) & \textit{(car } s \textit{ et } \mathrm{id}_E \textit{ commutent)} \\ & = & -\dfrac{1}{2} \cdot 0_E & \textit{(car, comme } s \textit{ est une symétrie : } s \circ s = \mathrm{id}_E\textit{)} \\ & = & 0_E & \end{array}$$

  Donc : $v_0 \in \operatorname{Ker} s + \mathrm{id}_E$.

  × Enfin :

$$u_0 + v_0 \;=\; \frac{1}{2} \cdot (s + \mathrm{id}_E)(x) - \frac{1}{2} \cdot (s - \mathrm{id}_E)(x) \;=\; \cancel{\frac{1}{2} \cdot s(x)} + \frac{1}{2} \cdot x - \cancel{\frac{1}{2} \cdot s(x)} + \frac{1}{2} \cdot x \;=\; x$$

□

- **Stabilité par somme des lois binomiales**
  Soit $p \in \,]0,1[$ et soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ X \sim \mathcal{B}(m,p) \text{ et } Y \sim \mathcal{B}(n,p) \\ \bullet\ X \perp\!\!\!\perp Y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad X + Y \sim \mathcal{B}(m+n,p)$$

Démonstration.
On suppose, sans perte de généralité : $n \geqslant m$.

× Comme $X(\Omega) = [\![0,m]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$, alors : $(X+Y)(\Omega) \subset [\![0,m+n]\!]$.

× Soit $k \in [\![0, m+n]\!]$.
La famille $(\{X = i\})_{i \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}(\{X+Y=k\}) & \\ = & \sum\limits_{i=0}^{m} \mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{X+Y=k\}) & \\ = & \sum\limits_{i=0}^{m} \mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=k-i\}) & \\ = & \sum\limits_{i=0}^{m} \mathbb{P}(\{X=i\})\ \mathbb{P}(\{Y=k-i\}) & \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\ = & \sum\limits_{\substack{i=0 \\ k-i \in Y(\Omega)}}^{m} \mathbb{P}(\{X=i\})\ \mathbb{P}(\{Y=k-i\}) & \\ + & \cancel{\sum\limits_{\substack{i=0 \\ k-i \notin Y(\Omega)}}^{m} \mathbb{P}(\{X=i\})\ \mathbb{P}(\{Y=k-i\})} & \textit{(car } \{Y=k-i\} = \varnothing \textit{ si } k-i \notin Y(\Omega)\textit{)} \\ = & \sum\limits_{i=0}^{k} \mathbb{P}(\{X=i\})\ \mathbb{P}(\{Y=k-i\}) & \end{array}$$

× Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{X+Y=k\} & = & \sum\limits_{i=0}^{k} \mathbb{P}(\{X=i\})\,\mathbb{P}(\{Y=k-i\}) & \\ & = & \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{m}{i} p^i\,(1-p)^{m-i}\,\binom{n}{k-i} p^{k-i}\,(1-p)^{n-(k-i)} & \textit{(car } X \sim \mathcal{B}(m,p) \textit{ et } Y \sim \mathcal{B}(n,p)\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} p^k\,(1-p)^{m+n-k} & \\ & = & p^k(1-p)^{m+n-k} \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} & \\ & = & \binom{m+n}{k}\, p^k(1-p)^{m+n-k} & \textit{(d'après la formule de Vandermonde)} \end{array}$$

Finalement : $X + Y \sim \mathcal{B}(m+n, p)$. □

- **Loi du maximum**

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers d'un dé non pipé à 6 faces.
  Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la v.a. prenant la valeur du résultat obtenu au $k^{\text{ème}}$ lancer.
  On note : $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

  La loi de Y_n est donnée par :

  - $Y_n(\Omega) \subset [\![1, 6]\!]$
  - $\forall k \in [\![1, 6]\!]$, $\mathbb{P}(\{Y_n = k\}) = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{6}\right)^n$

Démonstration.

