Programme de colle - Semaine 28

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Calcul de somme**
  On demandera à l'étudiant de démontrer qu'une ou plusieurs séries convergent et calculer leur somme.
- **Nature d'une série**
  On demandera à l'étudiant d'étudier la nature d'une ou plusieurs séries (sans calcul de somme en cas de convergence)
- **Comparaison série - intégrale**
  On demandera à l'étudiant d'effectuer une comparaison série-intégrale dans un cas pratique.
- **Décomposition en supplémentaire adaptée à un projecteur**

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  Soit p un projecteur de E.
  Alors : $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

  Démonstration.
  Soit $x \in E$. On procède par analyse-synthèse.

  - **Analyse**.
    Supposons qu'il existe $(v, w) \in E^2$ tel que :
    × $v \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe donc $u \in E$ tel que : $v = p(u)$.
    × $w \in \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi : $p(w) = 0_E$.
    × $x = v + w$.

    On remarque :

$$\begin{array}{rcll} p(x) & = & p(v+w) & \\ & = & p(v) + p(w) & \textit{(car p est linéaire)} \\ & = & p\big(p(u)\big) + 0_E & \textit{(par définition de v et w)} \\ & = & (p \circ p)(u) & \\ & = & p(u) & \textit{(car, comme p est un projecteur : $p \circ p = p$)} \\ & = & v & \end{array}$$

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} v & + & w & = & x \\ v & & & = & p(x) \end{array} \right. \qquad (*)$$

Or :

$$(*) \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & w & = & x - p(x) \\ v & & & = & p(x) \end{array} \right.$$

- **Synthèse**.
  On note :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_0 & = & p(x) \\ w_0 & = & x - p(x) \end{array} \right.$$

  × Tout d'abord : $v_0 = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$.

  × Ensuite :

$$\begin{array}{rcll} p(w_0) & = & p\big(x - p(x)\big) & \\ & = & p(x) - p\big(p(x)\big) & \textit{(car p est linéaire)} \\ & = & p(x) - (p \circ p)(x) & \\ & = & p(x) - p(x) & \textit{(car p est un projecteur)} \\ & = & 0_E & \end{array}$$

  Donc : $w_0 \in \mathrm{Ker}(p)$.

  × Enfin : $v_0 + w_0 = \cancel{p(x)} + \big(x - \cancel{p(x)}\big) = x$.

□

- **Décomposition en supplémentaire adaptée à une symétrie**

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

  Soit s une symétrie de E.

  Alors : $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Démonstration.
Soit $x \in E$. On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse**.
  Supposons qu'il existe $(u, v) \in E^2$ tel que :

  × $u \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$. Ainsi : $(s - \mathrm{id}_E)(u) = 0_E$. Autrement dit : $s(u) = u$.

  × $v \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. Ainsi : $(s + \mathrm{id}_E)(v) = 0_E$. Autrement dit : $s(v) = -v$.

  × $x = u + v$.

  On remarque :

$$\begin{array}{rcll} (s - \mathrm{id}_E)(x) & = & (s - \mathrm{id}_E)(u + v) & \\ & = & (s - \mathrm{id}_E)(u) + (s - \mathrm{id}_E)(v) & \textit{(car $s - \mathrm{id}_E$ est linéaire)} \\ & = & 0_E + s(v) - v & \textit{(car : $u \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$)} \\ & = & -2 \cdot v & \textit{(car : $v \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$)} \end{array}$$

De même :

$$\begin{aligned}
(s+\mathrm{id}_E)(x) &= (s+\mathrm{id}_E)(u+v) \\
&= (s+\mathrm{id}_E)(u)+(s+\mathrm{id}_E)(v) && \textit{(car } s+\mathrm{id}_E \textit{ est linéaire)} \\
&= s(u)+u+0_E && \textit{(car : } v \in \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)\textit{)} \\
&= 2\cdot u && \textit{(car : } u \in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)\textit{)}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & \frac{1}{2}\cdot(s+\mathrm{id}_E)(x) \\ v & = & -\frac{1}{2}\cdot(s-\mathrm{id}_E)(x) \end{array}\right.$$

- **Synthèse**.
  On note :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & \frac{1}{2}\cdot(s+\mathrm{id}_E)(x) \\ v_0 & = & -\frac{1}{2}\cdot(s-\mathrm{id}_E)(x) \end{array}\right.$$

× Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
(s-\mathrm{id}_E)(u_0) &= (s-\mathrm{id}_E)\left(\frac{1}{2}\cdot(s+\mathrm{id}_E)(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\big((s-\mathrm{id}_E)\circ(s+\mathrm{id}_E)\big)(x) && \textit{(car } s-\mathrm{id}_E \textit{ est linéaire)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot(s^2-\mathrm{id}_E)(x) && \textit{(car } s \textit{ et } \mathrm{id}_E \textit{ commutent)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 0_E && \textit{(car, comme } s \textit{ est une symétrie : } s\circ s=\mathrm{id}_E\textit{)} \\
&= 0_E
\end{aligned}$$

Donc : $u_0 \in \mathrm{Ker}\, s-\mathrm{id}_E$.

× Ensuite :

$$\begin{aligned}
(s+\mathrm{id}_E)(v_0) &= (s+\mathrm{id}_E)\left(-\frac{1}{2}\cdot(s-\mathrm{id}_E)(x)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\big((s+\mathrm{id}_E)\circ(s-\mathrm{id}_E)\big)(x) && \textit{(car } s+\mathrm{id}_E \textit{ est linéaire)} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot(s^2-\mathrm{id}_E)(x) && \textit{(car } s \textit{ et } \mathrm{id}_E \textit{ commutent)} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot 0_E && \textit{(car, comme } s \textit{ est une symétrie : } s\circ s=\mathrm{id}_E\textit{)} \\
&= 0_E
\end{aligned}$$

Donc : $v_0 \in \mathrm{Ker}\, s+\mathrm{id}_E$.

× Enfin :

$$u_0+v_0 = \frac{1}{2}\cdot(s+\mathrm{id}_E)(x)-\frac{1}{2}\cdot(s-\mathrm{id}_E)(x) = \cancel{\frac{1}{2}\cdot s(x)}+\frac{1}{2}\cdot x-\cancel{\frac{1}{2}\cdot s(x)}+\frac{1}{2}\cdot x = x$$

□

Connaissances exigibles

Série

- Définitions : série, terme général, somme partielle convergence d'une série, divergence d'une série, somme d'une série en cas de série convergente, nature d'une série
- Convergence de séries à valeurs complexes
- Reste d'une série convergente
- Condition nécessaire de convergence d'une série, définition de série grossièrement divergente
- Série télescopique : définition, équivalence entre la converge d'une suite et de sa série télescopique associée
- Séries usuelles : $\sum z^n$, $\sum n\, z^{n-1}$, $\sum n\,(n-1)\, z^{n-2}$, $\sum \dfrac{z^n}{n!}$, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$
- Comparaison série-intégrale
- Cas particulier des séries à termes positifs / négatifs :
  - × (S_n) majorée $\Rightarrow \sum u_n$ converge
  - × (S_n) non majorée $\Rightarrow S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
  - × critère de comparaison des SATP
  - × critère d'équivalence des SATP
  - × critère de négligeabilité des SATP
  - × critère de domination des SATP
- Convergence absolue d'une série numérique : définition, inégalité triangulaire, utilisation du critère de domination pour démontrer l'absolue convergence d'une série
- Propriétés algébriques des séries convergentes
- Formule de Stirling

Applications linéaires et représentations matricielles

- Matrice colonne associé à un vecteur et isomorphisme de représentation
- Matrice de passage : définition, propriétés
- Matrice associée à une application linéaire et isomorphisme de représentation
- Formule de changement de bases
- Noyau d'une matrice :
  - × définition
  - × lien entre $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)$
- Composée d'applications linéaires et produit matriciel
- Réciproque d'une application linéaire et inverse d'une matrice
- Image d'une matrice :
  - × définition
  - × rang d'une matrice : définition et propriétés
  - × $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)$
  - × f bijectif $\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ inversible
- Matrices par blocs et sous-espaces stables :
  - × définition de sous-espace stable
  - × lien entre sous-espaces stables et représentation matricielle par blocs en dimension finie
  - × exemples de sous-espaces stables
  - × matrice dans une base adaptée à des supplémentaires stables

- Projecteurs et symétries :
  - définitions
  - propriétés : équations fonctionnelles, supplémentarité, représentations matricielles par blocs dans des bases adaptées

⚠

> On sanctionnera fortement les points suivants :
>
> - toute confusion d'objets,
> - toute confusion variable libre / liée (ou muette),
> - tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
> - toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
> - tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.