Programme de colle - Semaine 29

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Propriétés des probabilités**

  Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  1) $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

  2) $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

  3) $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $A \subset B \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
  (l'application $\mathbb{P}$ est croissante)

  4) $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

  5) $\forall (A, B, C) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^3$,
  $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) \;+\; \mathbb{P}(B) \;+\; \mathbb{P}(C) \\ & - & \mathbb{P}(A \cap B) \;-\; \mathbb{P}(A \cap C) \;-\; \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}$$
  (formule du crible)

  6) $\forall (A_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^n$, $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \;\leqslant\; \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$

  On demandera à l'étudiant de démontrer 3 propriétés parmi les 6

  Démonstration.

  1) On a : $A \cup \overline{A} = \Omega$ (réunion disjointe). Ainsi, par additivité :
  $$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

  2) On a : $(A \setminus B) \;\cup\; (A \cap B) = A$ (réunion disjointe).
  Ainsi, par additivité :
  $$\mathbb{P}((A \setminus B) \;\cup\; (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

  3) Supposons $A \subset B$.
  D'après le point précédent : $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B)$.
  Or, comme $A \subset B$, on a $A \cap B = A$. Ainsi :
  $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$$

4) On a : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe).
On en déduit, à l'aide du point *2)* que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B) & = & \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{array}$$

5) Généralisation de la formule précédente :

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\ \quad = \quad \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\ \quad = \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ \quad = \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ \quad = \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ \quad = \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ \qquad\quad\ \ - \left(\ \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))\ \right) \\ \quad = \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ \qquad\quad\ \ - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\ \qquad\quad\ \ + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}$$

6) On démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: $\forall (A_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^n$, $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ □

- **L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité**
  Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
  Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

L'application $\mathbb{P}_B$ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_B & : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \,|\, B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array}$$

est une probabilité.

Démonstration.
Il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}_B$ vérifie les axiomes d'une probabilité.

1) Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

- Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$ (car $\mathbb{P}(B) \neq 0$), on a : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geqslant 0$.
- Comme $A \cap B \subset B$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$ et donc : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leqslant 1$.

2) $\mathbb{P}_B(\Omega) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(B \cap \Omega)}{\mathbb{P}(B)} \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} \ = \ 1$.

3) Soit $(A_1, A_2) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^2$ un couple d'événements incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2) \ = \ \frac{\mathbb{P}\big(B \cap (A_1 \cap A_2)\big)}{\mathbb{P}(B)} \ = \ \frac{\mathbb{P}\big((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)\big)}{\mathbb{P}(B)}$$

Notons alors $C_1 = B \cap A_1$ et $C_2 = B \cap A_2$.
Les événements C_1 et C_2 sont incompatibles. En effet :

$$C_1 \cap C_2 \ = \ (B \cap A_1) \ \cap \ (B \cap A_2) \ = \ B \cap (A_1 \cap A_2) \ = \ B \cap \varnothing \ = \ \varnothing$$

Par additivité de $\mathbb{P}$, on obtient alors :

$$\mathbb{P}\big((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)\big) \ = \ \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) \end{aligned}$$

□

- **Formule des probabilités totales**
  Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I \subset [\![1, n]\!]$.
  Soit $(A_i)_{i \in I} \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^I$ un système (quasi-)complet d'événements.
  Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big) \times \mathbb{P}(A_i) \end{aligned}$$

Démonstration.
Démonstration dans le cas où $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements

- Comme $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements : $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.
  Ainsi, on a : $B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup\limits_{i \in I} A_i = \bigcup\limits_{i \in I} (B \cap A_i)$.
- Démontrons que la famille $(B \cap A_i)_{i \in I}$ est constituée d'événements deux à deux incompatibles.
  Pour tout $i \in I$, notons : $C_i = B \cap A_i$.
  Il s'agit de démontrer que les événements de la suite $(C_i)_{i \in I}$ sont deux à deux incompatibles.
  Soit $(i, j) \in I^2$. Supposons $i \neq j$. On a alors :

$$C_i \cap C_j \ = \ (A \cap B_i) \ \cap \ (A \cap B_j) \ = \ A \cap (B_i \cap B_j) \ = \ A \cap \varnothing \ = \ \varnothing$$

- Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \Big) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) \qquad \textit{(par (σ-)additivité de $\mathbb{P}$)} \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \,|\, A_i) \times \mathbb{P}(A_i) \end{aligned}$$

□

Connaissances exigibles

Probabilité sur un univers fini

- Espace probabilisable, univers, événements, événement impossible, événement certain, événement contraire
- Réunion finie et intersection finie d'événements
- Événements incompatibles
- Système complet d'événements
- Espace probabilisé, probabilité, événement négligeable, événement quasi-certain, propriété vérifiée presque sûrement
- Propriétés des probabilités
- Probabilité uniforme
- Probabilité conditionnelle
- Formule des probabilités composées
- Système quasi-complet d'événements
- Formule des probabilités totales
- Formule de Bayes
- Indépendance de deux événements : définition, indépendance et événement contraire
- Indépendance mutuelle d'une famille d'événements : définition, indépendance mutuelle et événements contraires
- Méthode de calcul de probabilités

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.