- Tout d'abord, on sait : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [\![1, 6]\!]$. Ainsi :

$$Y_n(\Omega) \ \subset\ [\![1, 6]\!]$$

- Soit $k \in [\![1,6]\!]$.
  - × Déterminons $\mathbb{P}(\{Y_n \leqslant k\})$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{Y_n \leqslant k\}) & = & \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant k\}\Big) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_i \leqslant k\}) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ (mutuellement) indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{k}{6} & \textit{(car : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i \sim \mathcal{U}([\![1,6]\!])\textit{)} \\ & = & \left(\dfrac{k}{6}\right)^n & \end{array}$$

  - × Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Détaillons l'obtention de l'égalité $\mathbb{P}(\{X_i \leqslant k\}) = \dfrac{k}{6}$.
    - Tout d'abord, l'expérience (du lancer n°i) comporte 6 issues équiprobables numérotées de 1 à 6. La v.a. X_i prend la valeur de l'issue obtenue lors de cette expérience. Ainsi : $X_i \sim \mathcal{U}([\![1,6]\!])$.
    - On remarque : $\{X_i \leqslant k\} = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \{X_i = j\}$. Donc :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{X_i \leqslant k\}\big) & = & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{k} \{X_i = j\}\Big) & \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big(\{X_i = j\}\big) & \textit{(car } \{X_i = 1\}, \ldots, \{X_i = k\} \textit{ incompatibles)} \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{1}{6} & \textit{(car } X_i \sim \mathcal{U}([\![1,6]\!])\textit{)} \\ & = & \dfrac{k}{6} & \end{array}$$

  - × On remarque de plus :

$$\begin{array}{rcll} \{Y_n \leqslant k\} & = & \{Y_n = k\} \cup \{Y_n < k\} & \\ & = & \{Y_n = k\} \cup \{Y_n \leqslant k-1\} & \textit{(car } Y_n \textit{ est à valeurs entières)} \end{array}$$

    Comme les événements $\{Y_n = k\}$ et $\{Y_n \leqslant k-1\}$ sont incompatibles, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{Y_n = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Y_n \leqslant k\}\big) - \mathbb{P}\big(\{Y_n \leqslant k-1\}\big) = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{6}\right)^n$$

□

Connaissances exigibles

Applications linéaires et représentations matricielles

- Matrice colonne associé à un vecteur et isomorphisme de représentation
- Matrice de passage : définition, propriétés
- Matrice associée à une application linéaire et isomorphisme de représentation
- Formule de changement de bases
- Noyau d'une matrice :
  - × définition
  - × lien entre $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)$
- Composée d'applications linéaires et produit matriciel
- Réciproque d'une application linéaire et inverse d'une matrice
- Image d'une matrice :
  - × définition
  - × rang d'une matrice : définition et propriétés
  - × $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)$
  - × f bijectif $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ inversible
- Matrices par blocs et sous-espaces stables :
  - × définition de sous-espace stable
  - × lien entre sous-espaces stables et représentation matricielle par blocs en dimension finie
  - × exemples de sous-espaces stables
  - × matrice dans une base adaptée à des supplémentaires stables
- Projecteurs et symétries :
  - × définitions
  - × propriétés : équations fonctionnelles, supplémentarité, représentations matricielles par blocs dans des bases adaptées

Variables aléatoires finies

- Variable aléatoire finie : définition, système complet d'événements associé à une v.a. , opérations sur les v.a. finies
- Transformée d'une v.a. finie
- Lois usuelles finies : loi (quasi)-certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale
  - × expression de la loi
  - × expérience aléatoire de référence
- Loi d'un couple de v.a. finies
- Système complet d'événements associé à un couple de v.a. finies
- Lois conditionnelles
- Lois marginales
- Indépendance de v.a. finies
- Opérations sur les couples de v.a. finies : somme, produit, max, min
- Stabilité par somme des lois binomiales

⚠

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.